



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**Unidad Zacatenco**  
**Departamento de Computación**

**Caracterización computacional de los conjuntos de  
puntos que no admiten thrackles**

**Tesis que presenta**  
**Laura Mónica Fernández Nájera**  
**para obtener el Grado de**  
**Maestría en Ciencias**  
**en Computación**

**Directora de Tesis**  
**Dra. Dolores Lara Cuevas**

**Ciudad de México**

**7 de Diciembre de 2021**

## Resumen

La geometría combinatoria es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades combinatorias de objetos discretos como lo son puntos en el plano y segmentos de recta. La teoría de gráficas trabaja con objetos matemáticos llamados gráficas, una gráfica  $G$  es una pareja de conjuntos  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito distinto del vacío y  $E$  es un subconjunto de parejas de elementos de  $V$ . Una gráfica geométrica es un dibujo de una gráfica en el plano, de tal forma que los vértices de la gráfica son puntos en posición general y las aristas son segmentos de recta entre parejas de puntos. En esta tesis tenemos como objetivo el dar un algoritmo que determine si una gráfica geométrica particular, llamada *thrackle*, se puede dibujar sobre un conjunto de puntos dado. Un *thrackle* es una gráfica geométrica en la que todos los segmentos de recta tienen un punto en común, cuando la gráfica tiene tantos segmentos como puntos se dice que es máximo. Abordamos el problema mediante la búsqueda de thrackles máximos en algunas familias de puntos, primero realizamos pruebas computacionales mediante la técnica de backtracking, para posteriormente proponer y demostrar la existencia de thrackles máximos en las siguientes familias de puntos: doble círculo, doble cadena convexa, doble cadena zig-zag, doble cadena zig-zag generalizada y conjunto de Horton, así como seis conjuntos de puntos particulares, además dimos la forma explícita de los thrackles para estas familias de puntos.

# Abstract

Combinatorial geometry is a branch of mathematics that studies the combinatorial properties of discrete objects such as points in the plane and line segments. Graph theory works with mathematical objects called graphs, a graph  $G$  is a pair of sets  $G = (V, E)$ , where  $V$  is a finite set other than empty set and  $E$  is a subset of pairs of elements of  $V$ . A geometric graph is a drawing of a graph in the plane, in such a way that the vertices of the graph are points in general position and the edges are line segments between pairs of points. In this thesis we aim to give an algorithm that determines whether a particular geometric graph, called *thrackle*, can be drawn on a given set of points. A *thrackle* is a geometric graph in which all the line segments have a point in common, when the graph has as many segments as there are points, it is said to be a maximum. We approach the problem by searching for maximum thrackles in some families of points, first we perform computational tests using the backtracking technique, to later propose and demonstrate the existence of maximum thrackles in the following families of points: double circle, convex double chain, double zig-zag chain, generalized double zig-zag chain and Horton set, as well as six particular point sets, we also gave the explicit form of the thrackles for these point families.

## Dedicatoria

A Dante, mi hijo hermoso, tu sonrisa ilumina mis días. Ser tu mamá es mi mayor felicidad.

## **Agradecimientos**

Agradezco a el CONACYT por el apoyo económico brindado durante la realización de esta tesis. Agradezco al CINVESTAV por permitirme continuar con mi desarrollo profesional. Agradezco enórmemente a mi directora de tesis, la Dra. Dolores Lara Cuevas, por sus conocimientos invaluables y su guía para llevar a cabo esta investigación, así como por todo su apoyo personal y su gran calidad humana.

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                          | <b>3</b>  |
| <b>2. Antecedentes</b>                          | <b>5</b>  |
| 2.1. Gráficas . . . . .                         | 5         |
| 2.1.1. Gráficas geométricas . . . . .           | 6         |
| 2.2. El problema de Hopf y Pannwit . . . . .    | 7         |
| 2.3. Thrackle . . . . .                         | 12        |
| <b>3. Estado del arte</b>                       | <b>15</b> |
| <b>4. Resultados</b>                            | <b>31</b> |
| 4.1. Doble círculo . . . . .                    | 32        |
| 4.2. Doble cadena convexa . . . . .             | 41        |
| 4.3. Doble cadena zig-zag . . . . .             | 52        |
| 4.4. Conjunto de Horton . . . . .               | 62        |
| 4.5. Conjuntos de puntos particulares . . . . . | 74        |
| <b>5. Conclusiones</b>                          | <b>77</b> |
| Bibliografía . . . . .                          | 83        |



# Capítulo 1

## Introducción

Los conjuntos de puntos en el plano han sido ampliamente estudiados en distintas áreas de las matemáticas, como son la combinatoria, la geometría y la teoría de gráficas. El tipo de preguntas que se estudian respecto a estos conjuntos generalmente se centran en encontrar propiedades de estructuras geométricas dibujadas sobre los mismos.

Considérese, por ejemplo, un conjunto de  $n$  puntos y dibújese sobre este un conjunto de segmentos de recta de tal forma que los extremos de cada segmento sean los puntos del conjunto. Si pedimos que cada par de segmentos tenga un extremo en común o se crucen entonces se pueden dibujar como máximo  $n$  segmentos. Esto fue demostrado en 1946 por Paul Erdős [1]. A dicho conjunto se le conoce como *thrackle*.

Esta noción de conjuntos de objetos geométricos que se cruzan dos a dos se sigue estudiando. Se han estudiado distintas variantes del problema, cambiando los elementos del conjunto por caminos, ciclos hamiltonianos, triángulos disjuntos en vértices o curvas [2, 3]. También se han estudiado más de un criterio de intersección, las principales variantes estudiadas son las *crossing families* [3] y los *thrackles* [4].

En esta tesis estudiamos la intersección de segmentos de recta en la variante original propuesta por Paul Erdős. Nos interesa caracterizar computacionalmente aquellos conjuntos de puntos que admiten el dibujo de un thrackle de tamaño exactamente  $n$ . Es decir, deseamos dar un algoritmo con complejidad polinomial que reciba como entrada un conjunto de  $n$  puntos y devuelva como salida un thrackle de tamaño  $n$  o, en su defecto, nos diga que éste no existe.

Presentamos en este trabajo las demostraciones combinatorias y los algoritmos polinomiales para algunas familias de puntos: doble círculo, doble cadena convexa generalizada y conjunto de Horton, demostramos que siempre existe un thrackle máximo y lo dimos de manera explícita. Para el caso general no obtuvimos el algoritmo deseado, conjeturamos que el problema es NP-completo.

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se definen formalmente los conceptos utilizados en este trabajo. En el Capítulo 3 exponemos los resultados relacionados encontrados en la literatura. En el Capítulo 4 mostramos los resultados de

este trabajo y explicamos como fueron obtenidos. Finalmente, en el Capítulo 5 mencionamos nuestras conclusiones y posible trabajo a futuro.

# Capítulo 2

## Antecedentes

En esta sección daremos las definiciones necesarias para entender el concepto de thrackle. Comenzamos definiendo algunos conceptos básicos de teoría de gráficas y, con base en ellos, presentamos algunos conceptos básicos de la teoría de gráficas geométricas. Posteriormente damos una revisión histórica de algunos resultados existentes en la literatura, comenzando con el problema que dio origen al área de investigación en la que se encuentra el problema que estudiamos en esta tesis. Con todo lo anterior, presentamos las definiciones de thrackle y de thrackle geométrico, siendo este último el tema principal de este trabajo de tesis. Por último presentamos una conjetura central en el área de teoría de gráficas conocida como la conjetura de Conway y presentamos también un teorema que caracteriza a los thrackles de tamaño máximo posible.

### 2.1. Gráficas

Las definiciones son tomadas de [5]. La teoría de gráficas trabaja con objetos matemáticos llamados *gráficas*, una *gráfica*  $G$  es una pareja de conjuntos  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito distinto del vacío y  $E$  es un subconjunto de parejas de elementos de  $V$ . Si  $G$  es una gráfica, a los elementos de  $V$  se les llama vértices de  $G$  y a los elementos de  $E$  se les llama aristas de  $G$ . Decimos que dos vértices  $u, v \in V$  son adyacentes si existe la arista  $\{u, v\} \in E$ , además decimos que la arista  $\{u, v\}$  *incide* en los vértices  $u$  y  $v$ . Definimos el *grado* de un vértice  $v \in V$  como el número de aristas que inciden en él. Si  $E$  contiene todas las aristas formadas a partir de cada par de vértices de  $V$  se dice que  $G$  es una *gráfica completa*. Decimos que una gráfica  $H$  es una *subgráfica* de  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ .

Si  $G$  es una gráfica, un *camino*  $W$  de  $G$  es una secuencia de vértices de  $G$  en la que cada pareja de vértices consecutivos de  $W$  son adyacentes en  $G$ . Una gráfica  $G$  es *conexa* si existe un camino entre cada par de sus vértices. Sea  $C = (v_1, \dots, v_n)$  un camino de  $G$ , decimos que  $C$  es un *ciclo* si para cada  $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ , con  $i \neq j$ , sucede que  $v_i \neq v_j$  y además  $v_1 = v_n$ , se define el *tamaño del ciclo* como el número de aristas que conforman

al ciclo.

Una definición que será muy utilizada a lo largo de este trabajo es la de *partición de un conjunto*.

**Definición 1.** *Sea  $A$  un conjunto, una  $k$ -partición de  $A$  es una colección  $\{A_1, \dots, A_k\}$  de subconjuntos de  $A$ , que cumple las siguientes propiedades*

1.  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para toda  $i \neq j$ .

2.  $A_1 \cup \dots \cup A_k = A$ .

3.  $A_i \neq \emptyset$  para toda  $i$ .

A los subconjuntos de la partición se les llama *partes*.

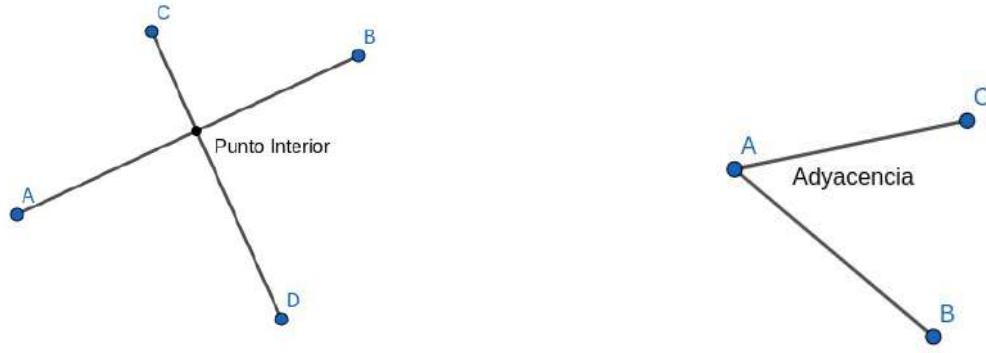
En la siguiente sección daremos algunas definiciones para gráficas dibujadas en el plano y con ello definiremos las gráficas geométricas.

### 2.1.1. Gráficas geométricas

Decimos que un conjunto de puntos está en *posición general* si no hay tres de ellos colineales. A la representación de una gráfica en el plano se le conoce como *dibujo* o *encaje*. Una *gráfica geométrica* es un dibujo de una gráfica en el plano, de tal forma que los vértices de la gráfica son puntos en posición general y las aristas son segmentos de recta entre parejas de puntos. Si las aristas de la gráfica son curvas cerradas entonces llamamos al dibujo *gráfica topológica*.

Podemos pensar en una curva como una sucesión no finita de puntos, entonces las aristas de una gráfica topológica se pueden ver como una sucesión no finita de puntos delimitados por sus vértices. Siguiendo esta idea llamamos a los vértices de una arista *puntos extremos* y al resto de los puntos *puntos interiores*. Decimos que dos aristas tienen un *cruce propio* cuando tienen un punto interior en común, como se muestra en la Figura 2.1a. Decimos que dos aristas son *adyacentes* cuando comparten un vértice, como se muestra en la Figura 2.1b.

Un dibujo de una gráfica es *plano* si no contiene aristas que se cruzan. Una gráfica (abstracta) es *planar* si existe un dibujo plano de la misma.



(a) Cruce propio, cuando dos aristas comparten un punto interior.

(b) Adyacencia, cuando dos aristas comparten un punto extremo.

Figura 2.1: Tipos de intersección entre aristas.

En la siguiente sección hablaremos de un problema que dio origen a una familia particular de gráficas y a la definición de thrackle.

## 2.2. El problema de Hopf y Pannwit

Heinz Hopf y su estudiante Erika Pannwit, de la Universidad de Berlín, publicaron en el *Reporte Anual de la Unión Matemática Alemana* de 1934 [6] el siguiente problema:

**Problema 1.** Sean  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n = p_0$  puntos distintos en el plano tal que la distancia entre ellos satisface las siguientes condiciones:

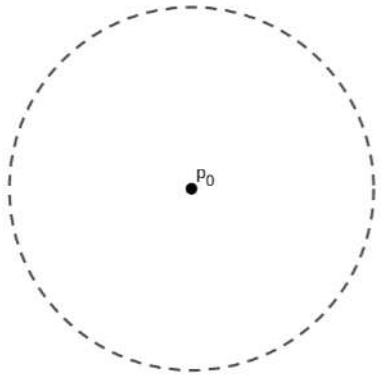
- $d(p_i, p_j) \leq 1$  ( $0 \leq i < j < n$ ).
- $d(p_i, p_{i+1}) = 1$  ( $i = 0, \dots, n - 1$ ).

Prueba que esto es posible si y sólo  $n$  es impar o  $n = 2$ .

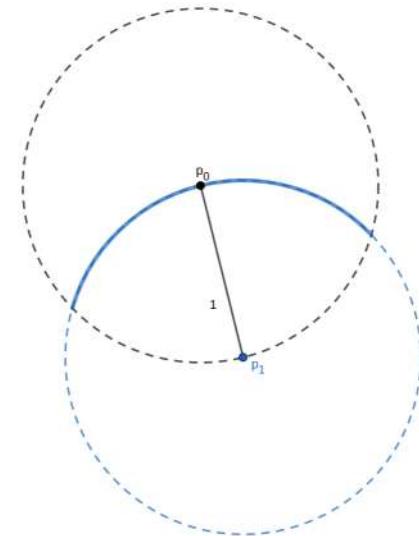
El problema consiste en demostrar que si queremos acomodar  $n > 2$  puntos ordenados en el plano de tal forma que cada par de puntos consecutivos estén a distancia uno y cada par de puntos no consecutivos estén a una distancia menor a uno, donde el último punto es igual al primero, necesariamente el número  $n$  debe ser impar. Es decir, únicamente podemos acomodar una cantidad impar de puntos que satisfagan estas condiciones.

Una respuesta a este problema fue dada por Fenchel [7] quien dio una descripción de dónde colocar los puntos para que el conjunto satisfaga las condiciones. Un ejemplo de la solución de Fenchel para cinco puntos es la siguiente:

1. Sea  $p_0$  el primer punto colocado en el plano, entonces el siguiente punto,  $p_1$ , debe estar a distancia uno de  $p_0$ . En la siguientes ilustraciones marcamos las posibles ubicaciones a distancia 1 con una circunferencia punteada de radio uno.

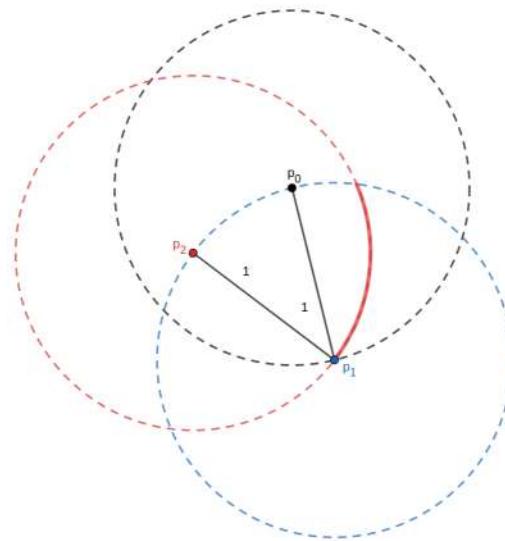


2. Colocamos  $p_1$  a distancia uno de  $p_0$ , esta distancia la denotamos en la siguiente ilustración por un segmento de recta que une a los puntos. Nótese que en el caso en que  $n = 2$  se cumplen las condiciones del problema. Para  $n > 2$  se tiene que el siguiente punto,  $p_2$ , debe estar a una distancia igual a uno de  $p_1$  y a una distancia menor a uno de  $p_0$ . Es decir,  $p_2$  debe estar sobre la circunferencia punteada de radio uno azul y dentro del área delimitada por la circunferencia de radio uno centrada en  $p_0$ , todo esto se muestra en la ilustración de abajo. En la ilustración marcamos la zona donde puede estar  $p_2$  por un segmento de circunferencia de color azul.



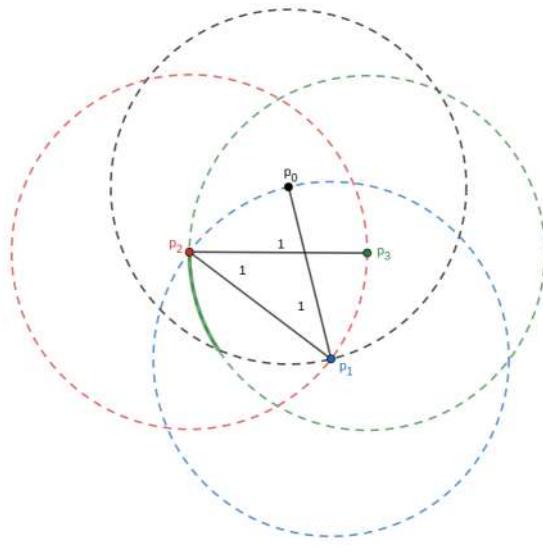
Podemos notar que el segmento  $p_0p_1$  divide el plano en dos semiplanos, por lo que podemos decir que  $p_2$  estará a la izquierda o a la derecha del segmento  $p_0p_1$ .

3. Colocamos  $p_2$  a distancia uno de  $p_1$ , pero a distancia menor a uno de  $p_0$ . Nótese que en el caso en que  $n = 3$  necesariamente los puntos forman un triángulo equilátero, en la ilustración de abajo esto equivale a dibujar los puntos sobre las intersecciones de las circunferencias azul y negra. Para  $n > 3$  el siguiente punto,  $p_3$ , tiene que estar a distancia uno de  $p_2$  y a distancia menor a uno de  $p_0$  y  $p_1$ , en la ilustración marcamos esta zona por un segmento de circunferencia de color rojo.



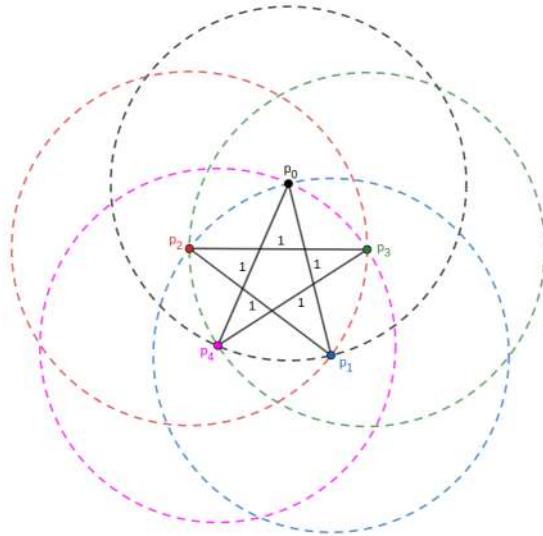
Nótese que el segmento  $p_0p_1$  divide al plano en dos semiplanos y el arco de circunferencia rojo donde se puede colocar  $p_3$  está totalmente contenido en el semiplano opuesto al que contiene al segmento  $p_1p_2$ , por lo que al trazar el segmento  $p_2p_3$  necesariamente cruza al segmento  $p_0p_1$  y comparte un punto con el segmento  $p_1p_2$ .

4. Colocamos  $p_3$  a distancia uno de  $p_2$ , pero a distancia menor a uno de  $p_0$  y  $p_1$ . Nótese que en el caso en que  $n = 4$  necesariamente  $p_3$  tendría que estar a distancia igual a 1 de  $p_0$  por la segunda condición, esto implica que  $p_3$  tendría que estar en la intersección de la circunferencia de radio uno centrada en  $p_0$  con la circunferencia de radio uno con centro en  $p_3$ , sin embargo en esta posición se encuentra  $p_1$ , por lo que no es posible. Para el caso  $n \geq 4$  el punto  $p_4$  debe colocarse a una distancia igual a uno de  $p_3$  y a una distancia menor a uno de  $p_0$ ,  $p_1$  y  $p_2$ , en la ilustración esto se denota por el segmento de circunferencia color verde.



Nótese que el segmento  $p_1p_2$  divide al plano en dos semiplanos y el arco de circunferencia verde donde se puede colocar  $p_4$  está totalmente contenido en el semiplano opuesto al que contiene a los segmentos  $p_0p_1$  y  $p_2p_3$ , por lo que al trazar el segmento  $p_3p_4$  necesariamente los cruza.

5. Como estamos en el caso  $n = 5$ , el punto  $p_4$  debe estar a distancia uno de  $p_0$ . En la ilustración esto es la intersección de la circunferencia de radio uno con centro en  $p_3$  con la circunferencia de radio uno con centro en  $p_0$ .



Nótese que el caso en que  $n = 2$  se cumple trivialmente. En el caso en que  $n > 2$  para que las condiciones del problema se cumplan en cada caso el siguiente punto se debe colocar

de tal manera que el segmento de recta que se forma con el punto anterior cruce a los segmentos anteriores, por lo que los puntos se van colocando de manera alternada en los semiplanos definidos por el segmento anterior. Lo anterior implica que el problema no tiene solución cuando el número de puntos es un número par, ya que necesariamente el último punto quedaría a una distancia estrictamente menor a uno del primer punto, no cumpliendo la segunda condición del problema.

Sea  $P = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$  un conjunto de puntos que cumple las condiciones del Problema 1. La segunda condición del problema nos indica que para cada par de puntos consecutivos de  $P$  la distancia es uno, además nótese que esta distancia es máxima para cualquiera dos puntos de  $P$ , a esta distancia se le conoce como diámetro.

Si unimos con un segmento a cada par de puntos cuya distancia es uno, es decir, cuya distancia realiza el diámetro, entonces obtenemos la que se conoce como gráfica de diámetros. Formalmente se define como sigue:

**Definición 2.** *Sea  $P$  un conjunto de puntos, asociamos a  $P$  la siguiente gráfica:*

*Los vértices de  $G=(V,E)$  son los puntos de  $P$ . Dos vértices  $p_1, p_2 \in P$  son adyacentes si y sólo si la distancia entre ellos es igual al diámetro de  $P$ .*

La desigualdad del triángulo implica que cualesquier dos aristas de la gráfica de diámetros o bien comparten un vértice o bien se cruzan. Un teorema publicado en 1946 por Paul Erdős [1] nos da una cota superior para el número de aristas que puede tener una gráfica de diámetros, el teorema dice lo siguiente:

**Teorema 1.** *(Erdős, 1946) El número de aristas de una gráfica de diámetros inducida por un conjunto de  $n$  puntos en el plano es a lo más  $n$ . Este límite puede ser alcanzado para toda  $n > 2$ .*

Como mencionamos anteriormente, las aristas de la gráfica de diámetros o bien comparten un vértice o bien se cruzan, dicho de otra forma no hay dos aristas disjuntas, además las aristas de la gráfica de diámetros son segmentos de recta, por lo que el Teorema 1 se puede reescribir de la siguiente manera [8]:

**Teorema 2.** *(Erdős, Avital-Hanani, Kupitz) Toda gráfica geométrica de  $n$  vértices que no contiene dos aristas disjuntas tiene a lo sumo  $n$  aristas. Este límite puede ser alcanzado para toda  $n > 2$ .*

Una manera intuitiva de pensar el teorema 2 la dio Avital-Hanani [9] y consiste en el siguiente razonamiento: imaginemos a la gráfica geométrica como una telaraña en donde hay una araña sentada en cada uno de los vértices, si una araña tiene un hilo a su alcance (un arista incidente) y, además, al voltear 180 grados en el sentido de las manecillas del reloj no encuentra otro hilo, entonces la araña avanza hasta la mitad del hilo y deposita un huevecillo; de otra manera no lo hace. Notemos que si no hay dos aristas disjuntas en

la gráfica entonces no habrá arista que no haya sido marcada con un huevecillo, por lo cual el número de aristas no puede exceder el número de arañas.

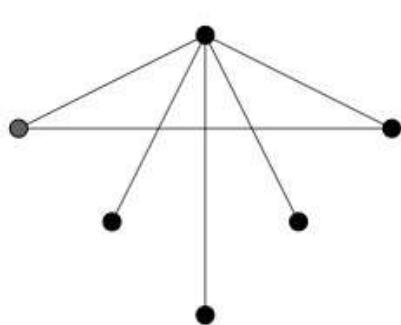
Como hemos visto hasta ahora los resultados de Erdős nos han llevado a gráficas geométricas que tienen la característica de que sus aristas se intersectan por pares. De manera independiente, John Conway trabajó con gráficas topológicas que cumplen la misma característica, definiendo así el concepto de thrackle, como se verá en la siguiente sección.

## 2.3. Thrackle

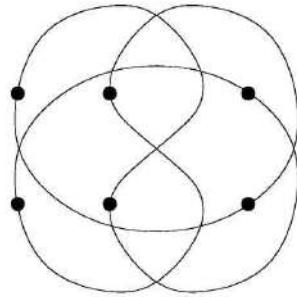
En 1960 John Conway definió un *thrackle* de la siguiente manera:

**Definición 3.** *Un thrackle es una gráfica topológica en la cual cada par de aristas tienen un cruce propio o son adyacentes.*

Si restringimos la definición anterior al caso particular en el que la gráfica es geométrica entonces llamaremos al thrackle un *thrackle geométrico*. Un ejemplo de thrackle geométrico se puede ver en la Figura 2.2a, un ejemplo de thrackle topológico se puede ver en la Figura 2.2b. Cuando una gráfica se puede dibujar como un thrackle se dice que la gráfica es *thrackable*.



(a) Thrackle geométrico.



(b) Thrackle topológico. Imagen creada por Stephan Wehner en C, 9/12/2000.

Figura 2.2: Tipos de thrackles.

Con la definición de thrackle podemos reescribir el Teorema 2 en términos de thrackles geométricos, el cual quedaría de la siguiente manera:

**Teorema 3.** *Todo thrackle geométrico de  $n$  vértices tiene a lo más  $n$  aristas. Este límite puede ser alcanzado para toda  $n > 2$ .*

De manera independiente a los trabajos realizado por Erdős, en 1971, Conway enunció la siguiente conjetura [10]:

**Conjectura de Conway.** *Cada thrackle de  $n$  vértices tiene a lo sumo  $n$  aristas. Este límite puede ser alcanzado para cada  $n > 2$ .*

Cuando se alcanza el límite del Teorema de Conway, es decir cuando un thrackle de  $n$  vértices tiene  $n$  aristas decimos que el thrackle es un *thrackle máximo*.

Al día de hoy la conjetura de Conway no ha podido ser demostrada, aunque existen varios intentos y soluciones para casos con restricciones, ver por ejemplo: [11], [12] [13], [14]. El caso particular más evidente es el Teorema 3.

Se sabe que no todas las gráficas son thrackable, por ejemplo las gráficas completas, excepto la completa con tres vértices, no son thrackable ya que siempre habrá aristas en la gráfica que no intersecten a otras [15]. En 1972 Woodall dio una caracterización de las gráficas finitas thrackableables de la siguiente manera:

**Teorema 4.** (Woodall, 1972 [10]) *Una gráfica finita es thrackable si y sólo si cumple las siguientes condiciones*

1. *Tiene a lo sumo un ciclo impar.*
2. *No contiene ningún ciclo de tamaño cuatro.*
3. *Cada una de sus componentes conexas es un árbol o tiene exactamente un ciclo.*

Lo que nos dice el teorema de Woodall es que los thrackles están formados por ciclos de tamaño impar, de tal forma que si el ciclo tiene  $m$  aristas, estas aristas forman una estrella de  $m$  puntas cuyas aristas que la conforman se intersectan por pares, a esta distribución geométrica le llamamos un *m-grama*. Un ejemplo de esta caracterización para un thrackle con ciclo de tamaño cinco se puede ver en la Figura 2.3.

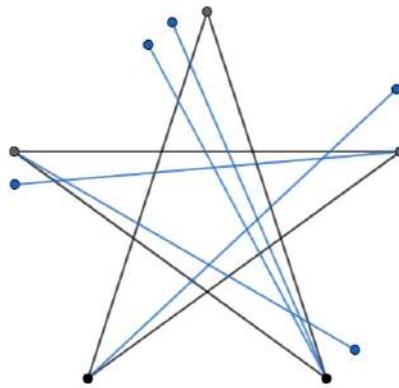


Figura 2.3: Caracterización dada por el teorema de Woodall para un thrackle con ciclo de tamaño cinco.

El teorema de Woodall es utilizado en este trabajo para la búsqueda de thrackles. En particular en este trabajo nos interesa buscar thrackles máximos en un conjunto de puntos en posición general, para ello primero realizamos la búsqueda de thrackles máximos en familias de puntos particulares cuya estructura geométrica facilita la búsqueda.

# Capítulo 3

## Estado del arte

En este capítulo pondremos en contexto el trabajo realizado en esta tesis respecto a los resultados existentes en la literatura.

Comenzamos el capítulo definiendo un parámetro que permite codificar la información respecto a la planaridad de una gráfica, extendemos la definición de este parámetro al caso de las gráficas geométricas, mencionando para caso algunos resultados relevantes relacionados a este parámetro. Posteriormente damos las definiciones de coloración propia de los vértices y de las aristas de una gráfica, así como los conceptos relacionados de clases cromáticas, coloración, número cromático e índice cromático.

El parámetro conocido como thickness, asociado a las gráficas, codifica información respecto a la planaridad de una gráfica. Es decir, este parámetro cuenta cuántas gráficas planares son necesarias para descomponer las aristas de una gráfica. En el mismo sentido si pedimos que las gráficas de la descomposición tengan el mayor número de cruces posibles, estaríamos codificando también información respecto a la planaridad de la gráfica, el tamaño de esta descomposición sería el antithickness.

El thickness fue definido por primera vez en 1963 por W. T. Tutte [16], sin embargo en este trabajo utilizaremos la definición dada por David Eppstein [17]:

**Definición 4.** *Sea  $G$  una gráfica. El thickness de  $G$ , denotado por  $\theta(G)$ , es el entero  $k$  más pequeño tal que existe una partición de  $E(G)$ , de tamaño  $k$ , en la que cada parte induce una gráfica planar.*

En la Figura 3.1 se muestra un ejemplo de thickness para un dibujo de  $K_5$ .

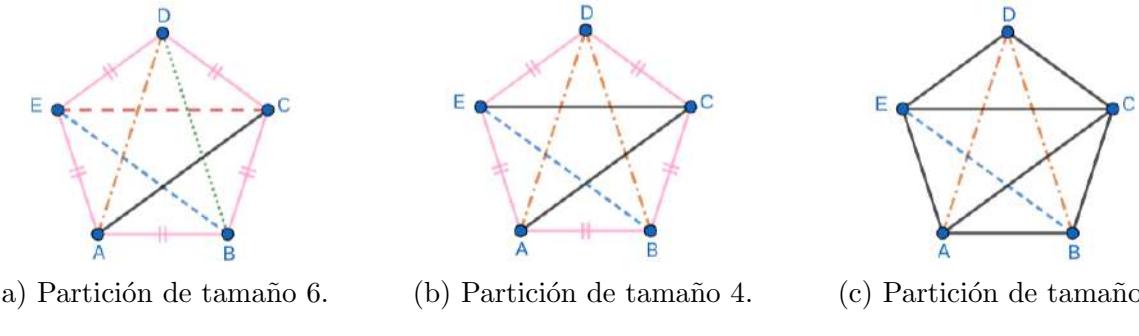


Figura 3.1: Tres particiones de distinto tamaño para el mismo dibujo de  $K_5$ , representadas por distintos tipos de líneas. Cada partición genera gráficas planas. En este caso  $\theta(K_5) = 3$ .

Un resultado inmediato a partir de la definición de thickness es el siguiente:

**Teorema 5.** *Sea  $G$  una gráfica.  $\theta(G) = 1$  si y sólo si  $G$  es planar.*

Uno de los primeros resultados obtenidos para el thickness fue dado Beineke y Harary en 1965 [18], demostraron que el thickness de la gráfica completa  $K_n$  está acotado por abajo de la siguiente manera:

$$\frac{n+7}{6} \leq \theta(K_n).$$

En el mismo artículo se da el valor exacto del thickness para las gráficas completas  $K_9$  y  $K_{10}$ , que cumplen con la siguiente relación:

$$\theta(K_9) = \theta(K_{10}) = 3.$$

Posteriormente se encontró de manera exacta el thickness para todas las demás gráficas completas [19, 20, 21, 22] esto se resume en la siguiente relación:

$$\theta(K_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq n \leq 4 \\ 2 & \text{si } 5 \leq n \leq 8 \\ 3 & \text{si } 9 \leq n \leq 10 \\ \lceil \frac{n+2}{6} \rceil & \text{si } n > 10. \end{cases}$$

Si  $K_{m,n}$  es una gráfica completa bipartita con  $m > n$  tales que cumplen que el producto  $mn$  es un entero impar y existe un entero  $k$  tal que  $n = 2k(m-2)/(m-2k)$ , entonces el thickness de  $K_{m,n}$  está dado por la siguiente relación [23]:

$$\theta(K_{m,n}) = \frac{mn}{2(m+n-2)}.$$

El thickness de una gráfica se ha estudiado extensamente ver, por ejemplo, [24]. En esta tesis resaltamos únicamente los resultados relacionados a las gráficas completas ya que estas son nuestro objeto de estudio.

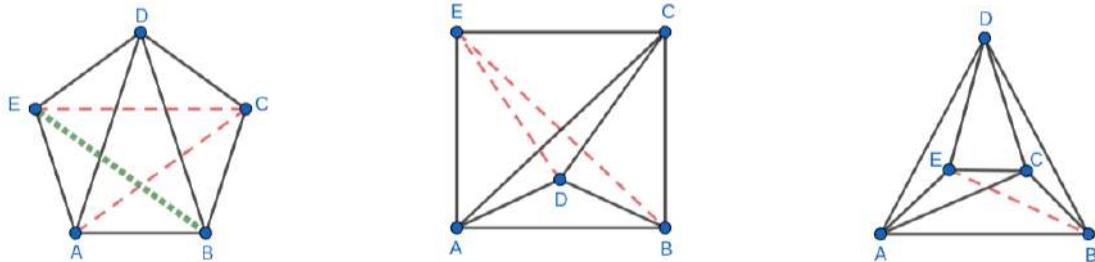
La definición de thickness ha sido adaptada al caso particular de las gráficas geométricas quedando de la siguiente manera [17]:

**Definición 5.** *Sea  $G$  una gráfica geométrica. El thickness de  $G$ , denotado por  $th(G)$ , es el entero  $k$  más pequeño tal que existe una partición de  $E(G)$ , de tamaño  $k$ , en la que cada parte es una gráfica geométrica plana.*

Con base en las definiciones 4 y 5, podemos definir el *thickness geométrico* de la siguiente manera:

**Definición 6.** *Sea  $G$  una gráfica. Sea  $\bar{G}$  el conjunto de todas las gráficas geométricas de  $G$ . El thickness geométrico de  $G$ ,  $\bar{\theta}(G)$ , es el mínimo valor de  $th(G)$  tal que  $G \in \bar{G}$ .*

En la Figura 3.2 presentamos un ejemplo de thickness geométrico para tres dibujos geométricos de  $K_5$ .



(a) Dibujo geométrico de  $K_5$  con  $\theta(K_5) = 3$ .      (b) Dibujo geométrico de  $K_5$  con  $\theta(K_5) = 2$ .      (c) Dibujo geométrico de  $K_5$  con  $\theta(K_5) = 2$ .

Figura 3.2: Tres dibujos geométricos de  $K_5$  con su respectivo valor de thickness. La partición es presentada por distintos tipos de líneas. En este caso  $\bar{\theta}(K_5) = 2$ .

Nótese que si  $G$  es una gráfica planar entonces en  $\bar{G}$  existe una gráfica geométrica plana cuyo thickness es igual a uno, por lo tanto  $G$  tiene thickness geométrico igual a uno, es decir tenemos el siguiente resultado análogo al Teorema 5:

**Teorema 6.** *Sea  $G$  una gráfica.  $\bar{\theta}(G) = 1$  si y sólo si  $G$  es planar.*

Nótese que la definición de thickness impone la restricción de que los dibujos de las gráficas sean planos, por otra parte en el thickness geométrico además se impone la restricción de que las aristas sean segmentos de recta, dicho de otra forma todos los dibujos geométricos son dibujos topológicos. De esto se sigue la siguiente relación [17]:

$$\theta(G) \leq \bar{\theta}(G).$$

En el mismo artículo se demuestra que el valor del thickness geométrico no está acotado asintóticamente por el thickness, lo cual se expresa en el siguiente teorema:

**Teorema 7.** *Para cada  $t$ , existe una gráfica con thickness igual a tres y thickness geométrico  $\geq t$ .*

El teorema anterior implica que el tener algoritmos y estrategias para calcular o aproximar el thickness no significa que esas mismas técnicas sirvan para calcular el thickness geométrico. Por lo tanto, es necesario desarrollar técnicas propias para calcular el thickness geométrico.

Dillencourt *et al.* [25] dan cotas para el thickness geométrico de una gráfica completa, la relación es la siguiente:

$$\left\lceil \frac{n}{5.646} + 0.342 \right\rceil \leq \bar{\theta}(K_n) \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil.$$

También calculan los valores exactos del thickness geométrico para la gráfica completa  $K_n$  para algunos valores específicos de  $n$ , dado por la siguiente relación [25]:

$$\bar{\theta}(K_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq n \leq 4 \\ 2 & \text{si } 5 \leq n \leq 8 \\ 3 & \text{si } 9 \leq n \leq 12 \\ 4 & \text{si } 15 \leq n \leq 16. \end{cases}$$

Se tiene que para  $n = 13$  y  $n = 14$  no se ha encontrado un valor exacto, sino que hay cota mínima igual a 3 y cota máxima igual a 4.

Si  $K_{m,n}$  es una gráfica completa bipartita, con  $m > n$  tales que cumplen que el producto  $mn$  es un entero impar y existe un entero  $k$  tal que  $n = 2k(m - 2)/(m - 2k)$ , entonces el thickness geométrico cumple la siguiente relación:

$$\left\lceil \frac{mn}{2(m+n-2)} \right\rceil \leq \theta(K_{m,n}) \leq \bar{\theta}(K_{m,n}) \leq \left\lceil \frac{\min(m,n)}{2} \right\rceil$$

Consideremos un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa y sea  $K_n^c$  la gráfica geométrica completa dibujada sobre ese conjunto de puntos. De acuerdo con la Definición 5, el thickness  $K_n^c$  está dado por la siguiente relación [26]:

$$th(K_n^c) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

El thickness, y por lo tanto el thickness geométrico, se pueden reescribir como coloraciones de gráficas, a continuación presentamos una manera de hacerlo.

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica, decimos que una *coloración propia de los vértices de  $G$*  es el etiquetado de todos los vértices de  $G$  de tal forma que dos vértices adyacentes no

tengan la misma etiqueta. Análogamente definimos una *coloración propia de las aristas de G* como el etiquetado de todas las aristas de G de tal forma que dos aristas adyacentes<sup>1</sup> no tengan la misma etiqueta. A estas etiquetas les llamamos *colores* ya que cuando el número de etiquetas es pequeño se utilizan colores como rojo, verde, azul, etc. En general, para  $k$  colores estas etiquetas pueden ser los números enteros del 1 a  $k$ . Si se utilizan  $k$  colores decimos que la coloración propia es una  $k$ -coloración. Dada una  $k$ -coloración de los vértices de G, sea  $V_i$  el conjunto de vértices de V con color  $i$ , llamamos a este conjunto una *clase cromática de G*. Nótese que el conjunto de las clases cromáticas,  $\{V_1, \dots, V_k\}$ , de G es una *partición* del conjunto V de los vértices de la gráfica.

Una gráfica G es *k-coloreable* si existe una k-coloración de los vértices (aristas) de G. Al número  $k$  más pequeño para el cual G es k-coloreable lo llamamos *número cromático*  $\chi(G)$  (*índice cromático*  $\chi'(G)$ ). En la Figura 3.3 se puede ver un ejemplo de las definiciones anteriores.

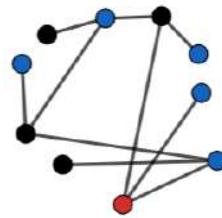


Figura 3.3: Ejemplo de una 3 -coloración de una gráfica. En este caso no existe una forma de colorear la gráfica con menos colores, por lo que su número cromático es tres. Nótese que los vértices de las distintas clases cromáticas no son adyacentes.

Si quisieramos extender la noción de coloración propia a las gráficas geométricas, pensar en la coloración de vértices no sería distinto al caso de las gráficas abstractas, así que la forma de extender la noción sería coloreando las aristas. Notemos que para construir esta definición necesitamos el concepto de adyacencia de aristas. Existen diversas formas de definir cuándo dos aristas son adyacentes, la forma obvia es decir que dos aristas son adyacentes si comparten el mismo vértice, sin embargo esta definición no toma en cuenta la geometría de la gráfica. A continuación presentamos cuatro formas, o criterios, de definir la adyacencia de aristas que sí consideran la geometría de la gráfica. Además, para cada criterio de adyacencia definiremos su correspondiente gráfica de intersección.

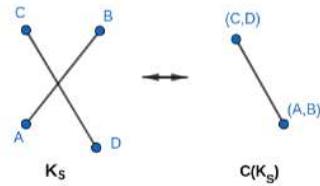
Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano colocados en posición general. Si consideramos los segmentos de recta entre cada pareja de puntos de  $S$  entonces se induce, de manera natural, una gráfica geométrica completa. Denotaremos esta gráfica como  $K_S$ . A  $K_S$  podemos asociarle una gráfica de intersección de cuatro formas distintas.

---

<sup>1</sup>Recordemos que dos aristas son adyacentes si tienen un vértice en común.

Sea  $V$  el conjunto de vértices inducido por los  $\binom{n}{2}$  segmentos de recta de  $K_S$ . Todas las gráficas que se definen a continuación tienen a  $V$  como conjunto de vértices.

1. La gráfica  $C(K_S)$ : Si dos segmentos de recta de  $K_S$  se cruzan entonces sus correspondientes vértices en  $C(K_S)$  comparten una arista.



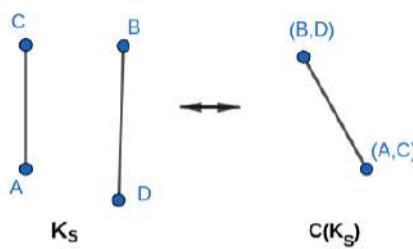
2. La gráfica  $W(K_S)$ : Si dos segmentos de recta de  $K_S$  comparten un punto o son disjuntos entonces sus correspondientes vértices en  $W(K_S)$  comparten una arista.



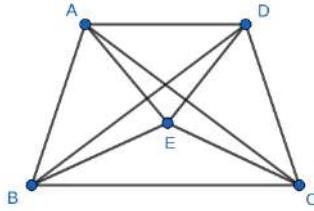
3. La gráfica  $I(K_S)$ : Si dos segmentos de recta de  $K_S$  se intersectan entonces sus correspondientes vértices en  $I(K_S)$  comparten una arista.



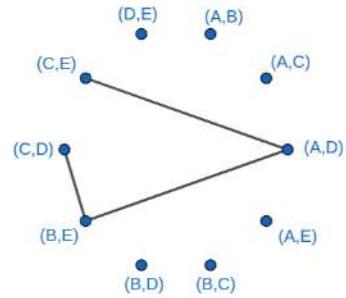
4. La gráfica  $D(K_S)$ : Si dos segmentos de recta de  $K_S$  son disjuntos entonces sus correspondientes vértices en  $D(K_S)$  comparten una arista.



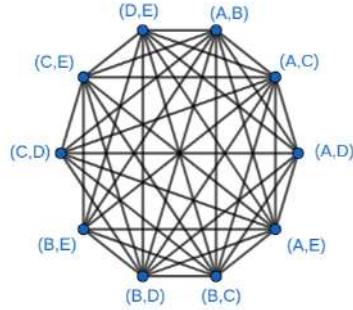
En la figura 3.6 mostramos a  $K_5$  para un conjunto  $S$  con cinco puntos, también mostramos sus respectivas gráficas de cruce.



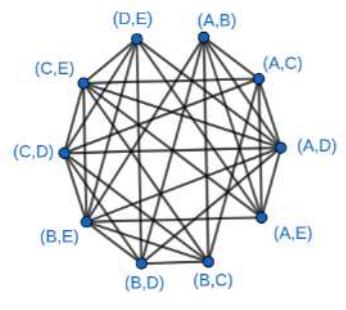
(a) Dibujo geométrico de la gráfica completa  $K_5$ .



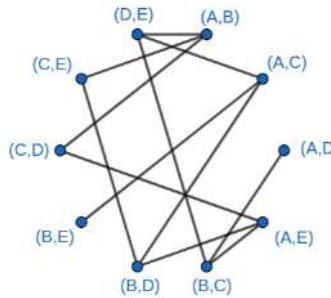
(b) La gráfica de cruce  $C(K_5)$  del dibujo  $K_5$ .



(c) La gráfica de cruce  $W(K_5)$  del dibujo  $K_5$ .



(d) La gráfica de cruce  $I(K_5)$  del dibujo  $K_5$ .

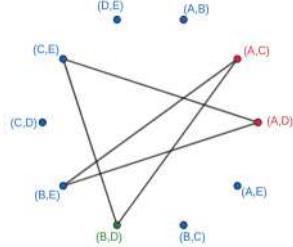


(e) La gráfica de cruce  $D(K_5)$  del dibujo  $K_5$ .

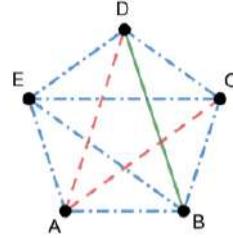
Figura 3.6: Dibujo de una gráfica geométrica completa y sus correspondientes gráficas de cruce C,W,I y D.

Analicemos primero la gráfica  $C(K_5)$ . Veamos que por la manera en que está definida se tiene que dos de sus vértices comparten una arista si las aristas correspondientes en  $K_5$  se cruzan. Esto quiere decir que si damos una coloración propia de los vértices de  $C(K_5)$  cualesquiera dos vértices adyacentes tendrán distintos colores asignados. Es decir que es un conjunto independiente en  $C(K_5)$ . De esto se sigue que las clases cromáticas en  $C(K_5)$

son planas en  $K_S$ . En la Figura 3.7 mostramos a  $K_S$  para un conjunto  $S$  con cinco puntos, también mostramos su respectiva gráfica  $C(K_S)$ .



(a) Coloración propia de los vértices de  $C(K_5)$ , podemos ver que el índice cromático  $\chi'(C(K_5)) = 3$ .



(b) Coloración propia de las aristas  $K_5$  que induce una partición en gráficas planas, podemos ver que  $\chi(K_5) = 3$ .

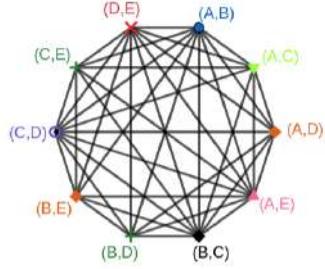
Figura 3.7: Una coloración propia de los vértices de  $C(K_5)$  induce una coloración propia de las aristas de  $K_5$ . La partición de las aristas de  $K_5$  es representada por distintos tipos de línea.

Por lo anterior podemos definir el thickness geométrico de la siguiente manera:

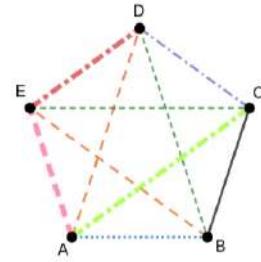
**Definición 7.** Sea  $S$  un conjunto de puntos en el plano colocados en posición general. El thickness geométrico de la gráfica completa de  $n$  vértices inducida por  $S$  está dado por la siguiente relación:

$$\bar{\theta}(n) = \min\{ \chi(C(S)) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n \}.$$

Analicemos ahora la gráfica  $W(K_S)$ . Veamos que por la manera en que está definida se tiene que dos de sus vértices comparten una arista si las aristas correspondientes en  $K_S$  comparten un vértice o son disjuntas. Esto quiere decir que si damos una coloración propia de los vértices de  $W(K_S)$  cualesquiera dos vértices adyacentes tendrán distintos colores asignados. Es decir que es un conjunto independiente en  $W(K_S)$ . De esto se sigue que las clases cromáticas en  $W(K_S)$  no comparten vértices ni son disjuntas en  $K_S$ , esto significa que se cruzan por pares. A las gráficas con esta propiedad se les conoce como *crossing families* [3]. En la Figura 3.8 mostramos a  $K_S$  para un conjunto  $S$  con cinco puntos, también mostramos su respectiva gráfica  $W(K_S)$ .



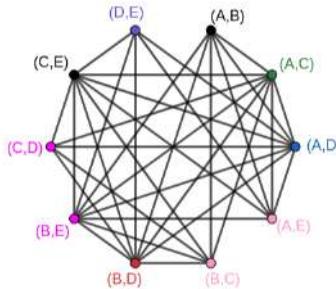
(a) Coloración propia de los vértices de  $W(K_5)$ , podemos ver que el ínfice cromático induce una coloración propia de las aristas de  $K_5$ . La partición de las aristas de  $K_5$  es representada por distintos tipos de línea.



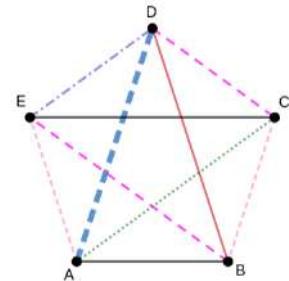
(b) Coloración propia de las aristas  $K_5$  que induce una partición en crossing families, podemos ver que  $\chi(K_5) = 8$ .

Figura 3.8: Una coloración propia de los vértices de  $W(K_5)$  induce una coloración propia de las aristas de  $K_5$ . La partición de las aristas de  $K_5$  es representada por distintos tipos de línea.

Analicemos ahora la gráfica  $I(K_5)$ . Veamos que por la manera en que está definida se tiene que dos de sus vértices comparten una arista si las aristas correspondientes en  $K_5$  se intersectan. Esto quiere decir que si damos una coloración propia de los vértices de  $I(K_5)$  cualesquiera dos vértices adyacentes tendrán distintos colores asignados. Es decir que es un conjunto independiente en  $I(K_5)$ . De esto se sigue que las clases cromáticas en  $I(K_5)$  no se intersectan en  $K_5$ , esto significa que las gráficas inducidas son planas y además sus aristas son aisladas. A las gráficas con esta propiedad se les conoce como *emparejamientos planos* [27]. En la Figura 3.9 mostramos a  $K_5$  para un conjunto  $S$  con cinco puntos, también mostramos su respectiva gráfica  $I(K_5)$ .



(a) Coloración propia de los vértices de  $I(K_5)$ , podemos ver que el ínfice cromático induce una coloración propia de las aristas de  $K_5$ . La partición de las aristas de  $K_5$  es representada por distintos tipos de línea.



(b) Coloración propia de las aristas  $K_5$  que induce una partición en crossing families, podemos ver que  $\chi(K_5) = 7$ .

Figura 3.9: Una coloración propia de los vértices de  $I(K_5)$  induce una coloración propia de las aristas de  $K_5$ . La partición de las aristas de  $K_5$  es representada por distintos tipos de línea.

Para la gráfica  $D(K_5)$ . Veamos que por la manera en que está definida se tiene que dos de sus vértices comparten una arista si las aristas correspondientes en  $K_5$  son disjuntas. Esto quiere decir que si damos una coloración propia de los vértices de  $D(K_5)$  cualesquier dos vértices adyacentes tendrán distintos colores asignados. Es decir que es un conjunto independiente en  $D(K_5)$ . De esto se sigue que las clases cromáticas en  $D(K_5)$  no son disjuntas en  $K_5$ , esto significa que las gráficas inducidas son thrackles. En la Figura 3.10 mostramos a  $K_5$  para un conjunto  $S$  con cinco puntos, también mostramos su respectiva gráfica  $D(K_5)$ .



- (a) Coloración propia de los vértices de  $D(K_5)$ , podemos ver que el índice cromático  $\chi'(D(K_5)) = 3$ .  
(b) Coloración propia de las aristas  $K_5$  que induce una partición en crossing families, podemos ver que  $\chi(K_5) = 3$ .

Figura 3.10: Una coloración propia de los vértices de  $D(K_5)$  induce una coloración propia de las aristas de  $K_5$ . La partición de las aristas de  $K_5$  es representada por distintos tipos de línea.

La forma geométrica de los conjuntos independientes inducidos en  $K_5$  por las gráficas  $C(S_K)$ ,  $W(S_K)$ ,  $I(S_K)$  y  $D(S_K)$  la resumimos en la Tabla 3.1.

| Gráfica  | Conjuntos independientes en $S_K$ |
|----------|-----------------------------------|
| $C(S_K)$ | Gráficas planares                 |
| $W(S_K)$ | Crossing families                 |
| $I(S_K)$ | Emparejamientos planos            |
| $D(S_K)$ | Thrackles                         |

Tabla 3.1: Particiones inducidas  $S_K$  al colorear prípiamente las gráficas  $C(S_K)$ ,  $W(S_K)$ ,  $I(S_K)$  y  $D(S_K)$ .

Las gráficas  $C(S_K)$ ,  $W(S_K)$ ,  $I(S_K)$  y  $D(S_K)$  fueron definidas por primera vez en el trabajo de G. Araujo et. al. [28] y con base en ellas definieron y estudiaron los siguientes parámetros:

$$w(n) = \max\{ \chi(W(S)) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n \}.$$

$$i(n) = \max\{ \chi(I(S)) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n \}.$$

$$d(n) = \max\{ \chi(D(S)) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n \}.$$

G. Araujo et. al. obtuvieron los siguientes resultados:

$$c_1 n \log n \leq w(n) \leq c_2 n^2 \frac{\log \log n}{\log n}, \text{ con } c_1, c_2 > 0.$$

$$n \leq i(n) \leq cn^{\frac{3}{2}}, \text{ con } c > 0.$$

$$5 \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor \leq d(n) \leq \min \left\{ n - 2, n + \frac{1}{2} - \frac{\lfloor \log \log n \rfloor}{n} \right\}.$$

También definieron los respectivos casos particulares cuando S es un conjunto de puntos en posición convexa, denotando estos parámetros como  $w_c(n)$ ,  $i_c(n)$  y  $d_c(n)$ . Obteniendo los siguientes resultados:

$$w_c(n) = \Theta(n \log n).$$

$$i_c(n) = n.$$

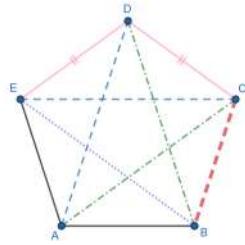
$$2 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - 1 \leq d_c(n) \leq \min \left\{ n - 2, n - \frac{\lfloor \log n \rfloor}{2} \right\}.$$

El thickness nos habla de la planaridad de una gráfica al descomponerla, sin embargo también podemos preguntarnos qué sucede con el caso contrario cuando queremos descomponer una gráfica en partes que inducen gráficas con la propiedad de que todas sus aristas se intersecten, es decir descomponerla en thrackles, para ello definimos el parámetro de *antithickness*.

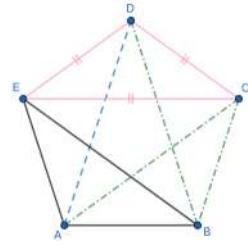
David Wood y Vida Dujmović [15] definen el parámetro del *antithickness* buscando obtener resultados análogos a los obtenidos por Eppstein [26], con la particularidad de que en esta ocasión se trata de gráficas cuyas particiones forman thrackles. Formalmente definimos el antithickness de la siguiente manera:

**Definición 8.** Sea  $G$  una gráfica. El *antithickness* de  $G$ , denotado por  $At(G)$ , es el entero  $k$  más pequeño tal que existe una partición de  $E(G)$ , de tamaño  $k$ , en la que cada parte induce una gráfica *thrackleable*.

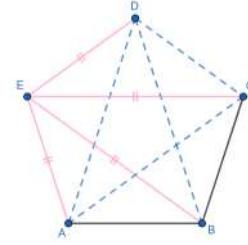
En la Figura 3.11 se muestra un ejemplo de thickness para un dibujo de  $K_5$ .



(a) Partición de tamaño 6.



(b) Partición de tamaño 4.



(c) Partición de tamaño 3.

Figura 3.11: Tres particiones de distinto tamaño para el mismo dibujo de  $K_5$ , representadas por distintos tipos de líneas. Cada partición genera gráficas thrackable. En este caso  $At(K_5) = 3$ .

Un resultado inmediato a partir de la definición de antithickness es el siguiente:

**Teorema 8.** *Sea  $G$  una gráfica.  $At(G) = 1$  si y sólo si  $G$  es thrackable.*

De manera análoga a las Definiciones 5 y 6 de thickness para gráficas geométricas y thickness geométrico, se definen los parámetros de *antithickness para gráficas geométricas* y *antithickness geométrico* como sigue [15]:

**Definición 9.** *Sea  $G$  una gráfica geométrica. El antithickness de  $G$ , o el antithickness de una gráfica geométrica  $G$ , denotado por  $Ath(G)$ , es el entero  $k$  más pequeño tal que existe una partición de  $E(G)$ , de tamaño  $k$ , en la que cada parte es una thrackle geométrico.*

**Definición 10.** *Sea  $G$  una gráfica. Sea  $\bar{G}$  el conjunto de todas las gráficas geométricas de  $G$ . El antithickness geométrico de  $G$ ,  $\bar{At}(G)$ , es el mínimo valor de  $Ath(G)$  tal que  $G \in \bar{G}$ .*

Nótese que si  $G$  es una gráfica thrackable entonces en  $\bar{G}$  existe un thrackle geométrico cuyo antithickness es igual a uno, por lo tanto  $G$  tiene antithickness geométrico igual a uno, es decir tenemos el siguiente resultado análogo al Teorema 8:

**Teorema 9.** *Sea  $G$  una gráfica.  $\bar{At}(G) = 1$  si y sólo si  $G$  es thrackable.*

Nótese que la definición de antithickness impone la restricción de que los dibujos de las gráficas sean thrackles, por otra parte en el antithickness geométrico además se impone la restricción de que las aristas sean segmentos de recta, dicho de otra forma todos los dibujos geométricos son dibujos topológicos. De esto se sigue la siguiente relación [13]:

$$At(G) \leq \bar{At}(G).$$

A diferencia del thickness, el antithickness no ha sido tan estudiado, sin embargo podemos hacer uso de la gráfica de cruce  $D(S)$ , la cual como ya vimos induce particiones que son thrackles, para recuperar los resultados de número cromático de algunos ejemplos de gráficas.

Una manera equivalente de definir el antithickness es mediante el número cromático de la gráfica de adyacencia  $D(S)$  de la siguiente manera:

**Definición 11.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano colocados en posición general. El antithickness geométrico de la gráfica completa de  $n$  vértices inducida por  $S$  está dado por la siguiente relación:

$$\bar{At}(n) = \min\{\chi(D(S)) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}.$$

Análogamente definimos el parámetro para el caso particular en que  $S$  es un conjunto de puntos en posición convexa, el cual es el *antithickness convexo*:

**Definición 12.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano colocados en posición convexa. El antithickness convexo de la gráfica completa de  $n$  vértices inducida por  $S$  es

$$At_c(n) = \min\{\chi(D(S)) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ está en posición convexa, } |S| = n\}.$$

David Wood y Vida Dujmović [15] llegan a la conclusión de que el antithickness geométrico está acotado por el antithickness convexo, esto quiere decir que se cumple la siguiente relación:

$$\bar{At}(G) \leq At_c(G).$$

Además los autores dan una cota para el thickness en términos del antithickness, dicho de otra forma, se tiene que para toda gráfica  $G$  con thickness  $t$  y antithickness  $k$  los autores presentan la siguiente cota:

$$k \leq t \leq \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil.$$

Para una gráfica completa de tamaño  $n$  con antithickness  $k$  se cumple la siguiente cota:

$$\frac{n}{3} \leq k \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil.$$

Mientras que para una gráfica completa con antithickness convexo  $k$  se cumple la siguiente cota:

$$\binom{n}{2} \leq kn - \binom{k}{2}.$$

Despejando  $k$  de la relación anterior se obtiene la cota inferior para  $k$ , es decir una cota inferior del antithickness la cual es la siguiente:

$$n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor \leq k. \quad (3.1)$$

Nótese que  $\chi(D(S))$  es equivalente al antithickness de  $K_S$ . Ruy Fabila *et. al.* [29] calcularon un cota superior de  $\chi(D(S))$  y con la cota inferior de la Ecuación 3.1 dieron el valor exacto del número cromático de  $D(S)$ , el cual está dado por la siguiente expresión:

$$\chi(D(n)) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

A continuación daremos el valor del antithickness para un conjunto de puntos particular llamado *la doble cadena convexa*.

**Definición 13.** Para  $k \leq l$  se define una  $(k,l)$ -doble cadena convexa como la unión disjunta de dos conjuntos de puntos  $U$  y  $L$  tales que:

1.  $U$  es un conjunto de  $k$  puntos en posición convexa, cuya cubierta convexa está delimitada por arriba por una arista y  $L$  es un conjunto de  $l$  puntos en posición convexa, cuya cubierta convexa está delimitada por abajo por una arista.
2. Cada punto de  $L$  está por debajo de cada línea recta determinada por dos puntos de  $U$ .
3. Cada punto de  $U$  está por encima de cada línea recta determinada por dos puntos de  $L$ .

Decimos que  $U$  y  $L$  son la cadena superior y la cadena inferior respectivamente de una  $(k,l)$ -doble cadena. Denotamos por  $C_{k,l}$  a cualquier  $(k,l)$ -doble cadena, en la Figura 4.11 se muestra una  $(5,7)$ -doble cadena.

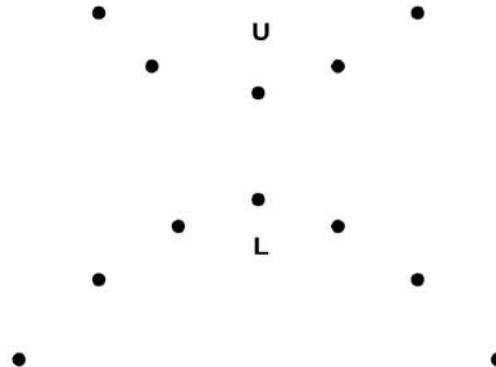


Figura 3.12: Ejemplo de doble cadena  $C_{5,7}$ .

Para la doble cadena convexa simétrica, es decir  $C_{n,n}$ , se encontró una cota inferior dada por la siguiente relación:

$$2n \leq \chi(C_{n,n}).$$

Para  $k + \ell$  puntos sobre una  $(k,l)$ -doble cadena convexa, denotamos a la gráfica completa inducida por este conjunto de puntos como  $K_{\ell,k}$ . En [30] se calculó el valor exacto del antithickness geométrico de  $K_{\ell,k}$ , el cual están dado la siguiente relación:

$$At(K_{\ell,k}) = k + l - \left\lfloor \sqrt{2\ell + \frac{1}{4}} - \frac{1}{3} \right\rfloor.$$

El estudio del antithickness iniciado por David Wood y Vida Dujmović en 2017 es relativamente joven comparado con el estudio del thickness iniciado por Eppstein en 2004, por lo cual la bibliografía y los resultados asociados al antithickness no son tan robustos como lo son para el thickness. Si bien tenemos que las Definiciones 8 y 9 nos permiten utilizar resultados dados para números cromáticos, otra manera de estudiar el antithickness es mediante el estudio de los thrackles de las particiones de la gráfica. Sin embargo tenemos que el espacio de búsqueda para thrackles tiene las siguientes características:

- Para un conjunto de  $n$  puntos se tienen  $\binom{n}{2}$  aristas posibles.
- Para elegir un conjunto de  $n$  aristas se tienen  $\binom{\binom{n}{2}}{n}$  combinaciones posibles.
- Verificar de manera exhaustiva que un conjunto de  $m$  aristas es thrackle toma tiempo del orden de  $\mathcal{O}(m^2)$ .

Por lo que un algoritmo de búsqueda exhaustivo toma conjuntos de  $n$  aristas de las  $\binom{\binom{n}{2}}{n}$  posibles y busca thrackles máximos, por lo que cada que encuentra un thrackle de tamaño  $m < n$  lo desecha y busca de nuevo, esto quiere decir que realiza  $m^n$  búsquedas, es decir se tiene que el espacio de búsqueda es exponencial. De modo que encontrar un algoritmo que se ejecute en tiempo polinomial cuya entrada sea un conjunto de  $n$  puntos en posición general y cuya salida sea un thrackle geométrico de tamaño  $n$  nos permitiría tener una forma eficiente de analizar las particiones del conjunto de aristas y con ello calcular el antithickness para cualquier distribución de puntos que se nos de.

En la siguiente sección daremos resultados teóricos que nos permiten caracterizar los thrackles máximos sobre algunos conjunto de puntos en específico.



# Capítulo 4

## Resultados

En este capítulo presentamos resultados obtenidos para algunos conjuntos particulares. Para obtener un algoritmo de búsqueda de thrackles que se ejecute en tiempo polinomial utilizamos conjunto de puntos generados por programas propios [31], así como puntos obtenidos a partir de la base de datos ComPoSe<sup>1</sup>[32]. Los conjuntos de puntos son presentados en subsecciones independientes, cada sección inicia con la definición formal, en caso de tenerla, así como mencionando sus propiedades particulares; continúa con resultados computacionales obtenidos a partir de los siguientes programas:

- El primer programa, al que llamaremos *programa pseudoaleatorio*, recibe un conjunto de  $n$  puntos y etiqueta arbitrariamente las  $\binom{n}{2}$  aristas posibles. Posteriormente elige de manera pseudoaleatoria una arista y la guarda, elige de manera pseudoaleatoria otra arista y revisa que sea thrackable con la arista guardada, es decir verifica si comparten un vértice o se cruzan verificando si los segmentos de recta que pasan por los puntos se cruzan. En caso de no ser thrackable la desecha y prueba con otra, en caso de ser thrackable la guarda y prueba con otra. Continúa el proceso anterior hasta guardar  $n$  aristas thrackleables o revisar las  $\binom{n}{2}$  aristas posibles, en caso de llegar al límite de aristas desecha todas las aristas guardadas y elige otra como arista inicial.
- El segundo programa, al que llamaremos *programa secuencial*, recibe un conjunto de  $n$  puntos y etiqueta arbitrariamente las  $\binom{n}{2}$  aristas posibles, posteriormente elige conjuntos de  $n$  aristas de manera ordenada para evitar repeticiones, es decir, busca thrackles de manera exhaustiva.

Por último mencionaremos los resultados obtenidos en cada conjunto de puntos.

En las demostraciones presentadas en este capítulo utilizamos el Teorema 4 de manera recurrente, por lo que de aquí en adelante nos referiremos a éste únicamente como el teorema de Woodall. Recordemos lo que dice el teorema:

---

<sup>1</sup>Combinatorics of Point Sets and Arrangements of Objects.

**Teorema de Woodall.** Una gráfica finita es thrackable si y sólo si cumple las siguientes condiciones

1. Tiene a lo sumo un ciclo impar.
2. No contiene ningún ciclo de tamaño cuatro.
3. Cada una de sus componentes conexas es un árbol o tiene exactamente un ciclo.

Comenzamos dando la definición y resultados para el conjunto de puntos conocido como *el doble círculo*.

## 4.1. Doble círculo

El conjunto de puntos conocido en la literatura como *doble círculo* se define de la siguiente manera [33]:

**Definición 14.** Para  $n \geq 3$ , un doble círculo es un conjunto  $P = \{p_0, \dots, p_{n-1}, p'_0, \dots, p'_{n-1}\}$  de  $2n$  puntos en el plano colocados en posición general tales que:

1.  $p_0, \dots, p_{n-1}$  son los puntos de la capa convexa de  $P$  etiquetados en orden angular en el sentido antihorario
2. El punto  $p'_i$  se encuentra entre los puntos  $p_i$  y  $p_{i+1}$  segun el orden angular.
3. La recta que pasa por  $p_i$  y  $p'_i$  separa a  $p_{i+1}$  de  $P$ .
4. La recta que pasa por  $p'_i$  y  $p_{i+1}$  separa a  $p_i$  de  $P$ .

En la Figura 4.1 podemos ver un dibujo del doble círculo para  $n = 5$ .

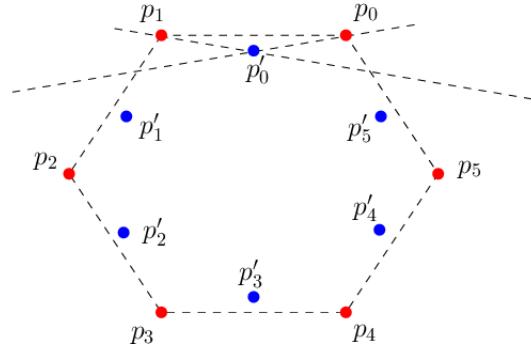


Figura 4.1: Dibujo del doble círculo para  $n = 5$ . Se pueden ver esquematizadas las propiedades de la definición.

Para este conjunto usamos puntos que generamos así como conjuntos de puntos de la base de datos [32]. Con el fin de conocer para cuales valores de  $n$  existen thrackles máximos, así como el tamaño de su ciclo y cuales aristas lo conforman, para cada caso se hicieron mil pruebas para cada  $n$  entre 1 y 1000. En la Figura 4.2 se pueden ver los resultados para  $n = 3, 5, 6, 7$ .

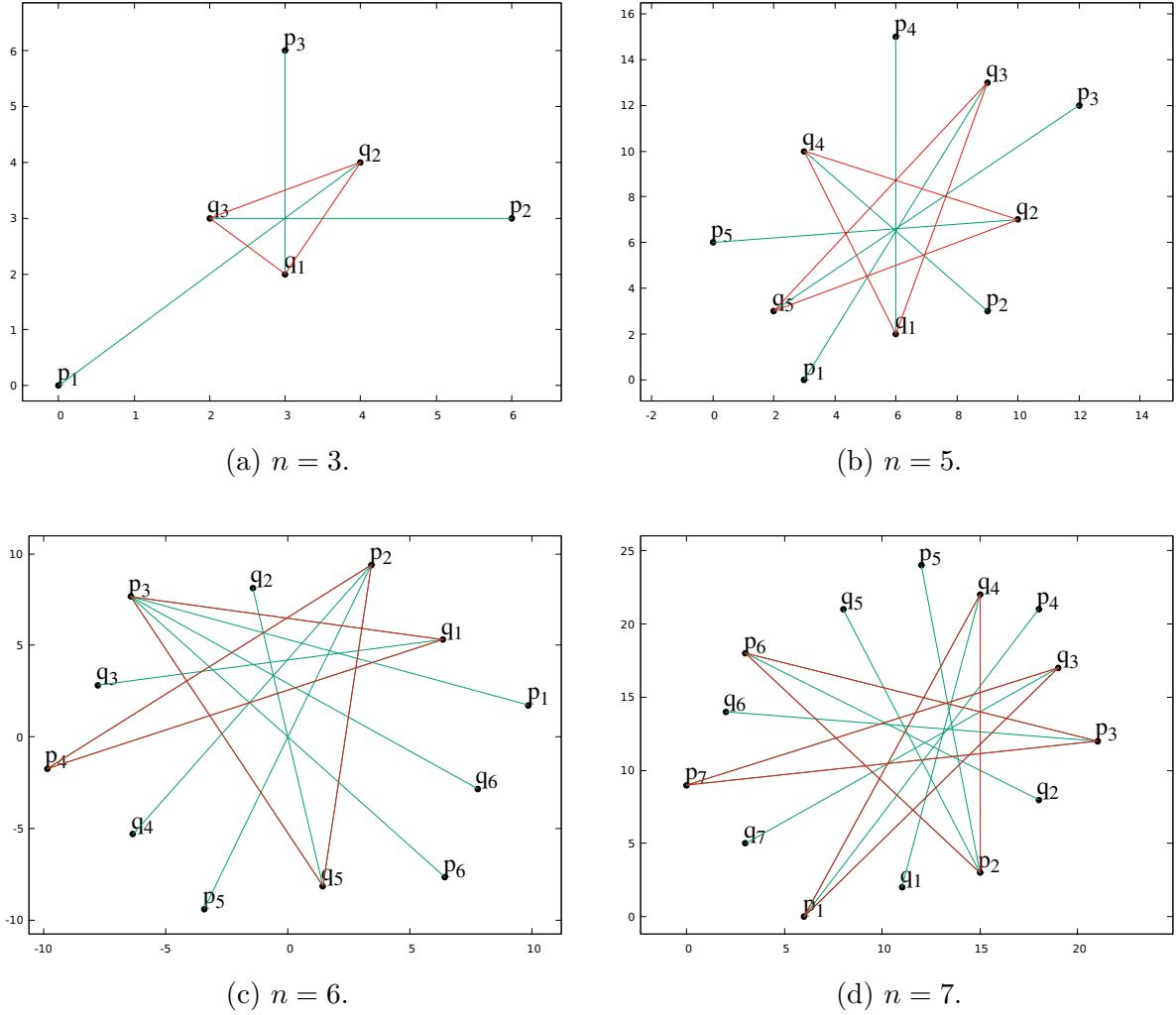


Figura 4.2: Resultados obtenidos para el doble círculo con  $n = 3, 5, 6, 7$ .

Para cada prueba y cada  $n$  se encontró un thrackle máximo, mientras que de la información sobre los ciclos no obtuvimos algún patrón entre cada thrackle, por lo que realizamos la siguiente proposición.

**Proposición 1.** *Sea  $P = \{p_1, \dots, p_n, p'_1, \dots, p'_n\}$  un doble círculo. Para  $3 \leq n$ ,  $P$  admite un thrackle máximo.*

Vamos a demostrar que el conjunto del doble círculo siempre admite un thrackle máximo.

*Demostración.* Sean  $C_E = \{p_1, \dots, p_n\}$  el conjunto de puntos sobre la capa convexa, es decir el círculo exterior. Sea  $C_I = P \setminus C_E$  el conjunto de puntos del círculo interior.

La idea es construir un  $n$ -grama con los puntos de  $C_I$  y unir los puntos restantes de tal forma que construyamos un thrackle máximo, para ello vamos a considerar primero el caso cuando  $n$  es un número impar y posteriormente el caso cuando  $n$  es un número par.

- Caso  $n$  impar.

Como  $n$  es un número impar y  $C_I$  es un conjunto de puntos en posición convexa podemos generar un  $n$ -grama si tomamos las aristas de manera correcta. Para ello vamos definir la *función de reetiquetado*  $f_n^{impar} : [1, n] \mapsto [1, n]$  como sigue:

$$f_n^{impar}(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ n + 3 - 2i & \text{si } i = 2, \dots, \frac{n+1}{2} \\ 2n + 3 - 2i & \text{si } i = \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n \end{cases}$$

La función de reetiquetado, como su nombre lo indica, reetiqueta los puntos de  $C_I$  y de  $C_E$ , asignándole nuevas etiquetas. Este nuevo etiquetado nos permitirá construir el thrackle fácilmente. Un ejemplo del uso de la función de reetiquetado para  $n = 7$  se puede ver en la Tabla 4.1.

| $i$ | $f_7^{impar}(i)$ |
|-----|------------------|
| 1   | 1                |
| 2   | 6                |
| 3   | 4                |
| 4   | 2                |
| 5   | 7                |
| 6   | 5                |
| 7   | 3                |

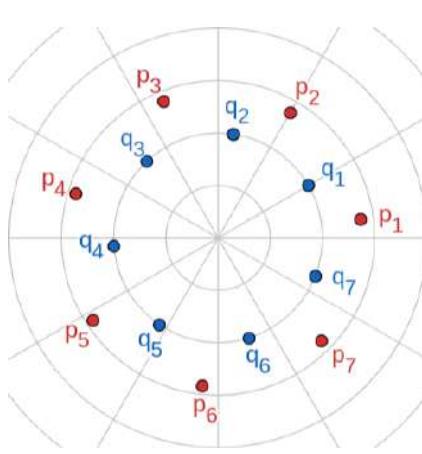
Tabla 4.1: Función de reetiquetado para  $n = 7$ .

Usando la función de reetiquetado en cada punto de  $C_E$  y de  $C_I$ , obtenemos dos nuevos conjuntos  $f(C_E)$  y  $f(C_I)$  de puntos reetiquetados, definidos de la siguiente manera:

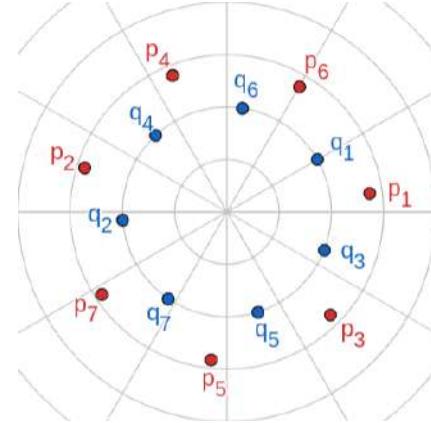
$$f(C_E) = \left\{ q_i \mid \forall p_i \in C_E \left( q_i = p_{f(i)} \right) \right\}$$

$$f(C_I) = \left\{ q_i \mid \forall p'_i \in C_I \left( q_i = p'_{f(i)} \right) \right\}.$$

Un ejemplo del reetiquetado de puntos para  $n = 5$  se puede ver en la Figura 4.7



(a) Conjuntos de puntos del círculo exterior  $C_E = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$  y del círculo interior  $C_I = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$ .



(b) Conjuntos de puntos reetiquetados del círculo exterior  $f(C_E) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$  y del círculo interior  $f(C_I) = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$ .

Figura 4.3: Reetiquetado de puntos de  $C_E$  y  $C_I$  para el caso en que  $n = 7$ .

Una vez que tenemos reetiquetados los puntos, para formar el ciclo de tamaño impar tomamos los puntos de  $f(C_I)$  en el orden dado por sus etiquetas es decir, el conjunto de aristas del ciclo,  $E_C$ , es el siguiente:

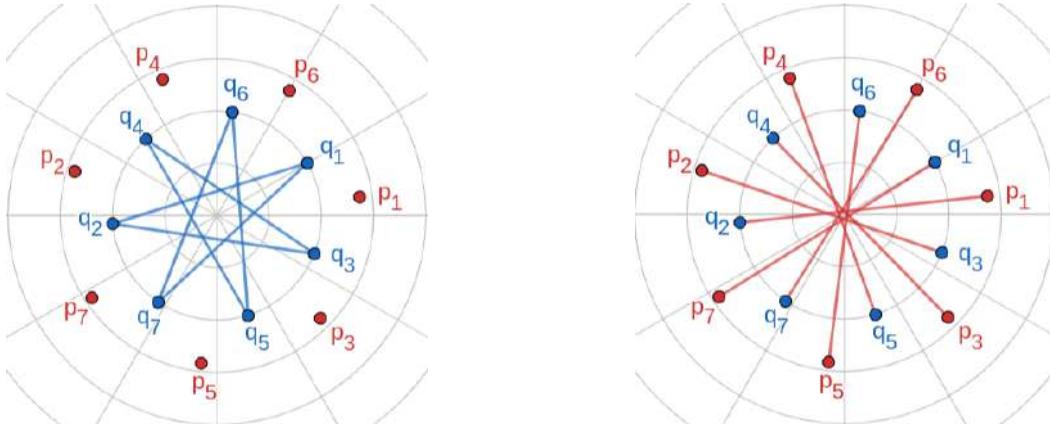
$$E_C = \left\{ (q_i, q_j) \mid \forall i, j \in [1, n] \left( q_i \in f(C_I) \wedge j = i + 1 \bmod n \right) \right\}.$$

Siguiendo el ejemplo para el caso en que  $n = 7$ , el conjunto de aristas  $E_C$  se puede ver en la Figura 4.4a.

Para construir el thrackle máximo formamos las  $n$  aristas restantes uniendo los puntos de  $C_E$  a puntos específicos de  $C_I$ , formando un conjunto de aristas unidas al ciclo,  $E_U$ , de la siguiente manera:

$$E_U = \left\{ (p_i, q_j) \mid \forall i, j \in [1, n] \left( p_i \in f(C_E) \wedge q_j \in f(C_I) \wedge j = i + 1 \bmod n \right) \right\}.$$

Para el ejemplo en que  $n = 7$ , el conjunto de aristas  $E_U$  se puede ver en la Figura 4.4b.



(a) Conjuntos de aristas del ciclo  $E_C = \{(q_1, q_2), (q_2, q_3), (q_3, q_4), (q_4, q_5), (q_5, q_6), (q_6, q_7), (q_7, q_1)\}$ .

(b) Conjuntos de aristas unidas al ciclo  $E_U = \{(p_1, q_2), (p_2, q_3), (p_3, q_4), (p_4, q_5), (p_5, q_6), (p_6, q_7), (p_7, q_1)\}$ .

Figura 4.4: Conjuntos de aristas  $E_C$  y  $E_U$  para el caso en que  $n = 7$ .

Dados los conjuntos de aristas  $E_C$  y  $E_U$ , el thrackle máximo estará dado por la unión de estos conjuntos. Primero demostraremos que las aristas del conjunto  $E_C$  forman un thrackle y luego demostraremos que cada arista de  $E_U$  es parte de ese mismo thrackle.

Para demostrar que las aristas de  $E_C$  forman un thrackle, basta con notar que cumple las condiciones del Problema 1, es decir el problema de Hopf y Pannwit, esto sucede ya que tenemos una cantidad impar de puntos en posición convexa:

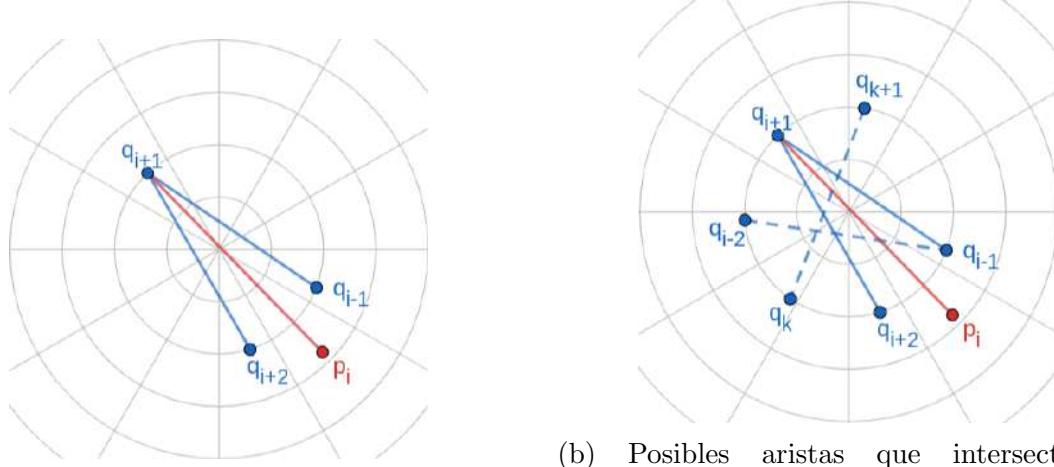
- $d(q_i, q_j) \leq 1$  ( $0 < j < j \leq n$ ).
- $d(q_i, q_{i+1}) = 1 \forall i \in [1, n]$ .

Recordemos que en la discusión del Teorema 1 llegamos a la conclusión de que las aristas de la gráfica con estas condiciones de distancia o bien comparten un vértice o bien se cruzan, dicho de otra forma no hay dos aristas disjuntas, además las aristas de la gráfica de diámetros son segmentos de recta, por lo tanto se trata de un thrackle geométrico, por lo que utilizando el Teorema 2 concluimos que es un thrackle máximo.

Para la segunda parte vamos a analizar primero una arista de  $E_U$ . Sea  $(p, q)$  una arista de  $E_U$ , tenemos que  $(p, q)$  es también una arista de  $E_C \cup E_U$ , sea  $i$  el índice que le corresponde a la arista de tal forma que  $p = p_i$  y  $q = q_{i+1}$ . Sabemos que  $(p, q)$  es un arista adyacente a las aristas  $(q_{i-1}, q_{i+1})$  y  $(q_{i+1}, q_{i+2})$  de  $E_C$  como se ve en la Figura 4.5a.

Como las aristas  $(q_{i-1}, q_{i+1})$  y  $(q_{i+1}, q_{i+2})$  de  $E_C$  pertenecen a un thrackle, cualquier otra arista de  $E_C$  o es adyacente a una de ellas y cruza a la otra, o cruza a ambas,

como se ve en la Figura 4.5b. Como la arista  $(p_i, q_{i+1}) \in E_U$  se encuentra en la zona delimitada por sus aristas adyacentes cualquier otra arista de  $E_C$  cruzará a  $(p_i, q_{i+1})$ .



(a) Arista  $(p_i, q_{i+1}) \in E_U$  la cual es adyacente a las aristas  $(q_{i-1}, q_{i+1})$  y  $(q_{i+1}, q_{i+2})$  de  $E_C$ .

(b) Posibles aristas que intersectan a  $(q_{i-1}, q_{i+1})$  y  $(q_{i+1}, q_{i+2})$  en línea punteda necesariamente intersectan a  $(p_i, q_{i+1})$ .

Figura 4.5: Análisis de intersección de  $E_U$  con  $E_C$ .

Por lo tanto, la arista  $(p_i, q_{i+1}) \in E_U$  pertenece al thrackle formado por las aristas de  $E_C$ . Por lo que las aristas del conjunto  $E_C \cup E_U$  forman un thrackle máximo de tamaño  $2n$ , un ejemplo para el caso en que  $n = 7$  se puede ver en la Figura 4.6.

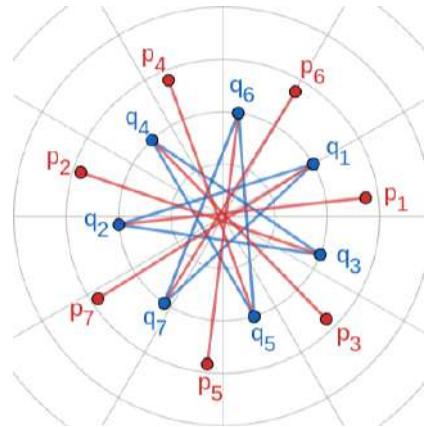


Figura 4.6: Thrackle máximo formado por los puntos del doble círculo para en caso en que  $n = 7$ .

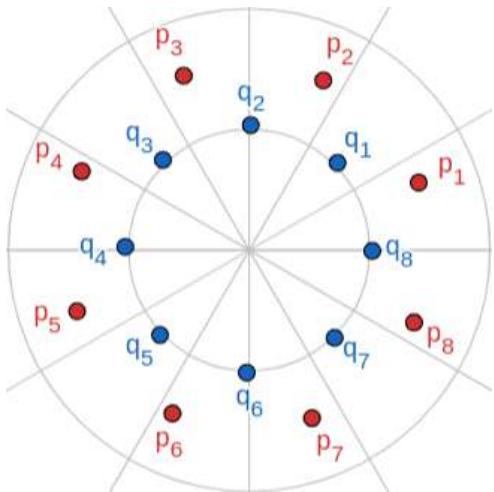
- Caso  $n$  par.

Para este caso, como  $n$  es un número par la idea es separar un punto para regresar

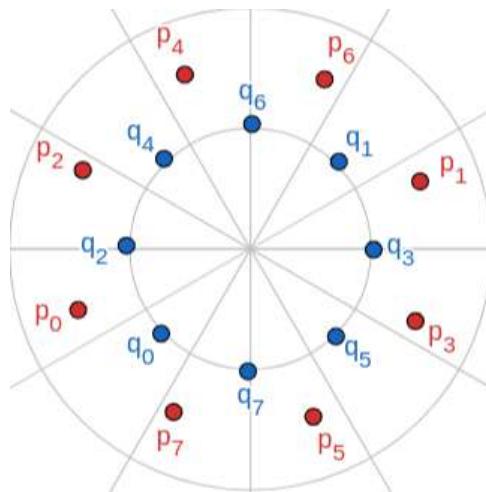
al caso impar el cual ya sabemos que forma un thrackle máximo. Para este caso definimos la función de reetiquetado  $f_n^{par} : [1, n] \mapsto [1, n]$  como sigue:

$$f_n^{par}(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ n + 2 - 2i & \text{si } i = 2, \dots, \frac{n}{2} \\ 0 & \text{si } i = \frac{n}{2} + 1 \\ 2n + 3 - 2i & \text{si } i = \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n \end{cases}$$

Un ejemplo del reetiquetado de puntos para  $n = 5$  se puede ver en la Figura 4.7



(a) Conjuntos de puntos del círculo exterior  $C_E = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8\}$  y del círculo interior  $C_I = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$ .



(b) Conjuntos de puntos reetiquetados del círculo exterior  $f(C_E) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8\}$  y del círculo interior  $f(C_I) = \{q_0, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$ .

Figura 4.7: Reetiquetado de puntos de  $C_E$  y  $C_I$  para el caso en que  $n = 8$ .

Podemos observar que si restringimos ambas funciones de reetiquetado al mismo dominio, estas coinciden, salvo por un punto. En particular como queremos quitar un punto para regresar al caso impar tenemos que analizar las funciones  $f_n^{impar}$  y  $f_{n+1}^{par}$ , en la Figura 4.8 están comparadas.

$$f_n^{impar}(i) = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ n + 3 - 2i & i \in [2, \frac{n+1}{2}] \\ 2n + 3 - 2i & i \in [\frac{n+1}{2} + 1, n] \end{cases} \quad f_{n+1}^{par}(i) = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ n + 3 - 2i & i \in [2, \frac{n+1}{2}] \\ 0 & i = \frac{n+1}{2} + 1 \\ 2n + 4 - 2i & i \in [\frac{n+2}{2} + 1, n+1] \end{cases}$$

Figura 4.8: Funciones de reetiquetado consecutivas correspondientes a  $n$  impar y a  $n+1$  par.

Un ejemplo del uso de la función de reetiquetado para  $n = 7$  y  $n = 8$  se puede ver en la Tabla 4.1.

| $i$ | $f_7^{impar}(i)$ |
|-----|------------------|
| 1   | 1                |
| 2   | 6                |
| 3   | 4                |
| 4   | 2                |
| 5   | 7                |
| 6   | 5                |
| 7   | 3                |

| $i$ | $f_8^{par}(i)$ |
|-----|----------------|
| 1   | 1              |
| 2   | 6              |
| 3   | 4              |
| 4   | 2              |
| 5   | 0              |
| 6   | 7              |
| 7   | 5              |
| 8   | 3              |

Tabla 4.2: Comparaciones de las funciones de reetiquetado  $f_7^{impar}$  y  $f_8^{par}$

Notemos que mientras  $i$  se encuentra en el rango de  $[1, \frac{n+1}{2}]$  las funciones comparten dominio y regla de correspondencia, esto es:

$$f_n^{impar}(i) = f_{n+1}^{par}(i) \quad \forall i \in \left\{1, \dots, \frac{n+1}{2}\right\}. \quad (4.1)$$

Dejando de lado el punto a descartar de la función par, vemos que el dominio está desplazado en una unidad ya que  $i \in [\frac{n+2}{2} + 1, n+1]$ , por lo que tomando una transformación lineal de  $i' = i + 1$  podemos desplazar el dominio a  $[\frac{n+1}{2} + 1, n]$ , teniendo así la siguiente expresión :

$$f_{n+1}^{par}(i') = f_{n+1}^{par}(i+1) = 2(n+1) + 3 - 2(i+1) = 2n + 3 - 2i.$$

Por lo tanto, descartando ese punto y con la función de reetiquetado par, se tiene que mapea los puntos y etiquetas de manera similar a la función de reetiquetado

impar, esto es:

$$f_n^{impar}(i) = f_{n+1}^{par}(i+1) \quad \forall i \in \left\{ \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n \right\}. \quad (4.2)$$

De las Ecuaciones 4.1 y 4.2 tenemos que si dejamos de lado un punto en  $C_I$  y uno en  $C_E$ , recuperamos la información que ya demostramos de la función impar, por lo que los conjuntos de puntos reetiquetados  $f(C_I) \setminus \{q_0\}$  y  $f(C_E) \setminus \{p_0\}$  en los que se omite un punto, inducen el conjunto de aristas del ciclo  $E_C$  y el conjunto de aristas unidas al ciclo  $E_U$  de la siguiente manera:

$$E_C = \left\{ (q_i, q_j) \mid \forall i, j \in [1, n] ( q_i \in f(C_I) \setminus \{q_0\} \wedge j = i + 1 \bmod n ) \right\}.$$

$$E_U = \left\{ (p_i, q_j) \mid \forall i, j \in [1, n] ( p_i \in f(C_E) \setminus \{p_0\} \wedge q_j \in f(C_I) \setminus \{q_0\} \wedge j = i + 1 \bmod n ) \right\}.$$

Estos conjuntos son idénticos a los obtenidos en el caso de  $n$  impar, por lo que podemos afirmar que la unión de estos dos conjuntos forman un thrackle de tamaño  $2(n-1)$  en el doble círculo con  $2n$  puntos y  $n$  par. Un ejemplo para  $n=8$  se puede ver en la Figura 4.9.

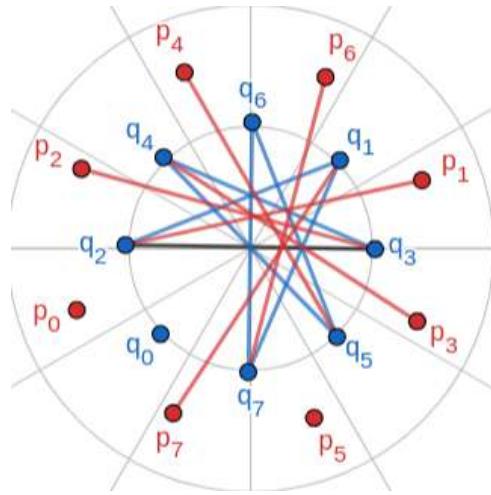


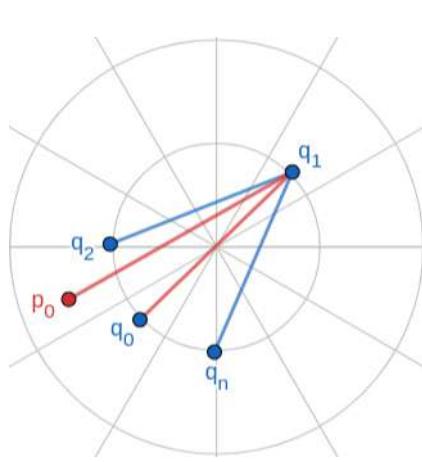
Figura 4.9: Thrackle formado por la unión de los conjuntos  $f(C_I) \setminus \{q_0\}$  y  $f(C_E) \setminus \{p_0\}$ .

Para demostrar que existe un thrackle máximo en el conjunto de  $2n+1$  puntos basta con unir los puntos  $p_0$  y  $q_0$  omitidos de tal forma que las aristas formadas intersecten a todas las aristas del thrackle. El punto elegido será el punto  $q_1$ , formando así las aristas  $(q_0, q_1)$  y  $(p_0, q_1)$ .

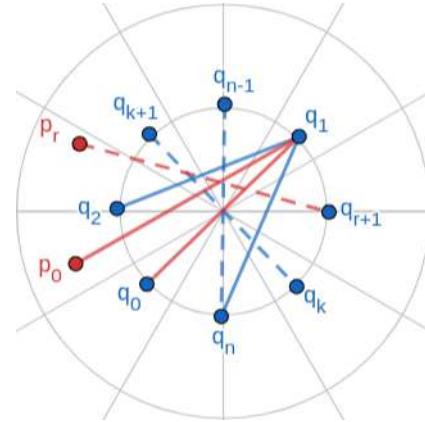
El razonamiento es el mismo que en el caso impar. Sabemos que  $(q_0, q_1)$  y  $(p_0, q_1)$  son aristas adyacentes a las aristas  $(q_n, q_1)$  y  $(q_1, q_2)$  de  $E_C$  como se ve en la Figura

4.10a.

Como las aristas  $(q_n, q_1)$  y  $(q_1, q_2)$  de  $E_C$  pertenecen a un thrackle, cualquier otra arista de  $E_C$  o es adyacente a una de ellas y cruza a la otra o cruza a ambas como se ve en la Figura 4.10b. Como las aristas  $(q_0, q_1)$  y  $(p_0, q_1)$  se encuentran en la zona delimitada por  $(q_n, q_1)$  y  $(q_1, q_2)$  cualquier otra arista de  $E_C$  cruzará necesariamente  $(q_0, q_1)$  y  $(p_0, q_1)$ . Por lo tanto, las aristas  $(q_0, q_1)$  y  $(p_0, q_1)$  de  $E_U$  pertenece al thrackle formado por las aristas de  $E_C$ .



(a) Aristas  $(q_0, q_1)$  y  $(p_0, q_1)$  de  $E_U$  la cual es adyacente a las aristas  $(q_n, q_1)$  y  $(q_1, q_2)$  de  $E_C$ .



(b) Posibles aristas que intersectan a  $(q_n, q_1)$  y  $(q_1, q_2)$  en línea punteda necesariamente intersectan a las aristas  $(q_0, q_1)$  y  $(p_0, q_1)$ .

Figura 4.10: Análisis de intersección de  $E_U$  con  $E_C$ .

Por lo tanto no importa si  $n$  es par o impar siempre va a extir un thrackle máximo para el doble círculo de tamaño  $2n$ .  $\square$

En la siguiente sección daremos los resultados obtenidos para la doble cadena convexa.

## 4.2. Doble cadena convexa

En el capítulo anterior dimos la definición de doble cadena convexa, para facilitar la lectura del texto recordemos esta definición.

**Definición 15.** Para  $k \leq l$  se define una  $(k,l)$ -doble cadena convexa como la unión disjunta de dos conjuntos de puntos  $U$  y  $L$  tales que:

1.  $U$  es un conjunto de  $k$  puntos en posición convexa, cuya cubierta convexa está delimitada por arriba por una arista y  $L$  es un conjunto de  $l$  puntos en posición convexa, cuya cubierta convexa está delimitada por abajo por una arista.

2. Cada punto de  $L$  está por debajo de cada línea recta determinada por dos puntos de  $U$ .
3. Cada punto de  $U$  está por encima de cada línea recta determinada por dos puntos de  $L$ .

Decimos que  $U$  y  $L$  son la cadena superior y la cadena inferior respectivamente de una  $(k, l)$ -doble cadena. Denotamos por  $C_{k,l}$  a cualquier  $(k, l)$ -doble cadena, en la Figura 4.11 se muestra una  $(5, 7)$ -doble cadena.

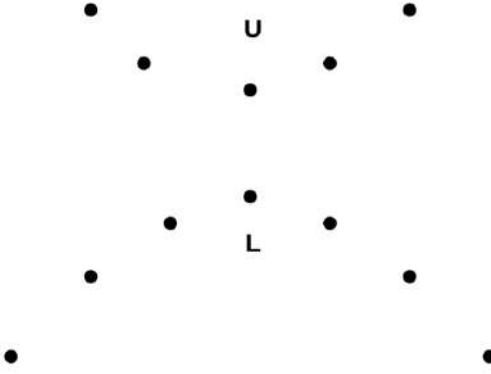


Figura 4.11: Ejemplo de doble cadena  $C_{5,7}$ .

De la definición de doble cadena se siguen las siguientes observaciones.

**Observación 1.** *Cualquier segmento de recta que une a dos puntos de  $U$  (respectivamente para  $L$ ) no intersecta a ningún otro segmento de recta que une a dos puntos de  $L$  (respectivamente para  $U$ ).*

**Observación 2.** *Sea  $g$  un segmento de recta delimitado por un punto en cada cadena y sea  $f$  un segmento de recta que une a dos puntos de la misma cadena.  $f$  y  $g$  se intersectan si y sólo si  $f$  y  $g$  inciden en el mismo punto.*

**Observación 3.** *Toda recta que pasa por cualesquiera dos puntos consecutivos de una misma cadena deja del mismo lado del semiplano al resto de puntos de la cadena.*

Para este conjunto utilizamos puntos que generamos así como conjuntos de puntos de la base de datos [32]. Para cada caso se hicieron mil pruebas para cada valor de  $n$  entre 1 y 1000. En la Figura 4.12 se pueden ver los resultados para  $n = 3, 4, 5$ .

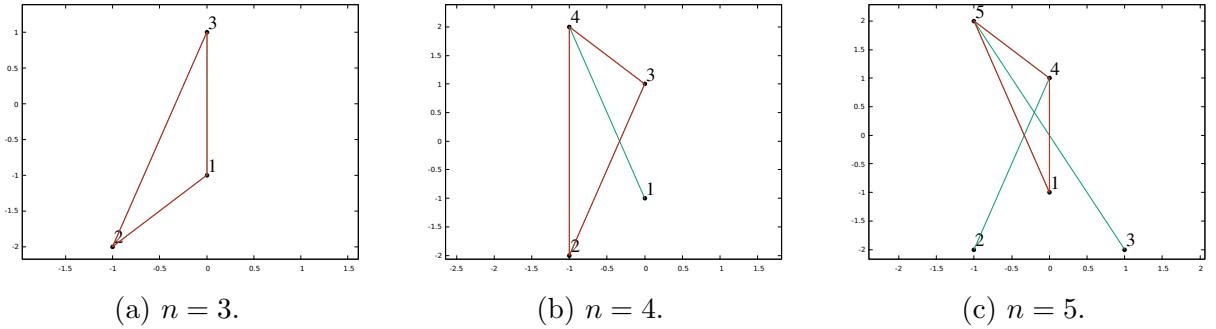


Figura 4.12: Doble cadena convexa para  $n = 3, 4, 5$  para las cuales se encontraron thrackles máximos.

Para  $n > 3$  encontramos que no existen thrackles máximos, sin embargo tanto en los puntos que generamos como en los conjuntos de puntos de la base de datos, puesto que cada cadena tiene la misma cantidad de puntos o estas difieren a lo más por un punto, optamos por modificar la cantidad de puntos en cada cadena. Observamos que si borramos puntos de la cadena superior hasta sólamente dejar dos puntos, siempre hay thrackles máximos, un ejemplo de esto se puede ver en la Figura 4.13 para  $n = 10$  y  $n = 32$ .

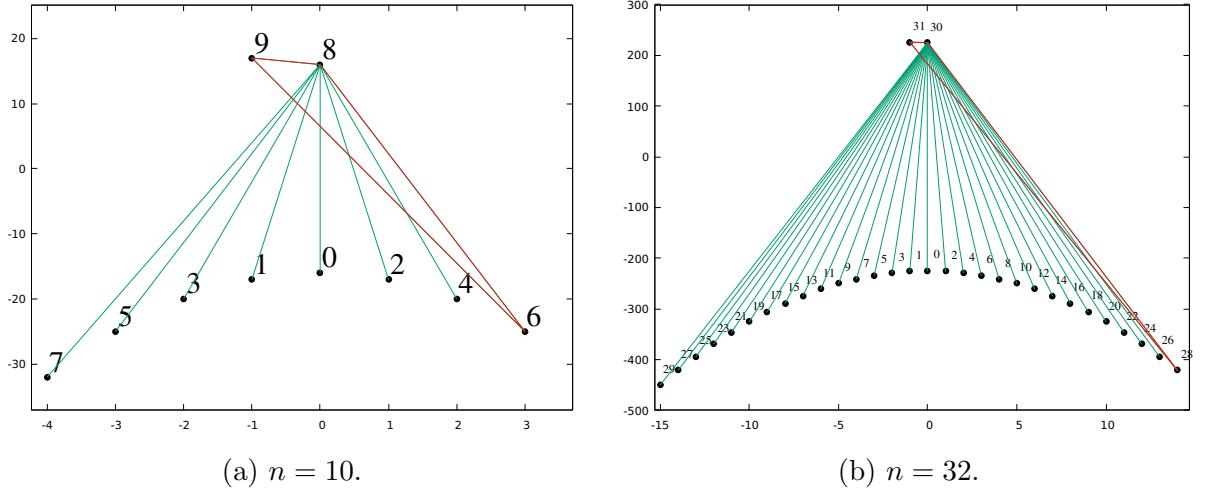


Figura 4.13: Thrackles máximos en la doble cadena al borrar puntos de la cadena superior.

Además en todos los casos se observa que el ciclo del thrackle es de tamaño tres. Por lo que podemos darnos una idea de la forma que tienen en general los thrackles máximos, para conocer su forma exacta a continuación vamos a buscarla teóricamente.

Dada una  $(k, l)$ -doble cadena, deseamos estudiar bajo qué condiciones existen thrackles máximos, es decir thrackles de tamaño  $k + l$ . Sabemos por el teorema de Woodall que

para encontrar el thrackle máximo se debe tener a lo más un ciclo de tamaño impar, por lo que analizaremos la disposición y el tamaño de los ciclos que pueden existir dentro del conjunto.

Existen dos formas de construir ciclos sobre la doble cadena, la primera es que el ciclo quede completamente contenido en una cadena y la segunda es que el ciclo contenga puntos tanto de la cadena  $U$  como de la cadena  $L$ . A continuación damos una proposición para analizar estos casos.

**Proposición 2.** *Para toda  $(k, l)$ -doble cadena, con  $3 \leq k \leq l$ , se tiene que ningún thrackle máximo puede tener su ciclo completamente contenido en una sola cadena.*

*Demostración.* Sea  $C_{k,l}$  una  $(k, l)$ -doble cadena con un thrackle máximo  $T$ , llamemos  $C_T^m$  al ciclo de  $T$  y denotemos por  $m$  a su longitud. Supongamos que  $C_T^m \subseteq U$  y vamos a demostrar que esto conduce a una contradicción.

Como  $T$  es un thrackle debe cumplir las condiciones del Teorema de Woodall, es decir  $C_T^m$  debe ser un  $m$ -grama. Por la Observación 2, sabemos que ninguna arista que esté formada únicamente por vértices de  $L$  puede pertenecer al thrackle. Por la Observación 3, cualquier arista formada por un punto en  $U$  y otro punto en  $L$ , puede tener un vértice en común con el ciclo, por lo que estas aristas no pueden formar parte de  $T$ .

De lo anterior se tiene que  $T$  puede estar formado únicamente por aristas de  $U$ , por lo que  $T$  es máximo de tamaño  $k$ , pero como  $T$  es un Thrackle máximo es de tamaño  $k + l$ , por lo que se tiene una contradicción. De manera análoga cuando  $C_T^m \subseteq L$ .  $\square$

De esta proposición de siguen los siguientes dos corolarios.

**Corolario 1.** *Para toda  $(k, l)$ -doble cadena, con  $3 \leq k \leq l$ , se tiene que ningún thrackle máximo cuyo ciclo sea de tamaño tres puede tener su ciclo completamente contenido en una sola cadena.*

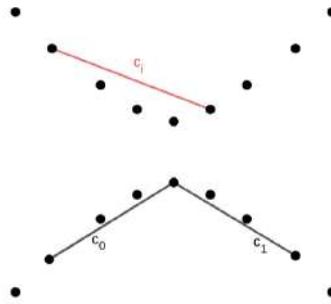
*Demostración.* Este es un caso particular de la Proposición 1.  $\square$

**Proposición 3.** *Para toda  $(k, l)$ -doble cadena, con  $3 \leq k \leq l$ , se tiene que ningún thrackle máximo puede tener dos aristas adyacentes de su ciclo en la misma cadena.*

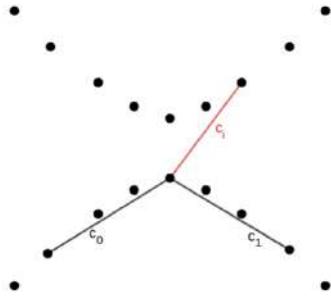
*Demostración.* Sea  $C_{k,l}$  una  $(k, l)$ -doble cadena con un thrackle máximo  $T$ , llamemos  $C_T^m$  al ciclo de  $T$  y denotemos por  $m$  a su longitud. Supongamos que existen  $c_0$  y  $c_1$  dos aristas adyacentes en  $C_T^m$  en la misma cadena y vamos a demostrar que esto conduce a una contradicción.

Sea  $c_i$  una arista en  $C_T^m$  diferente a  $c_0$  y a  $c_1$ . Como  $T$  es thrackle se tiene que  $c_i$  debe intersectar tanto a  $c_0$  como a  $c_1$ , por lo que basta con analizar los siguientes tres casos:

1.  $c_i$  está contenido en la cadena opuesta que contiene a  $c_0$  y  $c_1$ . En este caso por la Observación 2 se tiene que  $c_i$  no intersecta a  $c_0$  ni a  $c_1$ . Por lo tanto este caso lleva a una contradicción.



2.  $c_i$  tiene un vértice en  $U$  y otro en  $L$ . En este caso por la observación 3 se tiene que  $c_i$  es adyacente tanto a  $c_0$  como a  $c_1$ , por lo que hay un vértice en el ciclo que es de grado tres, lo cual no es posible por la definición de ciclo. Por lo tanto este caso lleva a una contradicción.



3.  $c_i$  está contenida en la cadena que contiene a  $c_0$  y  $c_1$ . En este caso para que  $c_i$  intersecte tanto a  $c_0$  como a  $c_1$  una opción es que formen un ciclo de tamaño tres como se ve en la ilustración de la izquierda, sin embargo esto no es posible por el Corolario 1. Otra opción es que  $c_i$  cruce a las aristas como se ve en la ilustración de la derecha, en este caso deben de existir caminos entre los vértices de  $c_i$  y los de  $c_0$  y  $c_1$ , estos caminos deben de intersectar a todas las aristas del ciclo, por lo que el ciclo completo debe de estar contenido en la misma cadena lo cual es una contradicción con la Proposición 2.



Por lo tanto cualquier otra arista del ciclo distinta a  $c_0$  y a  $c_1$  no puede intersectar a ambas aristas, por lo que no puede formar un thrackle.  $\square$

Por las proposiciones anteriores, sabemos que si una  $(k, l)$ -doble cadena tiene un thrackle máximo entonces el ciclo del thrackle desde estar compuesto por aristas que alternan entre vértices de  $U$  y de  $L$ . Ahora deseamos caracterizar a estos ciclos.

**Proposición 4.** *Para toda  $(k, l)$ -doble cadena, con  $k \leq l$ , se tiene que ningún thrackle máximo puede tener un ciclo de tamaño mayor a 3.*

*Demostración.* Sea  $C_{k,l}$  una  $(k, l)$ -doble cadena con un thrackle máximo  $T$ , llamemos  $C_T^m$  al ciclo de  $T$  y denotemos como  $m$  a su longitud. Supongamos que  $m > 3$  y vamos a demostrar que esto conduce a una contradicción.

Como  $C_T^m$  pertenece a un thrackle, sabemos por el Teorema de Woodall que  $m$  debe ser un número impar y que  $C_T^m$  debe formar un  $m$ -grama, además por la Proposición 3 se tiene que  $C_T^m$  debe estar formado por aristas que tienen un vértice en  $U$  y otro en  $L$ . Llamemos  $\{u_i\}_{1 \leq i \leq k}$  a los vértices de  $U$  y llamemos  $\{v_j\}_{1 \leq j \leq l}$  a los vértices de  $L$ .

Como  $C_T^m$  es un ciclo se tiene que al recorrer sus aristas se comienza y termina en el mismo vértice, es decir en la misma cadena. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $C_T^m$  comienza en la cadena  $L$ , sea  $v_1$  el vértice de  $L$  donde comienza el ciclo y sea  $u_1$  el vértice de  $U$  para formar la primer arista como se ve en la Figura 4.15.

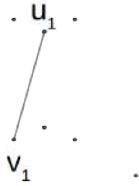


Figura 4.15

Para formar la segunda arista se toma  $v_2 \in L$  el cual puede estar a la izquierda o a la derecha del segmento orientado  $v_1u_1$ , supongamos sin pérdida de generalidad que está a la derecha como se ve en la Figura 4.16.



Figura 4.16

Para que la tercer arista intersecte a la arista  $(v_1, u_1)$ , el vértice  $u_2$  necesariamente debe encontrarse a la izquierda de  $u_1$  como se ve en la Figura 4.17.



Figura 4.17

Análogamente el siguiente vértice  $v_3$  debe estar a la derecha de  $v_2$  como se ve en la Figura 4.18.

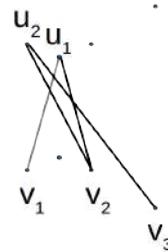


Figura 4.18

De lo anterior podemos notar que cualquier cantidad impar de aristas terminan en la cadena  $U$ . Esto quiere decir que al recorrer las aristas del ciclo se empieza y termina en

distintas cadenas, lo cual es una contradicción, en la Figura 4.19 se puede ver un ejemplo con  $m = 5$ .

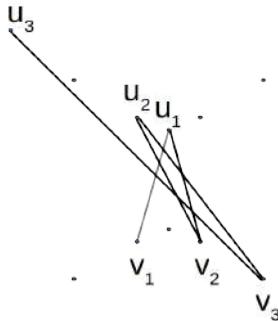


Figura 4.19

Para el caso del ciclo de tamaño tres, basta con unir el vértice  $v_2$  con  $v_1$ , los cuales se encuentran en la misma cadena  $L$ . Con lo cual concluye la demostración  $\square$

La Proposición 4, nos indica que el ciclo de cualquier thrackle máximo de cualquier  $(k, l)$ -doble cadena debe ser de tamaño 3. Ahora que conocemos el tamaño del ciclo y por cuáles aristas debe estar conformado deseamos conocer una forma de construir los thrackles que contienen a estos ciclos, para ello vamos a demostrar que estos thrackles deben tener ciclos que deben de estar vacíos.

**Observación 4.** *Para un conjunto de cuatro vértices con un thrackle máximo que tiene un ciclo de tamaño tres, se tiene que el ciclo no puede encerrar a un vértice.*

De esta observación se sigue la siguiente:

**Observación 5.** *Para un conjunto de  $n$  vértices con un thrackle máximo que tiene un ciclo de tamaño tres, se tiene que el ciclo del thrackle no puede encerrar a ningún vértice.*

Por la Observación 3 tenemos que para construir triangulos vacíos, es necesario que los dos puntos situados en la misma cadena sean adyacentes.

Con la teoría construida hemos caracterizados a los thrackles máximos que pueden existir sobre la doble cadena, se tiene que su ciclo debe ser de tamaño tres: compuesto por dos vértices adyacentes en una cadena y otro vértice en la otra cadena. Sin embargo aún falta revisar las condiciones que debe cumplir la doble cadena para que existan los thrackles máximos.

Para facilitar la argumentación dividiremos las posibles aristas de cualquier thrackle máximo en tres conjuntos:

- $A_U$  es el conjunto de aristas formadas únicamente por vértices de  $U$  que no pueden estar en ningún thrackle máximo de tamaño  $k + l$ .

- $A_L$  es el conjunto de aristas formadas únicamente por vértices de  $L$  que no pueden estar en ningún thrackle máximo de tamaño  $k+l$ .
- $A_{U,L}$  es el conjunto de aristas formadas por un vértice de  $U$  y otro de  $L$  que no pueden estar en ningún thrackle máximo de tamaño  $k+l$ .

Analizamos el primer caso. Sea  $C_{k,l}$  una doble cadena convexa. Denotemos por  $X$  a alguna cadena de  $C_{k,l}$  y por  $Y$  a la otra cadena. Tomemos  $x_1, x_2 \in X$  y  $y \in Y$  como los tres vértices del ciclo.

Para la cadena  $X$ , sea  $x \in X$  una arista diferente de  $x_1$  y  $x_2$ . Se cumple lo siguiente:

- La arista  $(x_1, y)$  no intersecta a la arista  $(x_2, x)$ .
- La arista  $(x_2, y)$  no intersecta a la arista  $(x_1, x)$ .

De lo anterior se tiene que sólamente la arista  $(x_1, x_2) \in X$  que pertenece al ciclo, puede estar en el thrackle, por lo que  $|A_X| = \binom{|X|}{2} - 1$ .

Para la cadena  $Y$  se tiene que ninguna arista formada por dos vértices en  $Y$  intersecta a la arista  $(x_1, x_2)$ , por lo que  $|A_Y| = \binom{|Y|}{2}$ .

Para las aristas que cruzan entre cadenas se cumple lo siguiente:

- Las aristas que salen de  $x_1$  deben cruzar a la arista  $(x_2, y)$ .
- Las aristas que salen de  $x_2$  deben cruzar a la arista  $(x_1, y)$ .

Lo anterior se puede observar en la Figura 4.20. De las observaciones anteriores se sigue que en cualquier thrackle máximo habrá tantas aristas que cruzan como vértices en  $Y \setminus \{y\}$  más las dos aristas que pertenecen al ciclo, esto es  $|Y| - 1 + 2$ . Por lo tanto  $|A_{X,Y}| = |Y| \times |X| - (|Y| + 1)$ .

Sea  $nt$  el número total de aristas que no están en el thrackle, tenemos que

$$nt = \binom{|X|}{2} - 1 + \binom{|Y|}{2} + |Y| \times |X| - (|Y| + 1). \quad (4.3)$$

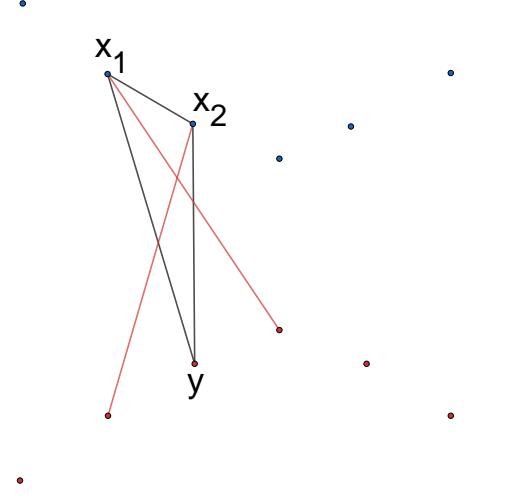


Figura 4.20: Ejemplo de aristas que cruzan.

Claramente el valor exacto de este número dependerá de la elección de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $y$ . Analicemos primero el caso en el que los dos puntos,  $x_1$  y  $x_2$ , están en la cadena más grande, esto es  $X = L$ , entonces  $|X| = l$  y  $|Y| = k$ . La Ecuación 4.3 en este caso queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 nt &= \binom{l}{2} + \binom{k}{2} + kl - k - 2 \\
 &= \frac{l(l-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} + kl - k - 2 \\
 &= \frac{l(l-1) + k(k-1) + 2kl}{2} - k - 2 \\
 &= \frac{l^2 - l + k^2 - k + 2kl}{2} - k - 2 \\
 &= \frac{k^2 + kl - k + lk + l^2 - l}{2} - k - 2 \\
 &= \frac{k(k+l-1) + l(k+l-1)}{2} - k - 2 \\
 &= \frac{(k+1)(k+l-1)}{2} - k - 2 \\
 &= \binom{k+l}{2} - k - 2. \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

Por otro lado, el número total de aristas que se pueden formar con  $k + l$  puntos es  $\binom{k+l}{2}$ , por lo que si se quiere tener un thrackle de tamaño  $k + l$ , las aristas que no están en

el thrackle no deben ser más de  $\binom{k+l}{2} - (k+l)$ . Lo anterior sucede cuando se cumple la siguiente relación:

$$\begin{aligned} NT &\leq \binom{k+l}{2} - (k+l) \\ \binom{k+l}{2} - k - 2 &\leq \binom{k+l}{2} - (k+l) \\ -2 &\leq -l \\ l &\leq 2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Por lo que el tamaño de la cadena  $L$  está acotado, a lo más puede ser de tamaño dos. Además como  $k \leq l$ , se tiene que sólo hay thrackles máximos para  $C_{1,2}$  y  $C_{2,2}$  cuando se eligen los dos puntos sobre la cadena más grande, estos thrackles se pueden ver en la Figura 4.21.

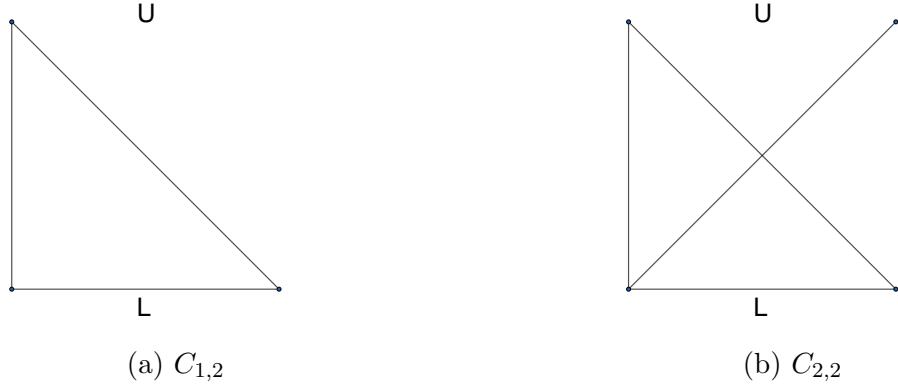


Figura 4.21: Thrackles máximos en doble cadena.

En el caso de elegir los dos puntos sobre la cadena más pequeña, es decir para  $X = U$  y  $Y = L$  la ecuación 4.4 cambia para el término lineal, por lo que queda de la siguiente manera:

$$nt = \binom{k+l}{2} - l - 2. \tag{4.6}$$

Por lo que la relación para la existencia de un thrackle máximo dada por la ecuación 4.5 queda de la siguiente manera:

$$k \leq 2. \tag{4.7}$$

Como estamos determinando esta condición a partir de elegir dos puntos en la cadena más pequeña, se tiene que  $k = 2$  sin limitar el valor de  $l$ , un ejemplo de este thrackle máximo se puede ver en la Figura 4.22.

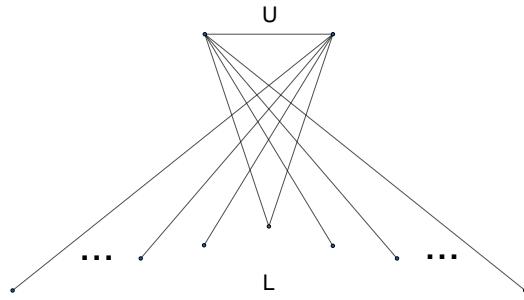


Figura 4.22: Ejemplo de doble cadena  $C_{2,l}$ , con  $2 \leq l$ .

Los resultados obtenidos para la doble cadena convexa se pueden resumir en el siguiente teorema:

**Teorema 10.** *Sea  $C_{k,l}$  una doble cadena convexa.  $C_{k,l}$  admite un thrackle máximo de tamaño  $k + l$  si y sólo si cumple una de las siguientes condiciones:*

- $1 < k \leq l \leq 2$  y el ciclo del thrackle está formado por dos puntos de  $L$  y uno de  $U$ .
- $k = 2$ ,  $1 \leq l$  y el ciclo del thrackle está formado por los dos puntos de  $U$  y uno de  $L$ .

En la siguiente sección analizamos un conjunto de puntos que combina las características de la doble cadena convexa y del doble círculo, a este conjunto se le conoce como *doble cadena zig-zag*.

### 4.3. Doble cadena zig-zag

La *doble cadena zig-zag* (DCZZ) fue introducida en [34] como una variación de la doble cadena convexa, con la propiedad de que en cada cadena los puntos se intercalan a manera de zig-zag similar al doble círculo, una figura esquemática se puede ver en la Figura 4.23.

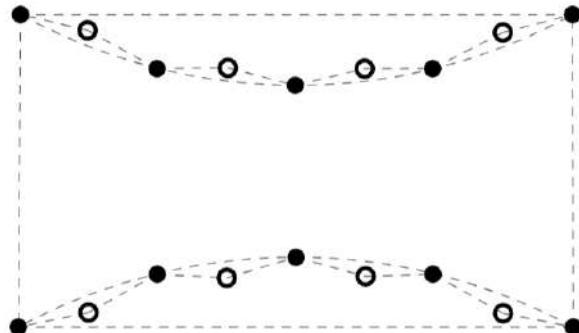


Figura 4.23: Figura esquemática de una doble cadena zig-zag.

Con el fin de conocer para cuales valores de  $n$  existen thrackles máximos y caracterizarlos, realizamos pruebas computacionales en conjuntos de puntos obtenidos de la base de datos [32], primero con el programa pseudoaleatorio para  $n$  desde 1 hasta 10, posteriormente se corroboró con el programa secuencial. En la Figura 4.24 se pueden ver algunos de los thrackles máximos encontrados para  $n = 3, 4, 5, 6$ .

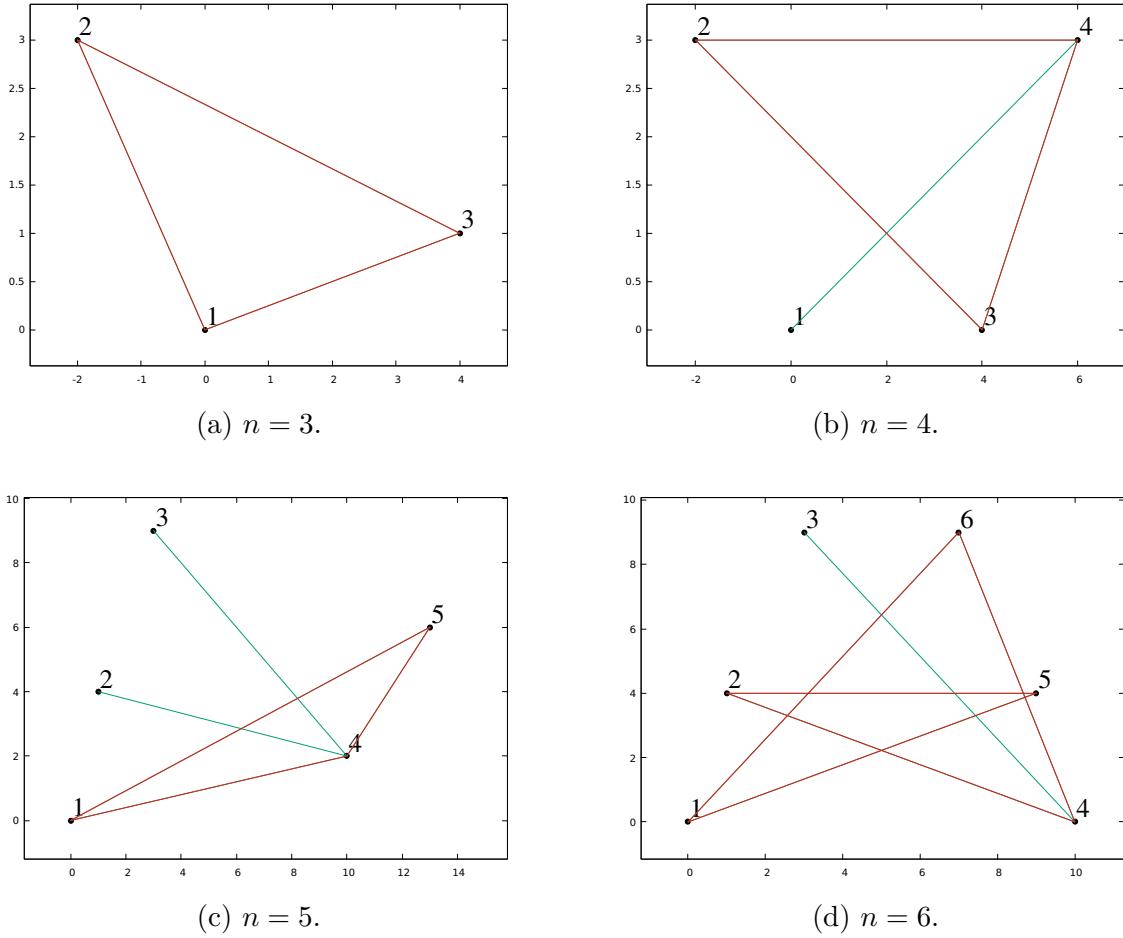
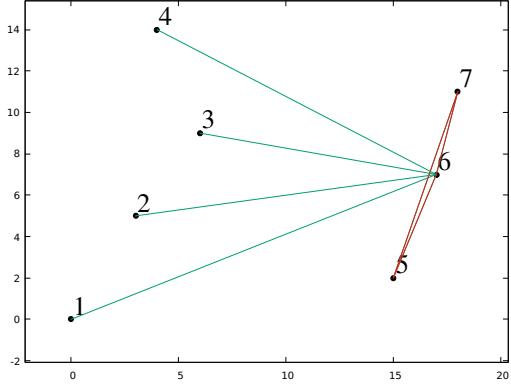


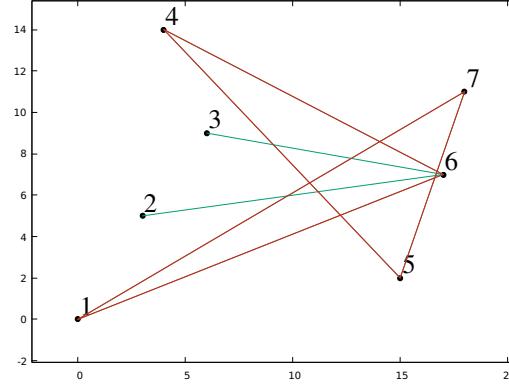
Figura 4.24: DCZZ para  $n = 3, 4, 5, 6$ . Las cadenas se encuentran a la izquierda y derecha para cada figura.

Podemos observar que para formar thrackles máximos en el caso en que  $n = 3$  y  $n = 4$  se tienen las mismas elecciones de aristas que en el caso de la doble cadena convexa. Para el caso en que  $n = 5$  ya aparece la propiedad de zig-zag en la cadena de la izquierda mientras que en la derecha hay dos puntos, por lo que en total hay cinco puntos en posición convexa, el cual ya sabemos que siempre tendrá thrackle máximo. Para el caso en que  $n = 6$  se tiene un caso similar al anterior, un conjunto de seis puntos en posición convexa. En la Figura 4.25 tenemos el caso en que  $n = 7$  para el cual se rompe la convexidad en

la cadena izquierda, siendo este valor de  $n$  el mayor para el cual se encontraron thrackles máximos.



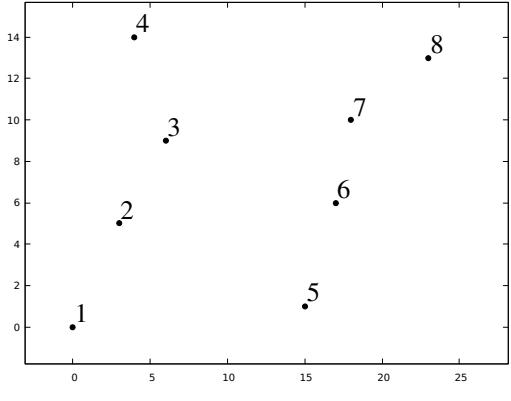
(a) Thrackle máximo para  $n = 7$  con ciclo de tamaño tres.



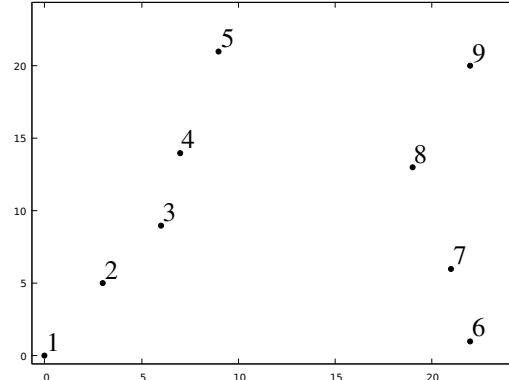
(b) Thrackle máximo para  $n = 7$  con ciclo de tamaño cinco.

Figura 4.25: Thrackles máximos en DCZZ para el caso en que  $n = 7$ .

En la Figura 4.26 podemos ver los conjuntos de puntos para  $n = 8$  y  $n = 9$ , en los cuales no se encontró ningún thrackle máximo. Se realizaron pruebas con el programa de backtracking de manera exhaustiva hasta  $n = 15$  y no encontramos ningún thrackle máximo.



(a)  $n = 8$ .

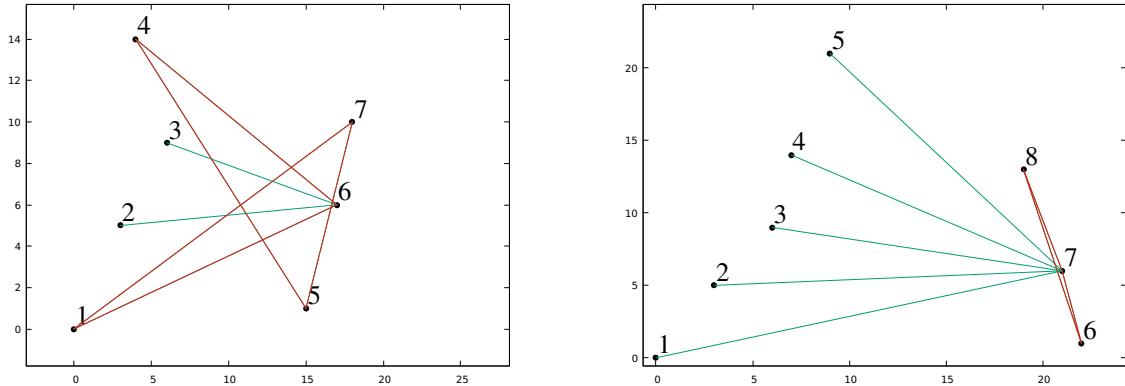


(b)  $n = 9$ .

Figura 4.26: Conjuntos de puntos de la DCZZ para los cuales no se encontraron thrackles máximos.

Analizando los conjuntos mostrados en la Figura 4.26 podemos notar que en ambos casos la cadena derecha tiene un punto que rompe la convexidad de la cadena. En la Figura 4.26a es el punto 8 el que evita que los puntos 5, 6 y 7 estén en posición convexa,

si borramos este punto podemos usar esta cadena para formar un thrackle máximo como se ve en la Figura 4.27a. En la Figura 4.26b es el punto 9 el que evita que los puntos 6, 7 y 8 estén en posición convexa, si borramos este punto podemos usar esta cadena para formar un thrackle máximo como se ve en la Figura 4.27b.



- (a) Conjunto de  $n = 8$  al cual borramos el punto 8 resultando en una DDZZ con  $n = 7$ .  
(b) Conjunto de  $n = 9$  al cual borramos el punto 9 resultando en una DDZZ con  $n = 8$ .

Figura 4.27: Conjuntos de puntos de la DCZZ en los cuales borramos un punto para mantener la convexidad en la cadena derecha y así encontrar thrackles máximos.

Si borramos puntos en una cadena, la DCZZ queda desbalanceada, por lo que de aquí en adelante utilizaremos una notación análoga a la doble cadena, denotando como  $DCZZ(k, l)$  a la doble cadena zig-zag con  $k$  puntos en la cadena derecha y  $l$  puntos en la cadena izquierda, notemos que  $n = k + l$ , con  $k \leq l$ .

Antes de hacer una generalización analicemos otro caso. En la figura 4.29 podemos ver la  $DCZZ(5, 5)$ . Podemos notar que existen dos maneras distintas de formar un conjunto convexo. La primer manera es borrando los puntos 9 y 10, de esta manera el conjunto compuesto por los puntos 6, 7 y 8 forma un conjunto convexo con un thrackle máximo en  $DCZZ(5, 3)$  como se ve en la Figura 4.29a. La segunda manera es borrando los puntos 6 y 7, de esta manera el conjunto compuesto por los puntos 8, 9 y 10 forma un conjunto convexo con un thrackle máximo en  $DCZZ(5, 3)$  como se ve en la Figura 4.29b.

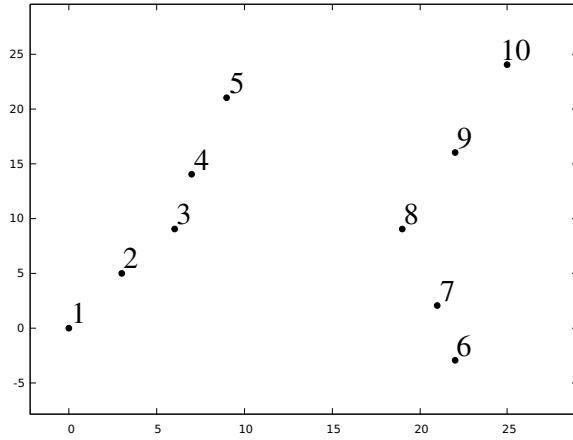
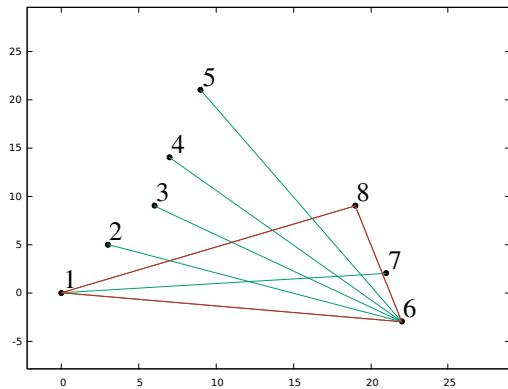
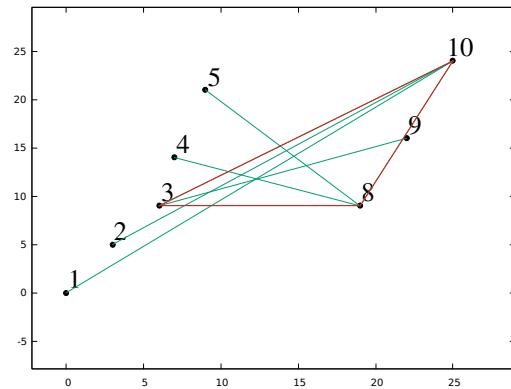


Figura 4.28:  $DCZZ(5,5)$ , no encontramos algún thrackle máximo.



(a)  $DCZZ(5,5)$  a la cual borramos los puntos 9 y 10 resultando en una  $DDZZ(5,3)$ .



(b)  $DCZZ(5,5)$  a la cual borramos los puntos 6 y 7 resultando en una  $DDZZ(5,3)$ .

Figura 4.29:  $DCZZ(5,5)$  llevada a  $DDZZ(5,3)$  mediante el borrado de puntos para mantener la convexidad en la cadena derecha y así encontrar thrackles máximos.

Sabemos que para el caso cuando  $n = 11$ , es decir  $DDZZ(6,5)$ , la cadena derecha es la misma que para  $DDZZ(5,5)$ , mientras que la izquierda tendrá un punto más que en  $DDZZ(5,5)$ , por lo que el mismo borrado de puntos funciona.

Con base en los resultados anteriores podemos intuir que mientras tengamos tres puntos en posición convexa en la cadena derecha podemos formar thrackles máximos, por lo que dada una  $DCZZ$  podemos borrar tantos puntos como sean necesarios de la cadena derecha para formar thrackles máximos. En la Figura 4.30 podemos ver  $DDZZ(10,10)$ .

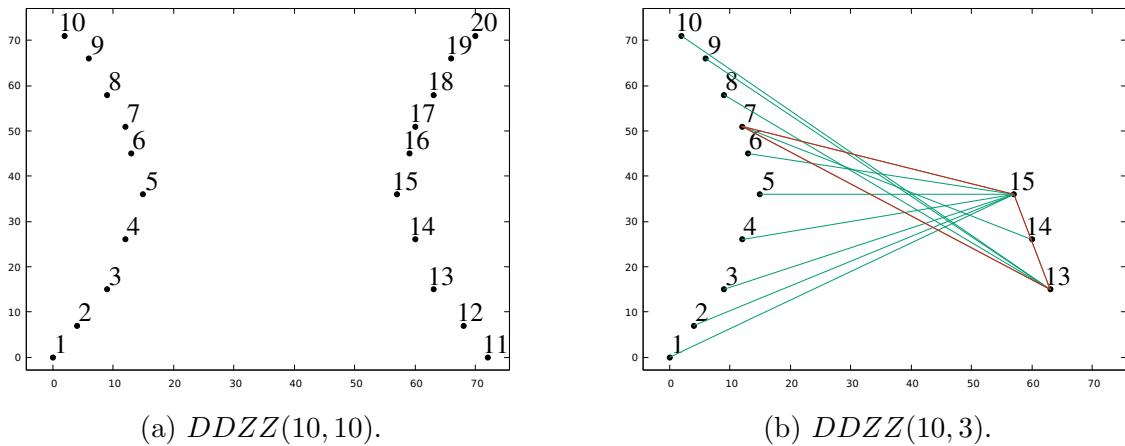


Figura 4.30:  $DDZZ(10,10)$  llevada a  $DDZZ(10,3)$  mediante el borrado de puntos para encontrar thrackles máximos.

Dada  $DDZZ(3, l)$ , con  $3 \leq l$ , existe un número finito de elecciones de aristas para formar thrackles máximos, sin embargo también existen elecciones de aristas que no forman un thrackle máximo, por lo que en esta sección nos limitaremos a demostrar que existe un thrackle máximo y lo daremos explícitamente.

**Proposición 5.** Sea  $DDZZ(3, l)$  una doble cadena zig-zag.  $DDZZ(3, l)$  admite un thrackle máximo.

*Demostración.* Sea  $DDZZ(3, l)$  una doble cadena zig-zag. Tomemos un etiquetado por cada cadena de tal forma que ambas cadenas inicien del mismo lado además de que al tomar tres puntos consecutivos de tal manera que haya dos etiquetas impares se forme un conjunto de puntos convexo hacia la otra cadena. Llamémos  $U$  a la cadena de tres puntos y  $L$  a la cadena de  $l$  puntos. Una figura esquemática se puede ver en la Figura 4.31.

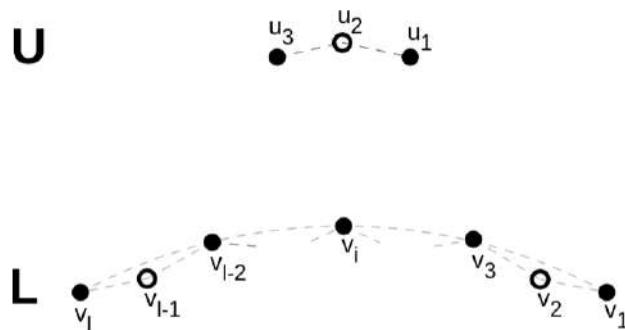


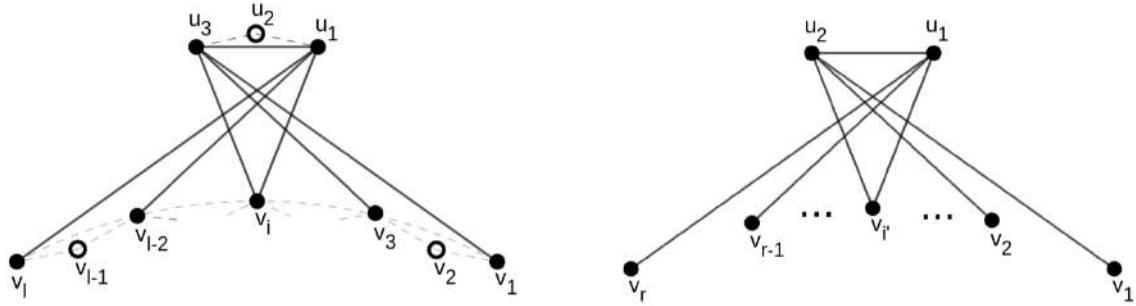
Figura 4.31: Figura esquemática de  $DDZZ(3, l)$ .

Separemos los puntos con etiqueta par e impar como sigue:

$$L_p = \left\{ v_j \mid j \bmod 2 = 0 \wedge v_j \in L \right\}$$

$$L_i = \left\{ v_j \mid j \bmod 1 = 0 \wedge v_j \in L \right\}$$

Por la forma en que está construida la doble cadena zig-zag podemos asegurar que si descartamos los puntos que están en posición zig-zag, recuperamos la doble cadena convexa, es decir que el conjunto  $L_p \cup \{u_1, u_2\}$  corresponde a la  $(2, r)$ -doble cadena convexa, con  $r = \lceil \frac{l}{2} \rceil$ . Por lo visto en el Teorema 10 de la Sección 4.2 podemos afirmar que existe un thrackle de tamaño  $\lceil \frac{l}{2} \rceil + 2$  con ciclo de tamaño tres sobre los puntos  $\{u_1, u_2, v_i\}$  para algún punto  $v_i \in L_i$ . Esto se puede observar en la Figura 4.32.

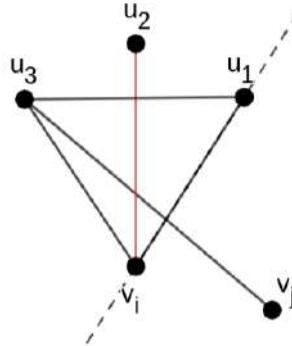


(a) Thrackle sobre los puntos con etiqueta impar de  $DDZZ(3, l)$ . (b) Thrackle máximo sobre los puntos de  $C(2, r)$  con  $r = \lceil \frac{l}{2} \rceil$ .

Figura 4.32: Comparación entre  $DDZZ(3, l)$  y  $C(2, r)$ , donde  $1 \leq l$  y  $1 \leq r$ .

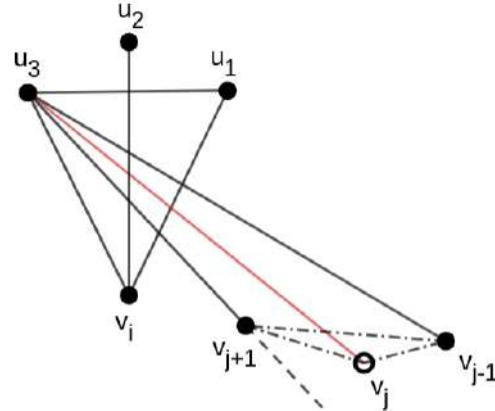
Ya que los puntos de  $U$  forman un conjunto convexo hacia la cadena  $L$ , el segmento de recta que pasa por  $u_1$  y  $u_3$  separa en distintos semiplanos al punto  $u_2$  y al resto de puntos, por lo que para toda  $i \in [1, l]$ , la arista  $v_i u_2$  necesariamente cruza a la arista  $u_1 u_2$ .

Utilizando la Figura 4.33 podemos observar que, tomando una  $i \in [1, l]$ , el segmento de recta que pasa por  $v_i$  y  $u_1$  deja en semiplanos distintos al conjunto de puntos  $\{v_j\}_{j < i}$  y a los puntos  $u_2$  y  $u_3$ , además las aristas  $u_3 u_j$  están siempre por debajo de la arista  $u_1 u_3$  la cual es cruzada por la arista  $v_i u_2$ , de lo anterior se sigue que la arista  $v_i u_2$  necesariamente cruza a las aristas  $u_3 u_j$ , con  $j > i$ .

Figura 4.33: Análisis de intersección de la arista  $v_i u_2$ .

Análogamente sucede para las aristas formadas por el punto  $u_1$  y los puntos  $\{v_j\}_{i < j}$ . Por lo tanto podemos afirmar que la arista  $v_i u_2$  cruza o comparte vértice con el resto de aristas. Por lo tanto hemos construido un thrackle máximo en  $L_i$ .

Ahora analicemos el conjunto de puntos  $L_p$ . Sea  $v_j \in L_p$  con  $j < i$ , como la arista  $u_3 v_j$  no puede ser colineal a la arista  $u_3 v_{j-1}$  ni a la arista  $u_3 v_{j+1}$  necesariamente se encuentra en el área comprendida por estas dos. Por lo que la arista  $u_3 v_j$  cruzará y compartirá vértice con todas aquellas aristas que lo hagan con  $u_3 v_{j-1}$  y  $u_3 v_{j+1}$ , y como estas dos últimas son thrackableables se tiene que la arista  $u_3 v_j$  es thrackable, lo anterior se ejemplifica en la Figura 4.34. Análogamente para las aristas  $u_1 v_j$  con  $i < j$ .

Figura 4.34: Análisis de intersección de la arista  $v_j u_3$ , con  $j < i$ .

□

Podemos resumir la información anterior en el siguiente teorema:

**Teorema 11.** *Sea  $DCZZ(3, l)$  una doble cadena zig-zag.  $DCZZ(3, l)$  tiene un thrackle máximo de tamaño  $l + 3$  con ciclo de tamaño tres como se ve en la figura 4.35.*

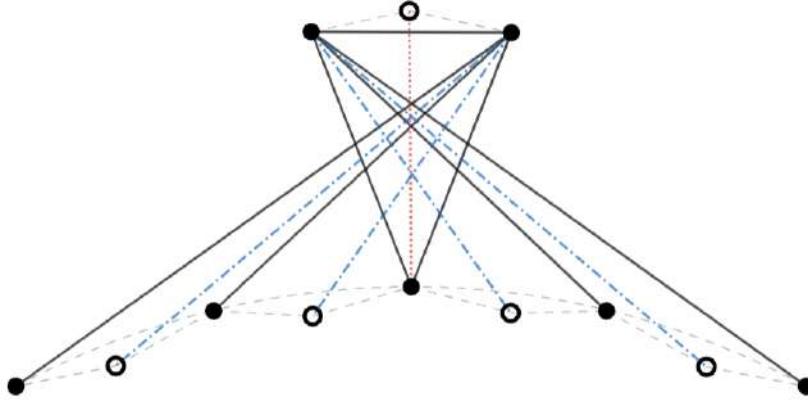


Figura 4.35: Thrackle máximo en  $DCZZ(3, l)$ .

Clemens Huemer *et. al.* definieron *la doble cadena zig-zag generalizada* [35] como una doble cadena parametrizada por dos valores  $n$  y  $k$ , siendo  $n$  el número total de puntos y  $k$  el número de puntos entre cada par de puntos de la cadena formando un arco en posición convexa. Denotamos a la doble cadena zig-zag con  $k$  puntos en los arcos interiores como  $Z_k$ .

Con base en esta definición tenemos que  $Z_0$  corresponde a una doble cadena convexa, mientras que  $Z_1$  corresponde a la doble cadena zig-zag analizada anteriormente. Un ejemplo de  $Z_2$  se puede ver en la figura 4.36.

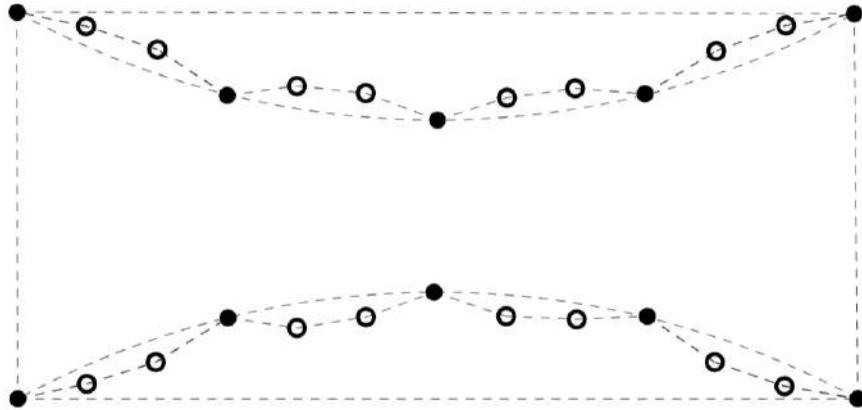


Figura 4.36: Doble cadena zig-zag generalizada con dos puntos en cada arco, es decir  $Z_2$ .

Para buscar thrackles máximos en  $Z_2$  procedemos de manera similar a como lo hicimos en  $Z_1$ , la idea es borrar tantos puntos como sea necesario para que en una cadena quede un conjunto de puntos en posición convexa, es evidente que para este caso habrá cuatro

puntos que cumplan esta condición.

Introducimos la notación generalizada para una doble cadena desbalanceada como sigue: Si  $Z_k$  es una doble cadena zig-zag balanceada con  $n$  puntos totales y  $k$  puntos en cada arco interior, denotamos por  $Z_k(m, l)$  a la doble cadena zig-zag que tiene  $m$  puntos totales en la cadena superior y  $l$  puntos totales en la cadena inferior tal que  $n = m + l$ , con  $k$  puntos en cada arco interior. Con base en la definición anterior podemos ver en la Figura 4.37 a  $Z_2(4, l)$ .

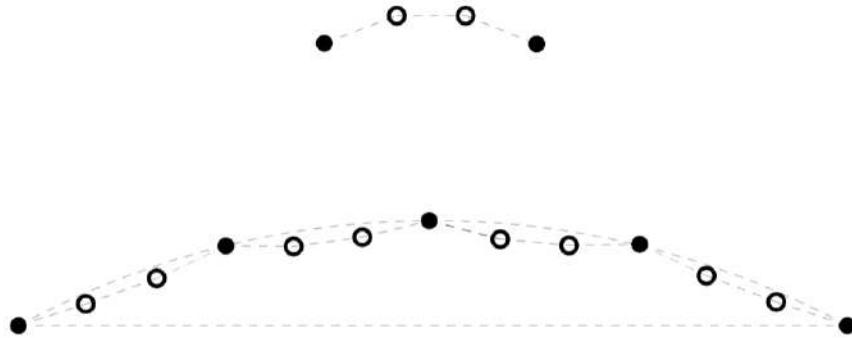


Figura 4.37:  $Z_2(4, l)$ .

**Teorema 12.** *Sea  $Z_2(4, l)$  una doble cadena zig-zag cuya cadena de cuatro puntos forma un conjunto convexo hacia la otra cadena.  $Z_2(4, l)$  admite un thrackle máximo.*

La demostración es análoga a la escrita para  $Z_1$ , el thrackle que admite este conjunto se muestra en la Figura 4.38.

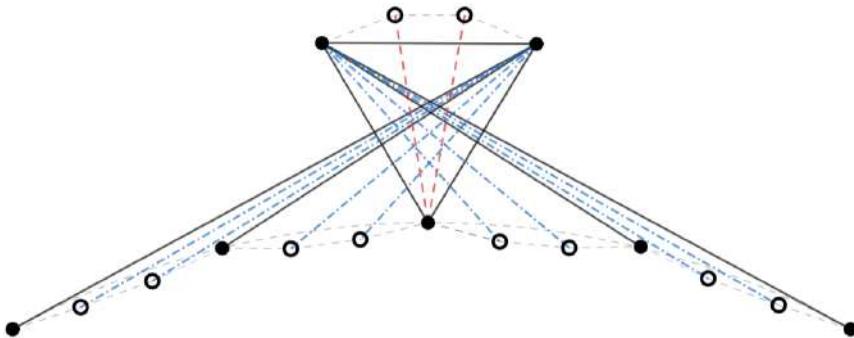


Figura 4.38: Thrackle máximo admitido por  $Z_2(4, l)$ .

Este resultado acerca de la existencia de un thrackle máximo se puede generalizar para  $Z_k$ , cuyo arco de  $k$  puntos podemos ver en la Figura 4.39.

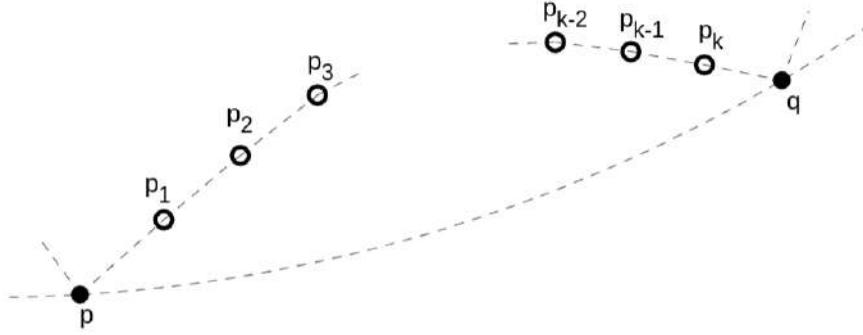


Figura 4.39: Arco interno de  $Z_k$ .

Por lo que dejando únicamente un arco en posición convexa en un cadena el resultado general es el siguiente:

**Teorema 13.** *Sea  $Z_k(k+2, l)$  una doble cadena zig-zag generalizada cuya cadena de  $k+2$  puntos forma un conjunto convexo hacia la otra cadena.  $Z_k(k+2, l)$  admite un thrackle máximo.*

Una vez más la demostración es análoga a  $Z_1$  y  $Z_2$ .

En la siguiente sección daremos los resultados obtenidos para el conjunto de Horton.

## 4.4. Conjunto de Horton

Erdős definió el parámetro  $g(n)$  como el número entero más pequeño tal que cualquier conjunto de  $g(n)$  puntos en el plano en posición general contiene un subconjunto de  $n$  puntos en posición convexa cuya capa convexa no encierra ningún punto, a este subconjunto de  $n$  puntos en posición convexa que no encierra puntos se le conoce como *n-hoyo*. El conjunto de Horton tiene la propiedad de no tener 7-hoyos, con base en esta propiedad existen distintas definiciones del conjunto de Horton que mantiene la propiedad. Aquí utilizaremos la definición recursiva dada por Horton de la siguiente manera: [36]:

**Definición 16.** *Conjunto de Horton. Para cualquier  $k \geq 0$ , se construye un conjunto de  $2^k$  puntos. Sea  $i \in [0, 2^k]$  un entero cuya expansión binaria es  $a_k \dots a_2 a_1$ . Sea  $c = 2^k + 1$ , se define  $d(i) = \sum a_j c^{j-1}$ , sumando desde  $j = 1$  hasta  $j = k$ . Sea  $p_i$  el punto  $(i, d(i))$ , entonces el conjunto de Horton,  $H_k$ , queda definido como  $H_k = \{p_i | i = 0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ .*

Para este conjunto utilizaron puntos de la base de datos. Para cada caso se hicieron 100 pruebas para cada  $n$  entre 1 y 100, recordemos que la cantidad de puntos es una función exponencial de  $2^n$ . En la Figura 4.40 se pueden ver los resultados para  $n = 2, 3, 4, 5$ .

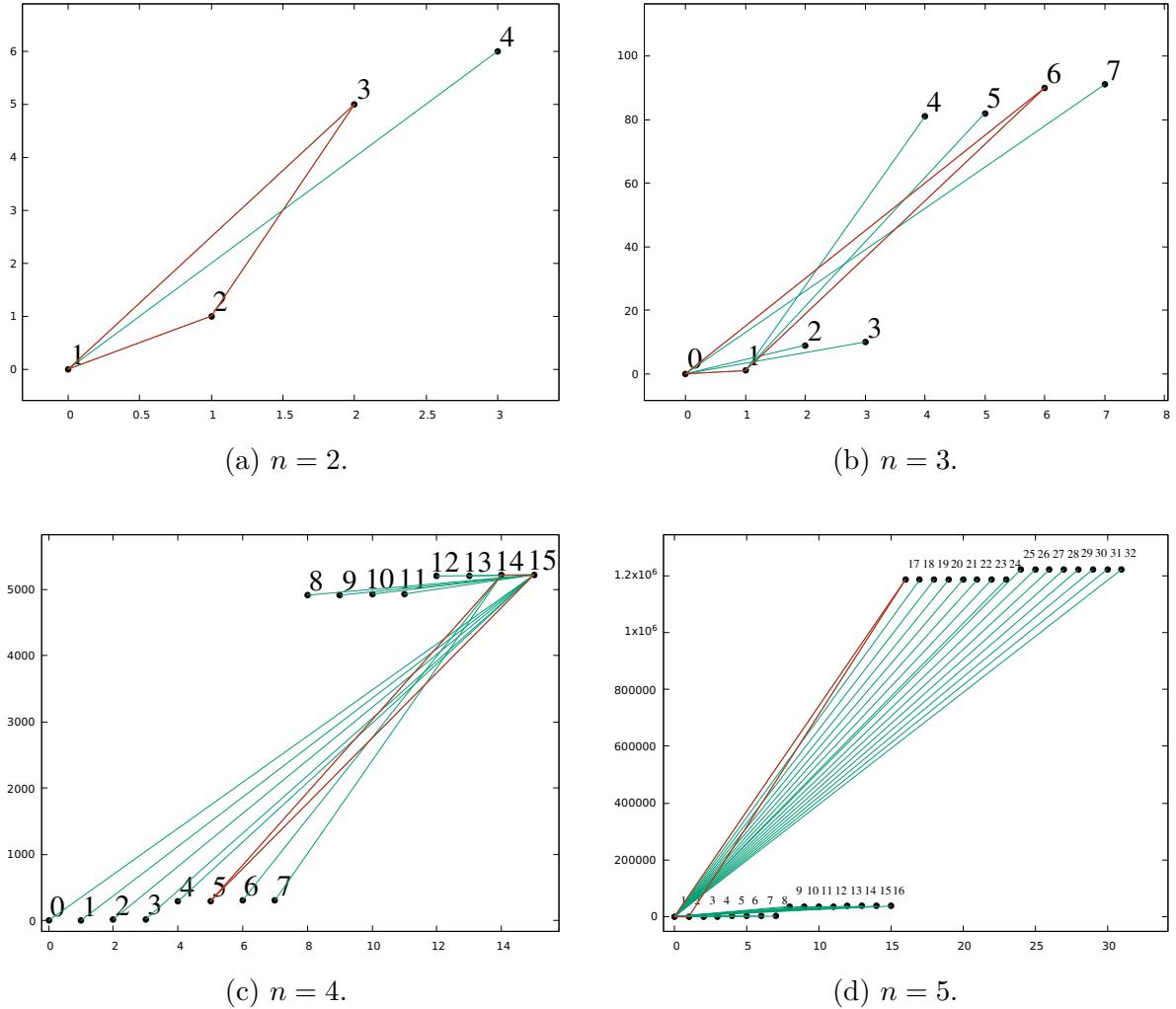


Figura 4.40: Resultados obtenidos para el conjunto de horton con  $2^n$  puntos, para  $n = 3, 5, 6, 7$ .

En las pruebas realizadas se encontró que existen thrackles máximos para cada  $n$  analizada, nuestra propuesta es que existe al menos un thrackle máximo para toda  $n$  y daremos explícitamente ese thrackle máximo. Para ello daremos explícitamente una elección de aristas y demostraremos que forman un thrackle máximo para toda  $n$ . Primero vamos a demostrar dos proposiciones que nos serán de utilidad.

**Proposición 6.** *Para toda  $k \geq 0$ , sea  $i \in [0, 2^k - 1]$  cuya expansión binaria es  $a_k \dots a_2 a_1$ , tomando  $c = 2^k + 1$ , se tiene que la función  $d(i) = \sum_{j=1}^k a_j c^{j-1}$  es creciente para toda  $i$ .*

*Demuestração.* Sean  $i \in [0, 2^k - 1]$ ,  $c = 2^k + 1$ ,  $i \in [0, 2^k - 1]$ . Para demostrar que  $d(i) = \sum_{j=1}^k a_j c^{j-1}$  es creciente se verificará que si  $i' \leq i$  entonces  $d(i') \leq d(i)$ .

Sean  $a_k \dots a_2 a_1$  y  $a'_k \dots a'_2 a'_1$  las expansiones binarias de  $i$  y  $i'$  respectivamente. Para decir que la función es creciente basta con verificar que la recta que pasa por los puntos  $(i - 1, d(i - 1))$  y  $(i, d(i))$  tiene pendiente positiva para toda  $i$ , como se muestra en la Figura 4.41, es decir se debe cumplir lo siguiente:

$$\frac{d(i) - d(i - 1)}{i - (i - 1)} > 0.$$

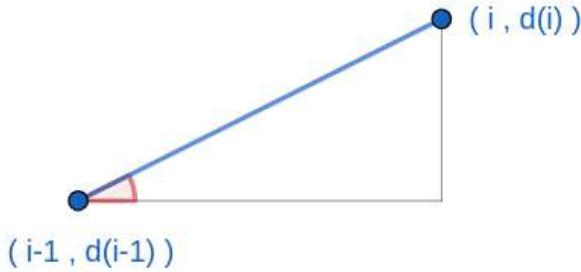


Figura 4.41: Pendiente de la recta que pasa por dos puntos.

Por lo tanto, basta con verificar que

$$\begin{aligned} d(i) - d(i - 1) &> 0 \\ \sum_{j=1}^k a_j c^{j-1} - \sum_{j=1}^k a'_j c^{j-1} &> 0 \\ \sum_{j=1}^k (a_j - a'_j) c^{j-1} &> 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como  $c = 2^k + 1$ , entonces para toda  $k$  se cumple que  $c > 0$ , por lo que la Ecuación 4.8 será válida dependiendo de  $a_j$  y  $a'_j$ .

Como  $i$  y  $i + 1$  son números consecutivos se tiene que necesariamente  $a_1$  y  $a'_1$  son distintas, es decir se tienen uno de los siguientes dos casos:

- a)  $a_1 = 1$  y  $a'_1 = 0$
- b)  $a_1 = 0$  y  $a'_1 = 1$

Analicemos primero el caso a) En este caso el número  $i - 1$  tiene su bit menos significativo igual a 0, por lo que para obtener a  $i$  se le suma 1, lo que significa que se cambia únicamente el bit menos significativo por un 1. Por lo tanto en este caso se tiene que  $a'_j = a_j$  para

toda  $j > 1$ , por lo que  $a_j - a'_j = 0$ , para toda  $j > 1$ , además  $a_1 - a'_1 = 1$ . Entonces la suma queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k (a_j - a'_j) c^{j-1} &= \sum_{j=2}^k (a_j - a'_j) c^{j-1} + (a_1 - a'_1) c^{1-1} \\ &= 0 + 1 \\ &> 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

La Ecuación 4.9 indica que para el caso a) se cumple que la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $i - 1$  y  $i$  es positiva y por lo tanto  $d(i)$  es creciente.

b) En este caso el número  $i - 1$  tiene bit menos significativo igual a  $a'_1 = 1$ , por lo que realizar la suma  $i - 1 + 1$  es equivalente a realizar  $a'_1 + 1 = 0$ , teniendo un acarreo de 1 para el siguiente bit  $a'_2$ , llevaremos el acarreo hasta que lleguemos a algún bit  $a'_\ell = 0$  que al sumarle el acarreo cambie a 1. Lo anterior significa que existe  $\ell \in [2, k]$  tal que  $a'_\ell = 0$  y  $a'_j = a_j$  para toda  $j > \ell$ . Es decir que  $a_\ell - a'_\ell = 1$  y  $a_j - a'_j = 0$  para toda  $j > \ell$ , además necesariamente para  $j < \ell$  se tiene que  $a'_j > a_j$ , esto quiere decir que  $a_j - a'_j = -1$ . Por

lo que la suma queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^k (a_j - a'_j) c^{j-1} &= \sum_{j=\ell+1}^k (a_j - a'_j) c^{j-1} + (a_\ell - a'_\ell) c^{\ell-1} + \sum_{j=1}^{\ell-1} (a_j - a'_j) c^{j-1} \\
&= 0 + c^{\ell-1} - \sum_{j=1}^{\ell-1} c^{j-1} \\
&= c^{\ell-1} - \sum_{j=1}^{\ell-1} c^{j-1} \\
&= c^{\ell-1} - \sum_{j=2}^{\ell} c^{j-2} \\
&= c^{\ell-1} - \frac{1}{c^2} \sum_{j=2}^{\ell} c^j \\
&= c^{\ell-1} - \frac{1}{c^2} \left[ -c^0 - c^1 + \sum_{j=0}^{\ell} c^j \right] \\
&= c^{\ell-1} - \frac{1}{c^2} \left[ -1 - c + \frac{1 - c^{\ell+1}}{1 - c} \right] \\
&= c^{\ell-1} - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{c^2 - c^{\ell+1}}{1 - c} \right] \\
&= c^{\ell-1} - \left[ \frac{1 - c^{\ell-1}}{1 - c} \right] \\
&= c^{\ell-1} - c^{\ell-1} \left[ \frac{\frac{1}{c^{\ell-1}} - 1}{1 - c} \right] \\
&= c^{\ell-1} \left[ 1 - \frac{1 - \frac{1}{c^{\ell-1}}}{c - 1} \right]. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Para verificar que la Ecuación 4.10 es mayor a 0, basta con verificar que el término entre corchetes es positivo, para ello verificamos que  $c = 2^k + 1$  por lo que para  $k > 0$  se tiene que  $c > 2$ , por lo que  $c - 1 > 1$ ; además se tiene que  $1 > 1 - \frac{1}{c^{\ell-1}}$ , por lo que se tiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
c - 1 &> 1 - \frac{1}{c^{\ell-1}} \\
1 &> \frac{1 - \frac{1}{c^{\ell-1}}}{c - 1} \\
1 - \frac{1 - \frac{1}{c^{\ell-1}}}{c - 1} &> 0. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

De la Ecuación 4.11 se sigue que la Ecuación 4.10 es positiva, por lo tanto  $d(i)$  es creciente para el caso b). Esto concluye la demostración.  $\square$

**Proposición 7.** *Para toda  $k > 0$ , sea  $i \in [0, 2^k - 1]$  cuya expansión binaria es  $a_k \dots a_2 a_1$ , la función  $d(i) = \sum_{j=1}^k a_j (2^k + 1)^{j-1}$  cumple la propiedad  $i < d(i)$  para toda  $i$ .*

*Demostración.* Sea  $k > 0$ , se tiene que  $2 < 2^k + 1$ , por lo que para toda  $j > 1$  se cumple que  $2^{j-1} < (2^k + 1)^{j-1}$ .

Sea  $i \in [0, 2^k - 1]$  y sea  $a_k \dots a_2 a_1$  la expansión binaria de  $i$ . para toda  $j \in [2, k]$  si  $a_j \neq 0$  se satisface  $a_j 2^{j-1} < a_j (2^k + 1)^{j-1}$ , por lo que restando la suma para estos valores se sigue la siguiente relación:

$$\sum_{\substack{j \in [2, k] \\ a_j \neq 0}} a_j 2^{j-1} < \sum_{\substack{j \in [2, k] \\ a_j \neq 0}} a_j (2^k + 1)^{j-1}.$$

Para  $j \in [2, k]$  tal que  $a_j = 0$  se tiene que  $a_j 2^{j-1} = a_j (2^k + 1)^{j-1} = 0$ , por lo que sumar estos términos no afecta la desigualdad, por lo tanto:

$$\sum_{j=2}^k a_j 2^{j-1} < \sum_{j=2}^k a_j (2^k + 1)^{j-1}.$$

Para el caso  $j = 1$  se tendrá que  $a_j 2^{j-1} = a_j (2^k + 1)^{j-1} = a_1$ , por lo que sumar este término no afecta la desigualdad, por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^k a_j 2^{j-1} < \sum_{j=1}^k a_j (2^k + 1)^{j-1}.$$

Como  $a_k \dots a_2 a_1$  es la expansión binaria de  $i$ , se tiene que  $i = \sum_{j=1}^k a_j 2^{j-1}$ , por lo tanto se concluye la relación:

$$i < d(i).$$

$\square$

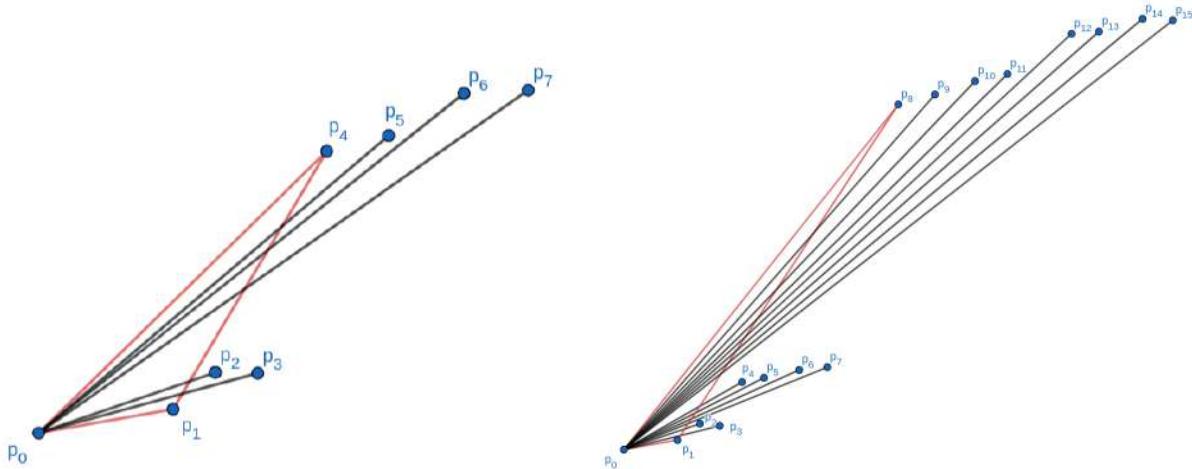
A continuación demostramos que siempre existe un thrackle máximo con ciclo de tamaño 3 en el conjunto de Horton, para demostrarlo damos el thrackle explícitamente. Recordemos la definición recursiva del conjunto de Hortón:

**Definición 17.** *Conjunto de Horton. Para cualquier  $k \geq 0$ , se construye un conjunto de  $2^k$  puntos. Sea  $i \in [0, 2^k)$  un entero cuya expansión binaria es  $a_k \dots a_2 a_1$ . Sea  $c = 2^k + 1$ , se define  $d(i) = \sum a_j c^{j-1}$ , sumando desde  $j = 1$  hasta  $j = k$ . Sea  $p_i$  el punto  $(i, d(i))$ , entonces el conjunto de Horton,  $H_k$ , queda definido como  $H_k = \{p_i | i = 0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ .*

Para  $2^k$  puntos el thrackle consiste de las siguientes aristas:

- a) Un ciclo de tamaño 3 que consiste de los puntos  $(0, d(0))$ ,  $(1, d(1))$  y  $(2^{k-1}, d(2^{k-1}))$ , los cuales tienen las etiquetas  $p_0$ ,  $p_1$  y  $p_{2^{k-1}}$ .
- b)  $2^k - 3$  aristas que se forman al unir los  $2^k - 3$  puntos restantes, con el punto  $p_0$ .

Un ejemplo de este thrackle propuesto se ve en la Figura 4.42 para el caso en que  $k = 3$  y  $k = 4$ .



(a) Thrackle máximo de tamaño 8 para  $k = 3$ . (b) Thrackle máximo de tamaño 16 para  $k = 4$ .

Figura 4.42: Ejemplos de thrackles máximos en el conjunto de Horton con la elección de aristas propuestas.

Para asegurar que se forma un thrackle es necesario que las  $2^k - 3$  aristas restantes deben encontrarse dentro de la región delimitada por las aristas del ciclo que inciden en  $p_0$  ya que las  $2^k - 3$  aristas inciden en ese punto, además deben encontrarse fuera del ciclo, por lo que deben quedar a la derecha del segmento dirigido  $p_0p_{2^{k-1}}$ , esto se resume en las siguientes condiciones:

- a) Los puntos deben estar a la izquierda del segmento orientado  $p_0p_1$ .
- b) Los puntos deben estar a la derecha del segmento orientado  $p_1p_{2^{k-1}}$ .
- c) Los puntos deben estar a la derecha del segmento orientado  $p_0p_{2^{k-1}}$ .

Para demostrar a) basta con demostrar que la pendiente de la recta que pasa por el punto  $p_0$  y los puntos  $p_i$  para toda  $i \in [2, 2^k - 1] - \{2^{k-1}\}$  es mayor a la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $p_0$  y  $p_1$ , es decir, se debe cumplir la siguiente relación:

$$\frac{d(1) - d(0)}{1 - 0} < \frac{d(i) - d(0)}{i - 0}.$$

Esto quiere decir que deseamos que se cumpla la siguiente relación:

$$1 < \frac{d(i)}{i}.$$

Lo cual se satisface por la Proposición 7.

Para demostrar b) vamos a utilizar un argumento similar al caso a) respecto a las pendientes, basta con demostrar que la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $p_1$  y  $p_{2k-1}$  es mayor a la pendiente de la recta que pasa por  $p_1$  y  $p_i$ , es decir queremos que se satisfaga la siguiente relación:

$$\frac{d(i) - d(1)}{i - 1} < \frac{d(2^{k-1}) - d(1)}{2^{k-1} - 1}. \quad (4.12)$$

Para verificar esta relación vamos a dividir el análisis en dos casos:

- b.1)  $1 < i < 2^{k-1}$
- b.2)  $2^{k-1} < i$

En el caso b.1), basta con analizar los casos extremos ya que la función  $d(i)$  es creciente, por lo que si  $i = 2$  y  $i = 2^{k-1} - 1$  cumplen la relación, los demás puntos la cumplirán. Hagamos notar que para analizar  $i = 2$  debe cumplirse que  $k > 2$  de lo contrario no hay suficientes puntos para analizar este caso, por lo tanto se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} k &< (k-1)^2 \\ 2k-1 &< k^2-k \\ 2^{2k-1} &< 2^{k^2-k}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Por otro lado se tiene que  $2^{2k-1} < 2^{k^2-k} + 2^k$ , que al combinarlo con la Ecuación 4.13 se siguen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} 2^{2k-1} &< 2^{k^2-k} + 2^k \\ 2^{2k-1} - 2^k &< 2^{k^2-k} \\ 2^{2k-1} - 2^k + 1 &< 2^{k^2-k} + 1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por otro lado se tiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} 2^{k^2-k} + 1 &= 2^{k(k-1)} + 1 \\ &= (2^k)^{k-1} + 1 \\ &< (2^k + 1)^{k-1}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

De las Ecuaciones 4.14 y 4.15, combinadas con la definición de  $c = 2^k + 1$  se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 2^{2k-1} - 2^k + 1 &< c^{k-1} \\
 2^{2k-1} - 2^k &< c^{k-1} - 1 \\
 2^k(2^{k-1} - 1) &< c^{k-1} - 1 \\
 2^k &< \frac{c^{k-1} - 1}{2^{k-1} - 1} \\
 2^k + 1 - 1 &< \frac{d(2^{k-1}) - 1}{2^{k-1} - 1} \\
 c - 1 &< \frac{d(2^{k-1}) - 1}{2^{k-1} - 1} \\
 \frac{c - 1}{2 - 1} &< \frac{d(2^{k-1}) - 1}{2^{k-1} - 1}. \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Como estamos analizando el caso  $i = 2$  se tiene que su expansión binaria es  $a_j = 1$  para  $j = 2$  y  $a_j = 0$  para toda  $j \neq 2$ , por lo que  $\sum_{j=1}^k a_j c^{j-1} = c^1$ , esto quiere decir que  $d(2) = c$ , por lo que la Ecuación 4.16 nos indica que se cumple la Ecuación 4.12 para el caso b.1) cuando  $i = 2$ .

El caso b.1) cuando  $i = 2^{k-1} - 1$  se verifica directamente con la Proposición 6 que analiza dos puntos continuos.

Para analizar caso b.2), tomaremos nuevamente los extremos cuando  $i = 2^{k-1} + 1$  y  $i = 2^k - 1$ .

Cuando  $i = 2^{k-1} + 1$  se tiene que la expansión binaria s  $a_j = 1$  para  $j \in \{1, k\}$  y  $a_j = 0$  para toda  $j \notin \{1, k\}$ , esto quiere decir que  $d(2^{k-1} + 1) = c^{k-1} + 1$ , por lo que la relación

$$\frac{d(i) - d(1)}{i - 1} < \frac{d(2^{k-1}) - d(1)}{2^{k-1} - 1}.$$

queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \frac{d(2^{k-1} + 1) - d(1)}{2^{k-1} + 1 - 1} &< \frac{d(2^{k-1}) - d(1)}{2^{k-1} - 1} \\
 \frac{c^{k-1}}{2^{k-1}} &< \frac{c^{k-1} - 1}{2^{k-1} - 1}. \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

De la definición de  $c = 2^k + 1$  se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 2 &< c \\
 2^{k-1} &< c^{k-1} \\
 \frac{1}{c^{k-1}} &< \frac{1}{2^{k-1}} \\
 1 + \frac{1}{c^{k-1}} &< 1 + \frac{1}{2^{k-1}} \\
 1 - \frac{1}{2^{k-1}} &< 1 - \frac{1}{c^{k-1}} \\
 \frac{2^{k-1} - 1}{2^{k-1}} &< \frac{c^{k-1} - 1}{c^{k-1}} \\
 \frac{c^{k-1}}{2^{k-1}} &< \frac{c^{k-1} - 1}{2^{k-1} - 1}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Por lo que se cumple la Ecuación 4.12 para la parte  $i = 2^{k-1} + 1$  del caso b.2).

En el caso  $i = 2^k - 1$  de b.2) se quiere que se cumpla la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
 \frac{d(2^k - 1) - 1}{(2^k - 1) - 1} &< \frac{d(2^{k-1}) - 1}{2^{k-1} - 1} \\
 \frac{d(2^k - 1) - 1}{2^k - 2} &< \frac{d(2^{k-1}) - 1}{2^{k-1} - 1} \\
 \frac{d(2^k - 1) - 1}{2(2^{k-1} - 1)} &< \frac{d(2^{k-1}) - 1}{2^{k-1} - 1} \\
 d(2^k - 1) - 1 &< 2(d(2^{k-1}) - 1) \\
 d(2^k - 1) &< 2d(2^{k-1}) - 1.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Para verificar que se cumple la relación dada por la Ecuación 4.19, veamos cuál es el valor explícito de  $d(2^k - 1)$ . La expansión binaria para  $i = 2^k - 1$  es  $a_j = 1$  para toda  $j$ , por lo

que la forma explícita queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 d(2^k - 1) &= \sum_{j=1}^k a_j c^{j-1} \\
 &= \sum_{j=1}^k c^{j-1} \\
 &= \frac{1}{c} \sum_{j=1}^k c^j \\
 &= \frac{1}{c} \left[ -1 + \frac{1 - c^{k+1}}{1 - c} \right] \\
 &= \frac{1}{c} \left[ \frac{c - c^{k+1}}{1 - c} \right] \\
 &= \frac{1 - c^k}{1 - c} \\
 &= \frac{c^k - 1}{c - 1}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Además como ya sabemos  $d(2^{k-1}) = c^{k-1}$  por lo que la Ecuación 4.19 queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \frac{c^k - 1}{c - 1} &< 2c^{k-1} - 1 \\
 c^k - 1 &< 2c^k - c - 2c^{k-1} + 1 \\
 c &< c^k - 2c^{k-1} + 2 \\
 1 &< c^{k-1} - 2c^{k-2} + \frac{2}{c} \\
 1 &< c^{k-2} [c - 2] + \frac{2}{c}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Para que la Ecuación 4.23 sea válida es necesario que  $c^k - 2 > 0$  y  $c - 2 > 1$ , lo cual se sigue de la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
 k &> 1 \\
 2^k &> 2 \\
 2^k + 1 &> 3 \\
 c &> 3 \\
 c - 2 &> 1.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Por lo tanto la Ecuación 4.19 es válida, por lo que la Ecuación 4.12 se cumple para  $i = 2^k - 1$  del caso b.2).

Por lo tanto los puntos cumplen con estar a la derecha del segmento orientado  $p_1 p_{2^k-1}$ .

Para el caso c) se tiene que los puntos deben estar a la derecha del segmento orientado  $p_0 p_{2^k-1}$ , es decir la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $p_0$  y  $p_i$  para toda  $i$  debe ser menor a la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $p_0$  y  $p_{2^k-1}$ , por lo que se debe de cumplir la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \frac{d(i) - d(0)}{i - 0} &< \frac{d(2^{k-1}) - d(0)}{2^{k-1} - 0} \\ \frac{d(i)}{i} &< \frac{d(2^{k-1})}{2^{k-1}} \\ 2^{k-1}d(i) &< d(2^{k-1})i \\ 0 &< d(2^{k-1})i - 2^{k-1}d(i). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Como  $d(2^{k-1}) = c^{k-1}$ , utilizando la expansión binaria de  $i$ , la Ecuación 4.23 queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 0 &< c^{k-1} \sum_{j=1}^k a_j 2^{j-1} - 2^{k-1} \sum_{j=1}^k a_j c^{j-1} \\ 0 &< \sum_{j=1}^k a_j c^{k-1} 2^{j-1} - \sum_{j=1}^k a_j 2^{k-1} c^{j-1} \\ 0 &< \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^k a_j c^k 2^j - \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^k a_j 2^k c^j \\ 0 &< \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^k a_j [c^k 2^j - 2^k c^j]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Como  $a_j \geq 0$  para toda  $j$ , una manera en que la Ecuación 4.24 sea válida es que  $c^k 2^j - 2^k c^j \geq 0$  para toda  $j$ . Cuando  $j = k$  se tiene que  $c^k 2^j - 2^k c^j = 0$ , por lo que el caso de interés es para  $j < k$ . Esto se sigue de la siguiente relación:

$$\begin{aligned} c &> 2 \\ c^k &> 2^k. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Por lo que para  $j < k$  se tiene:

$$\begin{aligned} c^{k-j} &> 2^{k-j} \\ c^k c^{-j} &> 2^k 2^{-j} \\ c^k 2^j &> 2^k c^j \\ c^k 2^j - 2^k c^j &> 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Por lo que de la Ecuación 4.26 se sigue que la Ecuación 4.24 es válida y por lo tanto la relación de la Ecuación 4.23 lo es.

Esto demuestra el caso c), por lo que queda concluida la demostración.

De lo anterior obtenemos el siguiente teorema:

**Teorema 14.** *Sea  $H$  un conjunto de Horton de cardinalidad  $2^k$ , con  $0 < k$ .  $H$  siempre admite un thrackle máximo con ciclo de tamaño tres.*

## 4.5. Conjuntos de puntos particulares

En esta sección daremos resultados obtenidos a partir del análisis computacional de conjuntos obtenidos de la base de datos [32]. Se realizaron pruebas computacionales en los siguientes conjuntos:

- Conjunto de 10 puntos con la propiedad de tener un único 5-hoyo convexo:

$$\left\{ \begin{array}{l} (0, 64677), (65280, 65280), (32144, 56115), (38443, 42292), (29486, 47302), \\ (28031, 47507), (28497, 46248), (26495, 45981), (26324, 45249), (19359, 44531), \\ (489, 537), (3957, 0), (22031, 40206), (5222, 32611), (48433, 51953) \end{array} \right\}$$

Para el cual se encontraron varios thrackles máximos. En la Figura 4.43 se muestra uno de ellos.

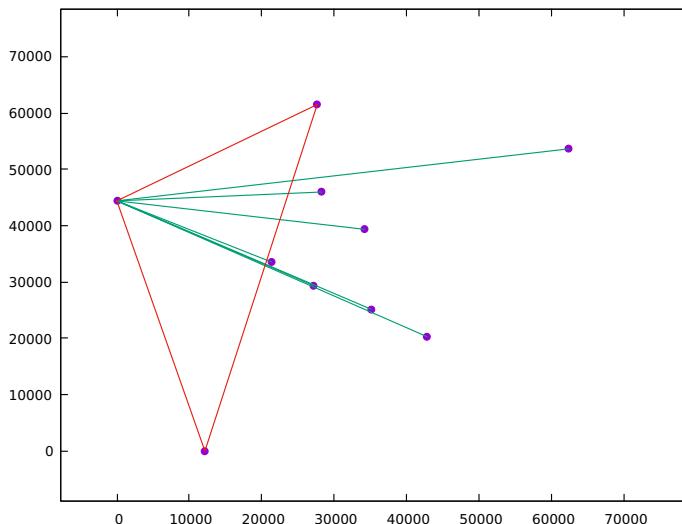


Figura 4.43: Un thrackle máximo encontrado en el conjunto de puntos.

- Conjunto de 14 puntos con seis 5-hoyos convexos.

$$\left\{ \begin{array}{l} (0, 64677), (65280, 65280), (32144, 56115), (38443, 42292), (29486, 47302), \\ (28031, 47507), (28497, 46248), (26495, 45981), (26324, 45249), (19359, 44531), \\ (3957, 0), (22031, 40206), (5222, 32611), (48433, 51953) \end{array} \right\}$$

Para el cual no se encontró ningún thrackle máximo.

- Conjunto de 15 puntos con nueve 5-hoyos convexos.

$$\left\{ \begin{array}{l} (0, 62035), (65280, 65280), (29017, 42686), (28073, 43222), (27580, 43180), \\ (27723, 42707), (26856, 42289), (26977, 42113), (24450, 40872), (24201, 38628), \\ (18887, 0), (29771, 62134), (52452, 63860), (12179, 28100), (42831, 62949) \end{array} \right\}$$

Para el cual no se encontró ningún thrackle máximo.

- Conjunto de 16 puntos con once 5-hoyos convexos.

$$\left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (359, 597), (392, 306), (402, 287), (381, 272), (389, 276), (382, 271), \\ (392, 263), (383, 253), (390, 254), (397, 262), (365, 222), (393, 239), (386, 198), \\ (441, 178), (554, 0) \end{array} \right\}$$

Para el cual no se encontró ningún thrackle máximo.

- Conjunto de 26 puntos sin 6-hoyos convexos [37]:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1181, 727), (1327, 921), (1138, 1011), (1870, 946), (1339, 1359), (1365, 482), \\ (1420, 707), (2025, 410), (-771, 1066), (1090, 457), (731, 1594), (1054, 2285), \\ (1534, -1320), (2413, 793), (2284, -117), (2102, 1640), (-573, 560), \\ (-1347, -4021), (1767, -4587), (7148, 195), (1701, -603), (3216, 3448), \\ (139, 1853), (3521, -2068), (-3176, 5105), (207, 7135) \end{array} \right\}$$

Para el cual se encontraron al menos dos thrackles máximos, uno de ellos se muestra en la Figura 4.44.

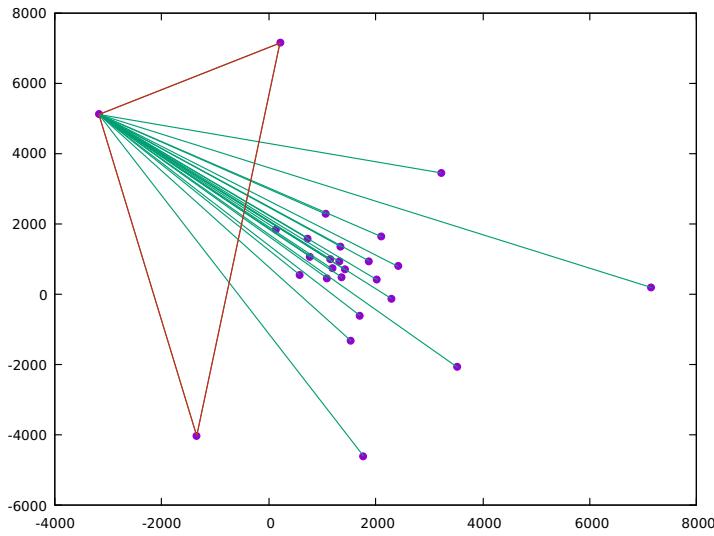


Figura 4.44: Un thrackle máximo encontrado en el conjunto de puntos.

- Conjunto de 29 puntos sin 6-hoyos convexos [38]:

$$\left\{ (1, 1260), (16, 743), (22, 531), (37, 0), (306, 592), (310, 531), (366, 552), (371, 487), (374, 525), (392, 575), (396, 613), (410, 539), (416, 550), (426, 526), (434, 552), (436, 535), (446, 565), (449, 518), (450, 498), (453, 542), (458, 526), (489, 537), (492, 502), (496, 579), (516, 467), (552, 502), (754, 697), (777, 194), (1259, 320) \right\}$$

Para el cual no se encontró ningún thrackle máximo.

# Capítulo 5

## Conclusiones

Esta tesis tiene como objetivo proponer un algoritmo que en tiempo polinomial decida si un conjunto de puntos tiene un thrackle máximo. Encontramos que este problema es más complicado de lo que pensamos por lo que únicamente logramos dar dicho algoritmo para algunas familias de puntos. Obtuvimos resultados interesantes tanto teóricos como computacionales. Para abordar el problema optamos por caracterizar los conjuntos de puntos tienen que thrackles máximos.

La primer familia de puntos que analizamos es el doble círculo. Concluimos que todo doble círculo siempre admite un thrackle máximo.

Otra familia de puntos que analizamos es la doble cadena convexa. Concluimos que admite thrackles máximos siempre y cuando el conjunto de puntos cumpla las condiciones del Teorema 10, concluimos que los conjuntos de puntos en donde existen thrackles máximos necesariamente tiene dos puntos en una cadena mientras que puede tener cualquier número de puntos en la otra cadena.

Para la familia de puntos de la doble cadena zig-zag, concluimos que admite un thrackle máximo si y sólo sí se cumplen las condiciones del Teorema 11, el cual es una generalización del Teorema 10. Análogamente definimos la doble cadena zig-zag generalizada y concluimos que siempre admite thrackles máximos si y sólo si el conjunto de puntos cumple las condiciones del Teorema 13.

La siguiente familia de puntos analizada fue el conjunto de Horton, el cual al ser definido de manera recursiva permite concluir que siempre admite un thrackle máximo, además dimos las tres aristas que forman el ciclo de dicho thrackle máximo y la manera de elegir las aristas restantes.

En el caso de las familias de puntos con la particularidad de tener o no  $k$ -hoyos convexos, para algunas  $k$  particulares: el conjunto de puntos con un único 5-hoyo sí tiene thrackles máximos, mientras que los conjuntos de puntos con seis 5-hoyos, nueve 5-hoyos y once 5-hoyos no tienen thrackles máximos. Con base en la información anterior proponemos la siguiente conjectura:

**Conjetura 1.** *Sea  $S$  un conjunto de puntos con  $m$  hoyos de tamaño 5,  $S$  no admite*

*thrackles máximos para  $1 < m$ .*

Para los dos conjuntos de puntos sin 6-hoyos convexos obtuvimos distintos resultados, para el conjunto de 26 puntos sí se contraron thrackles máximos, mientras que para el conjunto de 29 puntos no. Aquí vale la pena recordar que una propiedad del conjunto de Horton es la de no tener 7-hoyos y como ya vimos siempre contiene un thrackle máximo. Por lo que concluir que el no tener  $k$ -hoyos no nos brinda información acerca de si habrá o no thrackles máximos.

Con base en la experiencia y resultados obtenidos durante la realización de esta tesis concluimos que para determinar de manera eficiente si un conjunto de puntos en posición general tiene o no thrackles máximos una manera es creando particiones con propiedades de convexidad como las estudiadas aquí. El problema de encontrar thrackles máximos en conjuntos de puntos en posición general parece ser un problema NP-completo, esto es una pregunta abierta y un interesante trabajo a futuro.





# Bibliografía

- [1] Paul Erdős. On sets of distances of  $n$  points. *The American Mathematical Monthly*, 53(5):248–250, 1946.
- [2] José Luis Álvarez Rebollar, Jorge Cravioto Lagos, and Jorge Urrutia. Crossing families and self crossing hamiltonian cycles. *XVI Encuentros de Geometría Computacional*, page 13, 2015.
- [3] Boris Aronov, Paul Erdős, Wayne Goddard, Daniel J. Kleitman, Michael Klugerman, János Pach, and Leonard J. Schulman. Crossing families. In *Proceedings of the Seventh Annual Symposium on Computational Geometry*, SCG ’91, page 351–356, New York, NY, USA, 1991. Association for Computing Machinery.
- [4] László Lovász, János Pach, and Mario Szegedy. On conway’s thrackle conjecture. *Discrete & Computational Geometry*, 18(4):369–376, 1997.
- [5] Gary Chartrand and Ping Zhang. *Chromatic Graph Theory*. Chapman & Hall/CRC, 1st edition, 2008.
- [6] Heinz Hopf and Erika Pannwitz. Aufgabe nr. 167. *Jahresbericht Deutsch. Math.-Verein*, 43:114, 1934.
- [7] JW Sutherland. Lösung der aufgabe 167. *Jahresbericht Deutsch. Math.-Verein*, 45:33–35, 1935.
- [8] Yakov Shimeon Kupitz. *Extremal problems in combinatorial geometry*. Number 53. Matematisk institut, Aarhus universitet, 1979.
- [9] S Avital and Haim Hanani. Graphs. *Gilyonot Lematematika*, 3(2):2–8, 1966.
- [10] Douglas R Woodall. Thrackles and deadlock. *Combinatorial Mathematics and Its Applications*, 348:335–348, 1971.
- [11] János Pach and Ethan Sterling. Conway’s conjecture for monotone thrackles. *The American Mathematical Monthly*, 118(6):544–548, 2011.

- [12] Wei Li, Karen Daniels, and Konstantin Rybnikov. A reduction of conway’s thrackle conjecture.
- [13] Grant Cairns, Margaret McIntyre, and Yury Nikolayevsky. The thrackle conjecture for  $k_5$  and  $k_{3,3}$ .
- [14] Radoslav Fulek and János Pach. A computational approach to conway’s thrackle conjecture.
- [15] Vida Dujmović and David Wood. Thickness and antithickness of graphs. 08 2017.
- [16] WT Tutte. The thickness of a graph. In *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, volume 66, pages 567–577. Elsevier, 1963.
- [17] D. Eppstein. Separating thickness from geometric thickness. In *Graph Drawing*, 2002.
- [18] Lowell W. Beineke and Frank Harary. The thickness of the complete graph. *Canadian Journal of Mathematics*, 17:850–859, 1965.
- [19] Valeri B Alekseev and VS Gončakov. The thickness of an arbitrary complete graph. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 30(2):187, 1976.
- [20] Lowell W Beineke. The decomposition of complete graphs into planar subgraphs. *Graph theory and theoretical physics*, pages 139–153, 1967.
- [21] Jean Mayer et al. Décomposition de  $k_{16}$  en trois graphes planaires. 1972.
- [22] J Vasak. The thickness of the complete graph having  $6m+4$  points. *Manuscript. Cited in [12, 14]*, 1990.
- [23] Lowell W Beineke, Frank Harary, and John W Moon. On the thickness of the complete bipartite graph. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 60, pages 01–05. Cambridge University Press, 1964.
- [24] P. Mutzel, T. Odenthal, and M. Scharbrodt. *The Thickness of Graphs: A Survey*. Forschungsbericht. Max-Planck-Institut für Informatik, 1996.
- [25] Michael B. Dillencourt, David Eppstein, and Daniel S. Hirschberg. *Geometric Thickness of Complete Graphs*, pages 39–51.
- [26] Michael B. Dillencourt, David Eppstein, and Daniel S. Hirschberg. Geometric thickness of complete graphs. In Sue H. Whitesides, editor, *Graph Drawing*, pages 102–110, Berlin, Heidelberg, 1998. Springer Berlin Heidelberg.
- [27] Fran Berman, David Johnson, Tom Leighton, Peter W Shor, and Larry Snyder. Generalized planar matching. *Journal of Algorithms*, 11(2):153–184, 1990.

- [28] G. Araujo, A. Dumitrescu, F. Hurtado, M. Noy, and J. Urrutia. On the chromatic number of some geometric type kneser graphs. *Computational Geometry*, 32(1):59–69, 2005.
- [29] Ruy Fabila-Monroy, Jakob Jonsson, Pavel Valtr, and David R. Wood. The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph, 2018.
- [30] Ruy Fabila-Monroy, Carlos Hidalgo-Toscano, Jesus Leanos, and Mario Lomelí. The chromatic number of the disjointness graph of the double chain. 11 2017.
- [31] Fernandez Laura. Programas de tesis, 2021. Código, <https://github.com/monifdzn/tesis>.
- [32] A. Oswin and P. Günter R. Jan, K. Tomaz. Combinatorics of point sets and arrangements of objects. Datos obtenidos de PoSeZo - The Point Set Zoo, <http://www.eurogiga-compose.eu/posezo.php>.
- [33] Sergey Bereg, R Fabila-Monroy, David Flores-Peñaloza, Mario Alberto López, and Pablo Pérez-Lantero. Embedding the double circle in a square grid of minimum size. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 24(03):247–258, 2014.
- [34] Oswin Aichholzer, Thomas Hackl, Clemens Huemer, Ferran Hurtado, Hannes Krasser, and Birgit Vogtenhuber. On the number of plane geometric graphs. *Graphs and Combinatorics*, 23:67–84, 06 2007.
- [35] Clemens Huemer, Alexander Pilz, and Rodrigo I. Silveira. A new lower bound on the maximum number of plane graphs using production matrices. *Computational Geometry*, 84:36–49, 2019. Special Issue on the 34th European Workshop on Computational Geometry.
- [36] Joseph D Horton. Sets with no empty convex 7-gons. *Canadian Mathematical Bulletin*, 26(4):482–484, 1983.
- [37] Mark H. Overmars. *Sets without empty convex 6-gons*, volume 88. Unknown Publisher, 1988.
- [38] Mark Overmars. Finding sets of points without empty convex 6-gons. *Discrete & Computational Geometry*, 29(1):153–158, 2002.