



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Computación

**Estudio estadístico en autómatas celulares para la
exploración del comportamiento colectivo**

TESIS QUE PRESENTA

Rogelio Basurto Flores

PARA OBTENER EL GRADO DE

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Computación

DIRECTORES DE TESIS

Dr. Sergio Víctor Vergara Chapa

Dr. Amilcar Meneses Viveros

Ciudad de México, Distrito Federal Noviembre, 2012

Agradecimientos

Es el CONACYT la institución que me ayudo económicamente durante los dos años que duro la maestría y no puedo hacer menos que agradecer por su ayuda. Y es gracias al Cinvestav que he tenido acceso a los recursos necesarios para trabajar. Sin su apoyo este trabajo no existiría.

Recordando las palabras de José Saramago he de agradecer primero a aquellos que me Educaron: mis padres, Antonio Basurto Basurto y Maura Flores Garcia. Es en ellos en los que siempre he confiado y me he apoyado. Su educación me hace el hombre que hoy soy y siempre seré.

Pasando a la Instrucción, como lo llamó Saramago, he de agradecer a mis directores, Sergio Víctor Chapa Vergara y Amilcar Meneses Viveros por su gran paciencia y la amplia confianza que depositaron en mi. También, mis profesores de la maestría, que por exigir tanto pusieron a prueba mis capacidades; y aunque su ayuda no fue directa, quiero dar un agradecimiento al Dr. Harold V. McIntosh por su omnisciente guía e influencia.

Un agradecimiento especial para una persona que me ha educado e instruido por igual, el primer *tlamatini* que he tenido honor de conocer, mi profesor y amigo Miguel Olvera Aldana.

Al final, y no por ello menos sino lo contrario, también he de agradecer a las personas con las que he compartido alegrías y penas por igual, porque gracias a sus platicas y discusiones sobre cualquier cosa imaginable y a veces inimaginable, las ideas florecieron de manera inexplicable. Gracias amigos.

Resumen

Los estudios sobre sistemas complejos pueden dividirse en la simulación de sistemas mediante computadora y, el estudio y diseño de modelos simples que presentan características de un sistema complejo. La primera realiza, entre otras cosas, simulaciones del comportamiento colectivo animal como los cardúmenes y las parvadas, en el segundo se encuentran las redes booleanas, los mapas acoplados y los autómatas celulares, mismos que presentan todas las características deseables en un sistema complejo.

La dinámica global existente en los AC ha sido objeto de muchos análisis, entre ellos la teoría de campo medio, mediante la cual se encuentra evidencia de un comportamiento colectivo no trivial. En esta tesis se realiza un estudio sistemático, utilizando métodos estadísticos de correlación entre espacios de evoluciones. Con éste análisis se pueden observar los patrones existentes en su evolución y el grado de aleatoriedad de una regla, mismo que puede describir una forma de clasificación de autómatas celulares, paralela a la clasificación de Wolfram.

De esta manera se busca la exploración del comportamiento colectivo y el comportamiento colectivo no trivial dentro de la dinámica de AC. También, se presenta una exploración entre parámetros que han mostrado caracterizar el comportamiento de los autómatas celulares tales como los parámetros Z y λ con el comportamiento colectivo y estudios estadísticos.

Abstract

Complex systems studies can be approach through computer systems simulation and, the study and design of simple systems that present complex system's characteristics. The fist one perform, among other things, simulations of animal collective behavior like shoals and flocks; in the second category falls boolean networks, coupled maps and cellular automata, thereof presents all the desirable characteristics of complex systems.

The global dynamics exhibited by cellular automata has been the goal of many analysis, among themselves the mean field theory, thereof shows evidence of non trivial collective behavior. In this thesis we made a systematic study, by correlation statistical methods between evolution spaces. Patterns in evolution can be distinguished with this approach and also the randomness of the rule, through which can be describe a classification for cellular automata, parallel to Wolfram's classification.

By these we try to explore collective behavior and non trivial collective behavior in cellular automata dynamics. Also, it presents an exploration between parameters that had shown characterize cellular automata behavior, like Z and λ parameters, and collective behavior and statistics studies.

Contenido

1	Introducción	1
1.1	Planteamiento del problema	1
1.2	Contexto de investigación	2
1.3	Organización de la tesis	5
2	Preliminares	6
2.1	Sistemas complejos	6
2.2	Comportamiento colectivo	7
2.2.1	Comportamiento colectivo en la naturaleza	8
2.2.2	Comportamiento colectivo no trivial en AC	10
2.3	Autómata Celular	13
2.3.1	Dimensión y vecindad	13
2.3.2	Más allá de 3D	15
2.3.3	Estados y función de transición	16
3	Análisis estadísticos	22
3.1	Teoría de campo medio	23
3.1.1	Definición para dos estados	24
3.1.2	Definición para n estados	26
3.2	Análisis de varianza	27
3.2.1	Varianza	28
3.2.2	Análisis de varianza en AC	29
4	Análisis no estadísticos	33
4.1	Clasificación de Wolfram	34
4.2	Otros análisis	35
4.2.1	El parámetro λ	35
4.2.2	El parámetro Z	37
5	Experimentos y resultados	40
5.1	Muestra experimental	40
5.2	Computación asociada	42
5.2.1	Requerimientos y limitaciones	44

5.2.2	Diseño e implementación	45
5.2.3	Costo computacional	48
6	Conclusiones	52
6.1	Discusión	52
6.1.1	Comportamiento colectivo y clases de Wolfram	52
6.1.2	Comportamiento colectivo no trivial	55
6.2	Conclusiones	57
6.3	Trabajo a futuro	60
6.3.1	Comportamiento colectivo en más de dos estados.	60
6.3.2	Análisis de series de tiempo.	60
6.3.3	Diseño de sistemas discretos con comportamiento colectivo. . .	61
6.3.4	Teoría de campo medio para más de 2 estados.	61

Capítulo 1

Introducción

1.1 Planteamiento del problema

El estudio de sistemas complejos es una rama interdisciplinaria relativamente nueva que ha venido cobrando cada vez mayor interés e importancia. Se basa en el estudio de sistemas con múltiples elementos interactuando entre si. Algunos ejemplos de sistemas complejos pueden ser la economía global, los mercados financieros, los cardúmenes, las parvadas o el tráfico vehicular.

Muchos de los sistemas complejos en la naturaleza presentan el llamado comportamiento colectivo. A falta de una definición formal diremos que el comportamiento colectivo es aquel comportamiento que esta presente en una gran cantidad de partículas de un sistema y que es posible visualizarlo sólo al observar el conjunto completo de elementos y no únicamente una pequeña muestra.

Dentro de los sistemas complejos el comportamiento colectivo es frecuentemente el objeto principal de estudio, haciendo simulaciones computacionales exhaustas y precisas de sistemas particulares, dejando de lado el diseño de sistemas que inherentemente presenten la característica del sistema complejo. Es decir, se trabaja del comportamiento colectivo hacia el sistema complejo y no al revés.

Por otro lado, los sistemas complejos pueden ser diseñados de una manera abstracta y en ocasiones incluso sistemática. Son los autómatas celulares (AC) una de las varias herramientas para realizar este tipo de diseño. La problemática que se tiene al diseñar AC es que no se conoce el comportamiento del sistema hasta que se realizan los experimentos.

Si bien existen múltiples parámetros y análisis para AC que ayudan al diseño de sistemas con características particulares, en gran parte el diseño de AC es aun artesanal.

Chaté y Manneville fueron los primeros en encontrar evidencia de comportamiento

colectivo en AC sin tener como objetivo diseñar AC que presentasen tal característica. El resultado fueron varias reglas que presentaban un comportamiento anómalo a través del tiempo en la densidad de la población. Llamaron al fenómeno “comportamiento colectivo no trivial”. Y aun a pesar que haberlo encontrado y estudiado mediante la teoría de puntos críticos no lograron explicar la naturaleza del fenómeno.

Desde el descubrimiento realizado por Chaté y Manneville se ha propuesto diversas teorías a favor y en contra del fenómeno, dejando como conclusión que el comportamiento colectivo no trivial existe, es estable al cambio en las condiciones iniciales y es más común en altas dimensiones.

También, se tiene la teoría de que no sigue la ley de los grandes números debido a la convergencia del promedio de la densidad, o que el fenómeno no es posible debido a que la sincronización de espacios de evolución de tal envergadura es imposible pues no existe el tiempo suficiente para que la sincronización de lleve a cabo. Sin embargo, ambas son solo especulaciones.

En el presente trabajo se ataca la problemática de la sincronización del espacio de evolución mostrando que no es necesaria para que el fenómeno ocurra, siendo de este modo un comportamiento colectivo que difiere al ya conocido como el comportamiento tipo enjambre presente en la naturaleza. También, a través de un análisis de correlación sería posible no sólo explorar el comportamiento colectivo no trivial sino extender el concepto para estudiar el comportamiento colectivo dentro de los AC.

Adicionalmente, el análisis de correlación entrega información sobre el grado de aleatoriedad de la evolución, lo que hace posible pensar en una clasificación paralela a la de Wolfram con una base estadística.

1.2 Contexto de investigación

Los autómatas celulares o bien AC son un modelo matemático capaz de representar sistemas dinámicos discretos; fue creado por John von Neumann quien propuso un modelo de computación universal inspirado por sistemas de la naturaleza como el cerebro humano [von Neumann, 1966]. Desde entonces, los AC han probado ser capaces de simular sistemas físicos, químicos, biológicos, sociales y computacionales. Por otro lado, se han estudiado con métodos de mecánica estadística, de la teoría de sistemas dinámicos y con enfoques matriciales, entre otros [Ilachinski, 2001].

En la década de 1980 Wolfram propone el estudio de los autómatas celulares mediante técnicas estadísticas [Wolfram, 1983], en particular la teoría de campo promedio, derivada de la teoría de fenómenos críticos [Ma, 1976]. A partir de este momento los AC comienzan a ser estudiados a través de diferentes técnicas y métodos,

obteniendo resultados que han ayudado a comprender la naturaleza misma del modelo [Ilachinski, 2001].

A finales de la década de 1980 e inicios de la de 1990 se observó un fenómeno al que se le llamó “comportamiento colectivo no trivial”, éste fue descubierto por Chaté y Manneville [Chaté & Manneville, 1991]. Este trabajo revela la presencia de un comportamiento colectivo a través de análisis de densidad en autómatas celulares en altas dimensiones (superiores a 4) y con dos estados, dando como resultado toda una familia de autómatas que muestran este comportamiento.

Posteriormente, Chaté y Manneville continúan su trabajo y presentan un compilado de sus resultados [Chaté & Manneville, 1992], donde se puede observar una clasificación basada en el comportamiento general del autómata celular utilizando la densidad de los espacios de evoluciones, en el cual se nota la influencia de la teoría de fenómenos críticos. Gracias a esta técnica son capaces de describir el comportamiento de los autómatas de manera asintótica y representar puntos críticos para las reglas estudiadas. Sin embargo, no logran explicar el fenómeno, lo que llevó a que otros investigadores tomen sus resultados y, utilizando otros modelos como las redes booleanas y los mapas acoplados, intenten dar una explicación o mostrar que no es un fenómeno aislado. En el marco de los AC los trabajos de Gómez exploran el problema mediante polinomios de densidad, método de Montecarlo y la teoría de campo medio dejando una base matemática sólida sobre el cual trabajar [Gómez, 2000; Gómez, 2007].

El problema del comportamiento colectivo no trivial resulta de interés pues dados los experimentos parece que podría contradecir la ley probabilística de los grandes números [Pikovsky & Kurths, 1993]; también, es una manera de acercarse al estudio del comportamiento colectivo en sistemas complejos, siendo una área de importancia para el modelado de sistemas y que además no ha sido contemplada como una variable de estudio independiente en los autómatas celulares.

El estudio de los autómatas celulares no cobró particular relevancia hasta después de que Wolfram realizara estudios estadísticos sobre la familia de autómatas celulares de una dimensión [Wolfram, 1983]. Debido a este análisis el interés en los autómatas celulares arribó desde muy diversas áreas de la ciencia; esto permite aseverar que es un modelo importante para el estudio de sistemas dinámicos y aún más, se puede describir a los AC como el modelo más simple que permite el estudio de los sistemas complejos dadas sus características deterministas [Ilachinski, 2001].

Los sistemas complejos presentan cuando menos un elemento en común llamado emergencia. De la emergencia suelen desprenderse comportamientos como la auto-reproducción y auto-organización, manifestaciones que son perceptibles en la naturaleza. No obstante, el comportamiento colectivo que puede observarse en sistemas como los cardúmenes, parvadas o la propagación de enfermedades no ha sido completamente estudiado y aislado en los AC. En este punto cabe preguntar si existe una medida de la colectividad en los sistemas complejos, en particular para los AC, que es en parte la motivación de este trabajo.

Por otro lado, se han encontrado evidencias de la existencia de un comportamiento colectivo no trivial en los autómatas celulares [Chaté & Manneville, 1991]. Los experimentos realizados no fueron suficientes para dar una explicación clara del fenómeno, por lo que era necesario estudiar desde diferentes perspectivas y herramientas el evento. Posteriormente, Gómez propone un estudio mediante polinomios de densidad para analizar el fenómeno del comportamiento colectivo no trivial [Gómez, 2000; Gómez, 2000]. Los experimentos que realizó fueron pobres en cuanto al número de evoluciones y el tamaño de los espacios de evolución comparando con los estudios previos; por otro lado, la metodología que propone tiene un sustento matemático sólido, por lo que resulta una buena base para realizar un estudio mediante dicha técnica que permita tener mejores resultados experimentales.

Existen diferentes métodos para caracterizar a los autómatas celulares que pueden ser de ayuda para la exploración del comportamiento colectivo no trivial, tales como los parámetros Z y λ , que son comparados con la clasificación de Wolfram [Voorhees, 1997]; mismos que aunados al estudio de polinomios de densidad y a un análisis de la correlación entre espacios de evolución se sospecha que ayudarían a la explicación de este fenómeno y, en general, al estudio del comportamiento colectivo en autómatas celulares.

Desde entonces mucho se ha avanzado en cuanto a las aplicaciones posibles de los autómatas celulares, llegando a cubrir áreas tan diversas como la física, biología, computación, matemáticas y química [Ilachinski, 2001].

Es por tanto que el estudio sistemático de los autómatas celulares y la exploración de sus características generales y particulares han sido de gran interés, de tal manera que Wolfram a inicios de los 1980's estudia, mediante métodos de mecánica estadística, el autómata celular básico¹, proponiendo una clasificación basada en el comportamiento global de los autómatas [Wolfram, 1983]; posteriormente a finales de los 1980's e inicios de los 1990's McIntosh realiza una serie de estudios a los AC de una dimensión, basado en una perspectiva rigurosamente matemática tocando puntos tan diversos como la topología, dinámica y complejidad, basándose en teoría de gráficas y matrices, recopilando sus trabajos en [McIntosh, 2009]. En el mismo periodo de tiempo Voorhees realiza un estudio de los autómatas celulares unidimensionales. Sin embargo, desde un enfoque computacional, centrando su trabajo en el estudio de las reglas de evolución, cálculo de preimágenes, puntos fijos y ciclos en la dinámica global, sus trabajos pueden encontrarse en [Voorhees, 1996]; finalmente, a inicios de los 1990's, Wensche y Lesser realizan un estudio basado en campos de atractores que permite una descripción de la dinámica global de los autómatas [Wuensche & Lesser, 1992].

El comportamiento descubierto por Chaté y Manneville aun no tiene explicación y el rango de reglas estudiado que presentan dicho comportamiento es muy reducido tomando en cuenta el amplio espectro que ofrecen los autómatas celulares al variar los estados de las células, las vecindades y los tipos de reglas de evolución. No obstante,

¹Con dos estados y una vecindad de 3 miembros en una dimensión.

éste es un caso aislado, mismo que permite pensar en la posibilidad de fenómenos similares al incrementar los estados y las vecindades.

1.3 Organización de la tesis

El segundo capítulo de la tesis es esencial para entender la problemática, objetivo y tener el conocimiento conceptual que se utilizará a lo largo de la tesis. Se discuten y ejemplifican los conceptos de la teoría de sistemas complejos hasta llegar a el comportamiento colectivo. Posteriormente se presenta el concepto de AC mediante teoría de conjuntos. Para poder comprender lo ahí expuesto son necesarios conocimientos básicos de teoría de conjuntos y álgebra.

Posteriormente, en la tercera parte de la tesis se exponen dos modelos para analizar el comportamiento colectivo no trivial en AC. El primero de los modelos es con el que se descubre el comportamiento colectivo no trivial, pues se observa que éste no sigue lo que la teoría de campo medio indica. También, se propone una generalización para AC de n estados. Por otro lado, se presenta un análisis de varianza y correlación entre los espacios y subespacios de evolución, respectivamente. Los temas se exponen desde las bases por lo cual solo es necesario tener conocimientos básicos sobre álgebra, probabilidad y estadística.

Así, llegando al capítulo 4 se discuten algunos de los análisis de AC que han mostrado caracterizar las reglas en una dimensión. Se discuten las posibles ventajas y problemáticas de tales modelos para el estudio del comportamiento colectivo en general y en particular el comportamiento colectivo no trivial en AC. Los conceptos utilizados solo requieren de conocimiento de álgebra, teoría de conjuntos y probabilidad.

A lo largo de la quinta parte de la tesis se presenta el modelo utilizado para realizar los experimentos y la herramienta utilizada para realizarlos. Se discuten los problemas algorítmicos asociados al cálculo de AC y sus respectivos análisis. Los alcances y límites de los experimentos realizados.

En el sexto y último capítulo se exponen los resultados y teorías sobre el comportamiento colectivo no trivial en AC basadas en los análisis y observaciones realizadas. Se discuten los temas derivados de la tesis y se propone una línea de estudio a futuro del comportamiento colectivo en AC.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Sistemas complejos

No existe, debido a la interdisciplinariedad, una definición técnica o formal de un sistema complejo, emergencia, comportamiento colectivo, ni auto-organización y no es objeto de esta tesis debatir las diferentes versiones sobre cada concepto, por lo cual se proponen, sobre la lectura, conceptos basados en el grueso de la literatura tratando con esto de ligar las ideas y no dejar conceptos aislados. Es de recordar que cada concepto es tan amplio que puede y ha sido estudiado por si mismo.

La mayoría de las investigaciones concuerdan en que un sistema complejo está compuesto de múltiples partículas que interactúan entre si y que el comportamiento del sistema entero es mayor que el de la suma de las partes [Newman, 2011].

El estudio de los sistemas complejos es una área interdisciplinaria, que no se ha formalizado en muchos aspectos, de ahí que no exista una clasificación formal de sistemas complejos, ni mucho menos una manera de abordar su estudio, excepto quizá por alguna particularidad que se pretenda estudiar. Algunas de las características en común que presentan los sistemas complejos son:

- **Partículas.** Es de gran importancia la cantidad de ellas.
- **Interacciones.** El peso de la conexión y la cantidad de conexiones.
- **Formación/Operación.** La escala de tiempo manejada.
- **Diversidad/Variabilidad.** Los tipos de partículas dentro del sistema.
- **Ambiente.** La importancia y peso sobre el sistema.
- **Actividad.** La tarea y el objetivo a ejecutar por las partículas.

Uno de los mejores ejemplos de un sistema complejo puede ser el cerebro humano, mismo que está compuesto por partículas llamadas neuronas que se interconectan

entre sí mediante canales de comunicación llamados sinápsis que llegan a estar en el rango de 10^{50} . Una o dos neuronas poco pueden hacer, sin embargo el cerebro humano posee al rededor de 10^{11} neuronas y algunas se especializan y agrupan en algún tipo de trabajo específico, como la memoria a corto y largo plazo o el sistema motriz. Pero lo que emerge y no puede ser medido en ningún grado es la conciencia humana. Como este ejemplo existen muchos otros, y en gran medida éste es el interés y razón de su estudio [Newman, 2011; Dorin, 1998].

La *emergencia* es aquello que resulta de la suma de las partes del sistema complejo, aunque un sistema cumpla las características antes listadas, si no presenta emergencia no puede ser catalogado como sistema complejo. Un ejemplo de este caso, y donde incluso se desea que no presente emergencia, son los sistemas informáticos, que pueden ser de gran envergadura, contar con múltiples módulos e incluso estar compuestos por diferentes lenguajes de programación y nunca llegaran a ser algo más que la suma de las partes [Atay, 2011; Gershenson & Heylighen, 2003].

En los sistemas complejos la emergencia muchas veces cambia su naturaleza de un sistema a otro. Lo que es la conciencia en el cerebro humano, viene a ser una crisis económica en un sistema financiero. Otro tipo de emergencia que puede ser aplicado a diversos sistemas es el comportamiento colectivo.

2.2 Comportamiento colectivo

El comportamiento colectivo fue estudiado en seres humanos como un comportamiento sociológico que sale de las normas establecidas. Dentro de este enfoque el comportamiento colectivo se diferencia de cualquier otro tipo de comportamiento grupal por el hecho de que es siempre corrupto, desviado.

Por ejemplo, si en un partido de fútbol la audiencia grita porras, no es considerado un comportamiento colectivo, pues es un comportamiento normal en tal situación. En cambio, si la gente comienza a bajar al campo a reclamar y agredir a los jugadores o árbitros, es considerado un comportamiento colectivo, pues es un comportamiento desviado.

Otras características del comportamiento colectivo, desde el punto de vista sociológico, son que debe ser inesperado, desorganizado, espontáneo. En otras palabras, tiene que emerger de las condiciones precisas de la situación, de las variables del sistema en un momento determinado. Las variables que llegan a incidir en este caso pueden ser desde condiciones meteorológicas hasta políticas.

Este tipo de comportamiento se ramifica de acuerdo las circunstancias de la población en *localizado*, cuando los sujetos se encuentran en contacto directo y *disperso* cuando el contacto es a través de canales no directos, usualmente los sujetos se encuentran en diferentes lugares pero tienden a presentar el mismo comportamiento a pesar de

la distancia.

Dentro de la primera clasificación se encuentran las multitudes, que son colectividades donde los sujetos tienen una gran proximidad física. Debido a esta proximidad es que los sujetos se influyen unos a otros. Las multitudes pueden ser divididas a su vez en casuales, convencionistas o expresionistas. Una persona es siempre susceptible a las amenazas individuales, y es a partir del sentimiento de peligro individual que se desembocan los fenómenos colectivos, pues todas las personas presentarán, en mayor o menor medida, el mismo sentimiento.

El comportamiento colectivo disperso tiene las mismas bases que el localizado, sin embargo su presencia necesita de otros medios de comunicación. Los movimientos dispersos pueden deberse a rumores y llegar a terminar en leyendas urbanas, histeria masiva o modas.

Un caso sobresaliente de comportamiento colectivo disperso es la transmisión por radio de la novela *The War of the Worlds* de H. G. Wells en 1938. Durante la transmisión nunca se mencionó que lo que se relataba era ficción, por lo que las personas que escuchaban la radio terminaron presas del pánico, dispersaron la mala información por rumores y el episodio terminó con un caso de histeria masiva.

El comportamiento colectivo del que se ha hablado hasta ahora depende de muchas variables y su estudio es por lo mismo todo un reto. No obstante, el comportamiento colectivo tiene otras vertientes donde las variables, aunque muchas, pueden ser mejor contabilizadas al grado en que se pueden llegar a realizar simulaciones computacionales. Este es el caso del comportamiento colectivo en la naturaleza, en particular el comportamiento colectivo animal.

2.2.1 Comportamiento colectivo en la naturaleza

Antes de abordar los tipos de comportamiento colectivo a través de los diversos protagonistas se ha de tener en cuenta que el comportamiento colectivo es el resultado de un proceso que va desde un comportamiento individual y que éste de alguna manera llega a un comportamiento global. El medio para lograr el comportamiento colectivo en la naturaleza es mediante la sincronización de las partículas.

El modelo sociológico de comportamiento colectivo requiere de un líder, de un detonante que desencadene el comportamiento, no así en la naturaleza. En la naturaleza el comportamiento colectivo parece ser algo inherente, no provocado. El resultado de la evolución de las especies [Newman, 2011].

También, el comportamiento colectivo depende primordialmente del observador, pues de acuerdo al nivel de observación de un sistema es si presenta colectividad o no. De tal manera que al analizar células en un tejido solo observamos un conjunto de partículas que se comunican mediante las paredes celulares y que incluso pueden

multiplicarse mediante mitosis, pero no se está observando la colectividad al interior de la célula, donde cada célula está realizando los mismos procesos y dentro de cada una existen múltiples partículas que están dedicadas a una sola tarea en específico, como la síntesis proteínica.

Entonces, las características a considerar dentro de un sistema complejo que presenta comportamiento colectivo son:

- Sincronización.
- Observador.
- Ambiente.
- Densidad.

Tomemos por ejemplo un cardumen. Un cardumen, o también llamado banco de peces, es la aglomeración de peces de una misma especie, aunque no necesariamente, nadando en conjunto de una manera sincronizada. La aglomeración de peces puede ser explicada de manera natural a través de sus ventajas: defensa contra depredadores, alimentación más ventajosa, mayor probabilidad de apareamiento y mayor eficiencia hidrodinámica en el nado [Sumpter, 2005].

El primer punto que causa sorpresa al observar un cardumen es la sincronización de los peces, pues no chocan entre si, nadan a una alta velocidad y no requieren de un líder o factor externo para lograr dicha sincronización. El siguiente, depende desde donde se observe el cardumen; si se observa desde unos metros es como si la aglomeración fuese una sola entidad, lo que le ayuda al encontrarse con depredadores. El ambiente en el que se encuentra el cardumen juega gran importancia, al grado de que si cambian de un ambiente regular a uno con una intensidad lumínica menor el cardumen puede no mantenerse. El último factor, la densidad, se evidencia cuando son pocos los peces que forman el cardumen ya que no son apreciables patrones reconocibles, no así cuando su densidad es alta.

La forma en que los peces logran realizar tal proeza es a través de sus sentidos individuales, de esta manera podemos observar al cardumen como un sistema complejo compuesto por pequeños elementos que interactúan, en el cual cada elemento sigue un comportamiento que depende únicamente de su ambiente local, de los elementos y condiciones más cercanos. Así, un pez observa los cambios en el flujo acuático a su alrededor y actúa en consecuencia, también utilizan la visión para mantener su posición en relación a los demás peces que le rodean. En conjunto obtiene una información muy exacta de su posición actual y de sus vecinos, lo que le permite decidir la dirección y velocidad a la que seguirá nadando.

Este tipo de comportamiento no solo es presente en los peces, sino es compartido con las aves, algunos mamíferos, delfines y saltamontes. Es por eso que se han propuesto tres reglas que debe seguir cualquier algoritmo que quiera describir tal comportamiento:

- Moverse en la misma dirección que tus vecinos.
- Mantenerse cerca de tus vecinos.
- Evitar la colisión con tus vecinos.

Mediante este modelo se presupone que cada elemento posee una velocidad y dirección inicial. Las reglas pueden variar de un modelo específico a otro, y para realizar un buen modelo es necesario considerar cualquier particularidad del sistema que se pretende simular.

El enfoque dado a este tipo de modelos es desde los datos reales hacia la construcción del sistema complejo, pero existe también el punto de vista contrario, donde, desde un punto de vista abstracto se pueden obtener sistemas complejos, tal es el caso de los AC que son un modelo abstracto que permite la simulación de sistemas complejos, no obstante, no todo AC es un sistema complejo. Desde este punto de vista se ha encontrado un comportamiento colectivo con características muy particulares y que ha sido llamado “comportamiento colectivo no trivial”.

2.2.2 Comportamiento colectivo no trivial en AC

El comportamiento colectivo en los AC se observa a través de los mapas de retorno, gráficas donde se aprecia la densidad de elementos activos durante las evoluciones del sistema. A través de dicha herramienta se pudo observar que las densidades de ciertas reglas variaba entre zonas.

Usualmente las densidades de un AC varía solo entre dos puntos, lo que hizo que este fenómeno fuera considerado de una gran particularidad. El fenómeno se aprecia en AC de más de 3 dimensiones y hasta 6, con una gran cantidad de elementos que pueden ir desde los 10^3 , con dos estados. El fenómeno se estudió mediante la teoría de campo medio como otras reglas de la misma familia, pero los resultados experimentales no coincidían, lo que llevo a un estudio más profundo mediante otros métodos [Barral *et al*, 1992].

Al encontrarse el comportamiento colectivo no trivial en altas dimensiones la visualización de los patrones es complicada, lo que dificulta su estudio. Se le llamó comportamiento colectivo debido a que todos los elementos del sistema se sincronizan para conseguir siempre un rango similar para tres densidades consecutivas a lo largo del tiempo, una densidad alta, una media y una baja, siempre en el mismo orden y con valores muy similares, pero nunca iguales.

El tiempo entre un ciclo 3 y otro es prácticamente inmediato, lo que muestra una sincronización en el sistema, pero tampoco es lo suficientemente largo como para que todas las células puedan haberse comunicado. Esta situación y la muestra de membranas celulares en algunas reglas de AC defienden la idea de que el comportamiento colectivo no trivial no es posible [Hemmingsson *et. al.*, 1993].

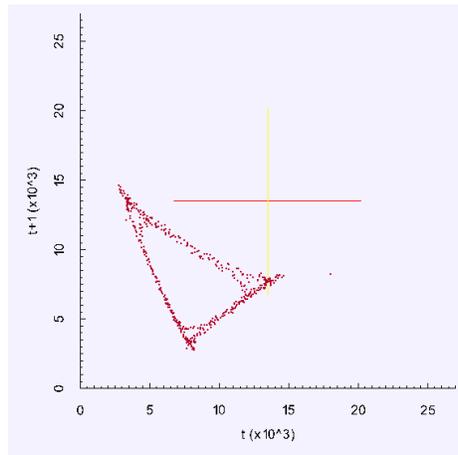


Figura 2.1: Densidades para la regla 33 en 3D para 500 evoluciones.

Quizá una de las reglas de AC con la que se puede observar mejor el comportamiento colectivo no trivial es la regla 33 debido a que está en 3 dimensiones y por ende es posible su visualización. Posee solamente dos estados y la cantidad de elementos es de 30^3 . En la figura 2.1 se presenta el mapa de retorno, donde cada punto representa la densidad para un tiempo. En la figura 2.2 se muestra el estado 1 en rojo y el 0 en azul; ya en las primeras 6 evoluciones del sistema donde se puede apreciar el patrón. En los tiempos 0 y 3 se puede observar el pico máximo de densidad, para pasar un punto intermedio de densidad en los tiempos 1 y 4 siguiente y posteriormente el mínimo en 2 y 5. Este patrón se repite indeterminadamente, sin embargo, las densidades no son exactamente iguales, si bien son similares.

De acuerdo a las características generales del comportamiento colectivo antes mencionadas el comportamiento colectivo no trivial en AC se puede observar siempre y cuando se tenga en cuenta las densidades de población, es decir, el tipo de comportamiento colectivo no es visual y así la posición del observador queda restringida a un plano meramente numérico. En cuanto al ambiente en el que se desenvuelve un AC es inexistente, dado que el AC mismo no interactúa con ningún otro sistema si bien es posible aumentar el número de estados de un AC o manejarlo junto con otros modelos como bien podrían ser los agentes. La densidad necesaria para observar el comportamiento colectivo no trivial en AC es variable, pero es seguro que entre mayor sea la cantidad de elementos en el sistema el fenómeno es más fácil de visualizar. Entonces los espacios con más de diez mil elementos son ideales. Finalmente, la sincronización en los AC es un tema de controversia, más aun en el comportamiento colectivo no trivial, pues el fenómeno se presenta muy rápido como para considerar que la información ha viajado por todo el sistema y se ha sincronizado de esta manera, no obstante el fenómeno ocurre aun sin una clara sincronización.

Como se ha podido observar el comportamiento colectivo no trivial cumple con los puntos observados para el caso general de un comportamiento colectivo, aun a pesar

de no tener una explicación clara a cada aspecto.

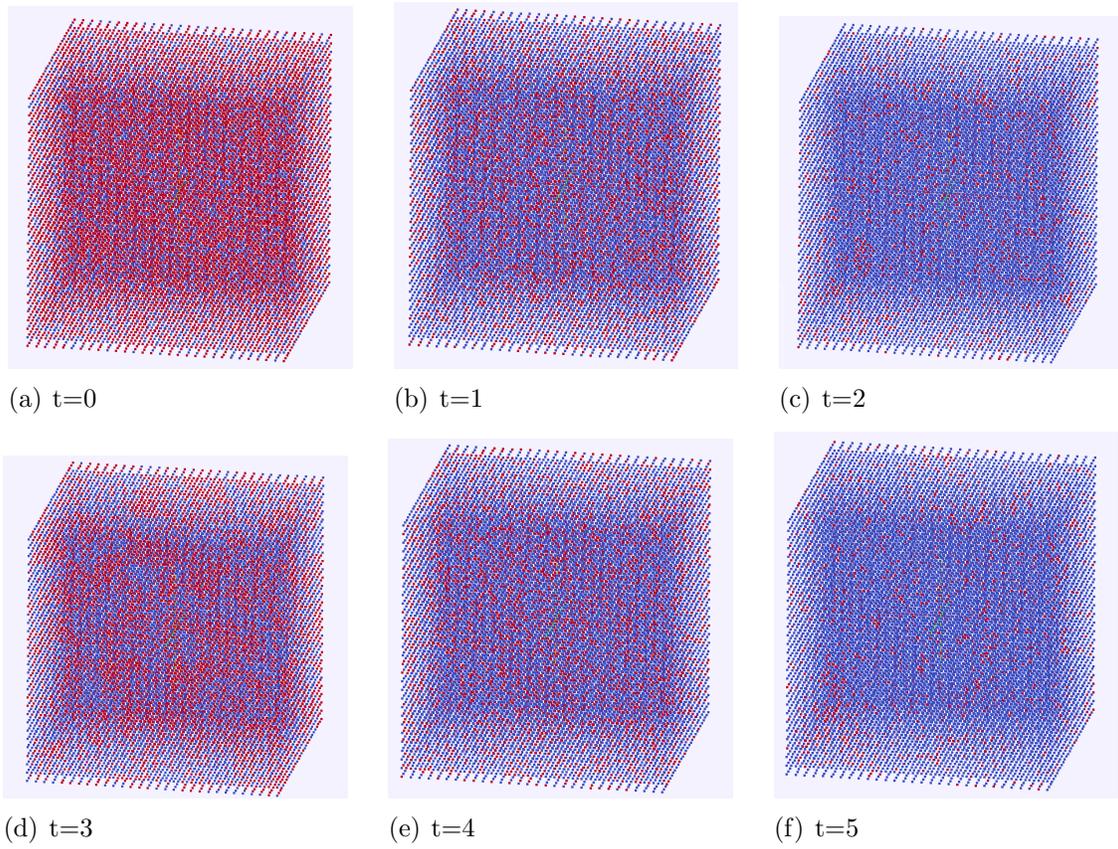


Figura 2.2: Primeras 6 evoluciones de la regla 33 en 3 dimensiones.

2.3 Autómata Celular

El concepto de autómata celular no ha tenido cambios significativos a lo largo de su historia debido a que la definición que dejó von Neumann era clara y concisa en cuanto a su propósito y al rigor matemático. No obstante, es un concepto que puede ser utilizado en muchas áreas de la ciencia y es esta misma versatilidad la que le permite ser modificado para servir a propósitos más grandes de los que fue ideado inicialmente.

De esta manera aparecen modelos con reglas no deterministas, asíncronas o probabilísticas. Sin embargo, lejos de afectar el estudio propio de los AC ayuda en la diversificación y así en su propia difusión y estudio. Entonces, el hecho de que existan estas variantes y tantas definiciones como áreas de uso, hace confuso los lineamientos que deben seguirse para definir y utilizar los AC.

En el presente trabajo se utilizan como un modelo, el cual presenta un fenómeno particular, que no tiene una representación física definida. De este modo estamos hablando de un tratamiento abstracto o matemático para lo cual es necesario dejar en claro la terminología. El concepto de AC que se utilizará, así como su notación a lo largo de la tesis será definida en el presente capítulo, siendo éstas basadas en los trabajos de [Codd, 1968; Gutowitz, 1991; Voorhees, 1996; Wolfram, 2002].

2.3.1 Dimensión y vecindad

Un AC es un conjunto de células que evolucionan al unísono a través de una función de transición. Una célula es un elemento individual e indivisible que posee un espacio dentro de una dimensión dada y puede tener un estado cualesquiera de un conjunto de estados. También, posee una vecindad compuesta usualmente por las células aledañas y que es usada para crear una función de transición.

La dimensión que puede tener un AC es comúnmente definida como d tal que $d \in \mathbb{Z}^+$. En los modelos prácticos las dimensiones que suelen usarse van de la primera a la tercera debido a las limitaciones físicas. Es así que la mayoría de los AC estudiados entran en este rango de dimensiones, no obstante existe el estudio en altas dimensiones. De la mano de la dimensión está la vecindad de la célula. Para poder definir una vecindad es necesario proporcionar una forma geométrica a la célula, al menos hasta la tercera dimensión, y la misma se define en base a una célula llamada *célula central*, la cual es la célula a analizar.

Primera dimensión

Un punto en común en la forma de la célula es que entre ellas llenen el espacio dimensional, es decir hagan un teselado regular. Debido a esto en una dimensión

(1D) suelen utilizarse células cuadradas que forman una cinta.

Sea un conjunto ordenado de células S , y S_i una célula cualesquiera del conjunto llamada en adelante *célula central*. Se dice que la vecindad \mathcal{V}_i es la vecindad de la i -ésima célula; también debe cumplirse que $\mathcal{V}_i \subset S$, y dado que las células en \mathcal{V} son las células aledañas a la célula central S_i se puede calcular el número de células a través de la fórmula $2r + 1$, donde r es llamado el radio de la vecindad y es ilustrado en la figura 2.3. Finalmente, el conjunto de células \mathcal{V} se define como:

$$\mathcal{V} = \bigcup_{x=0}^r S_{i+x} \cup S_{i-x} . \quad (2.1)$$



Figura 2.3: Vecindad para AC en 1 dimensión.

Segunda dimensión

En la segunda dimensión (2D) existe una variedad más amplia de formas: cuadradas, triangulares y hexagonales. Pues son las únicas formas geométricas regulares que generan un teselado. No obstante, en el presente trabajo solo se utilizarán células cuadradas. Para más detalles sobre AC con otros tipos de células ver [Bays, 2009].

Al tener dos dimensiones se vuelven necesarios dos índices para identificar una célula; entonces, sea S el conjunto de células y $S_{(i,j)}$ la célula central. Su vecindad \mathcal{V} puede ser de muy diversas formas, pero son dos las más comunes: von Neumann y de Moore, ilustradas en 2.4; el número de células de una vecindad de Moore es $|\mathcal{V}^M| = 9$ y para la vecindad de von Neumann $|\mathcal{V}^N| = 5$. También existe un radio r para las vecindades de Moore y von Neumann, sin embargo es pocas veces utilizado debido a la complejidad que conlleva. Dicho radio es aplicado análogamente a la 1D.

Así, el conjunto de células de cada vecindad puede describirse como:

$$\mathcal{V}^N = \bigcup_{x=-1}^1 S_{(i+x,j)} \cup S_{(i,j+x)} , \quad (2.2)$$

$$\mathcal{V}^M = \bigcup_{x=0}^1 \bigcup_{y=0}^1 S_{(i+x,j+y)} . \quad (2.3)$$

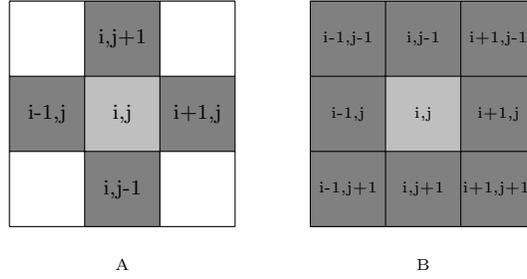


Figura 2.4: Vecindades para AC para 2 dimensiones. En A se muestra la vecindad de von Neumann; en B la vecindad de Moore.

Tercera dimensión

En la tercera dimensión (3D) es posible utilizar células cubicas. La vecindad puede ser de Moore o von Neumann adaptadas a la 3D, por lo cual cuentan con un mayor número de elementos. En la figura 2.3.1 se puede apreciar la forma de las vecindades en un espacio tridimensional.

Sea S el conjunto de células del espacio tridimensional y $S_{(i,j,k)}$ una célula cualesquiera del conjunto, también llamada célula central. El número de células de la vecindad de von Neumann y Moore es $|\mathcal{V}^N| = 7$, $|\mathcal{V}^M| = 27$, respectivamente. También existe un radio r para las vecindades de Moore y von Neumann, sin embargo es pocas veces utilizado debido a la complejidad que conlleva. Dicho radio es aplicado análogamente a la 1D. Finalmente, el conjunto de células de cada vecindad puede ser definido como:

$$\mathcal{V}^N = \bigcup_{x=-1}^1 S_{(i+x,j,k)} \cup S_{(i,j+x,k)} \cup S_{(i,j,k+x)} , \tag{2.4}$$

$$\mathcal{V}^M = \bigcup_{x=0}^1 \bigcup_{y=0}^1 \bigcup_{z=0}^1 S_{(i+x,j+y,k+z)} . \tag{2.5}$$

2.3.2 Más allá de 3D

Para dimensiones superiores a 3 es imposible una representación física, debido a lo cual solo se definen matemáticamente. Sin embargo, las vecindades que se utilizan siguen siendo la de Moore y von Neumann.

Sea entonces S el conjunto de células en una dimensión d , y $S_{(i_0,i_1,i_2,\dots,i_d)}$ una célula del espacio d -dimensional llamada célula central. El número de células para la vecin-

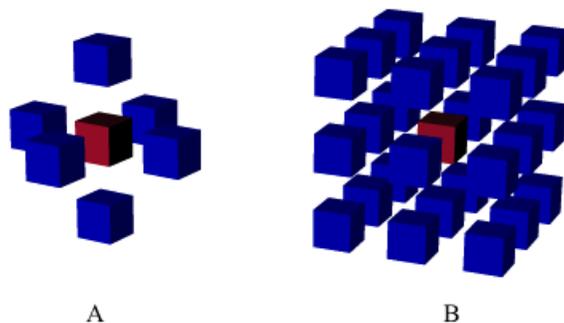


Figura 2.5: Vecindades en 3D. En A la vecindad de von Neumann y la vecindad de Moore en B.

dad de von Neumann se define mediante:

$$|\mathcal{V}^N| = 2d + 1 , \tag{2.6}$$

y el conjunto de células que conforman la vecindad es:

$$\mathcal{V}^N = \bigcup_{y=0}^d \bigcup_{x=-r}^{+r} S_{(i_0, \dots, i_{y+x}, \dots, i_d)}^y , \tag{2.7}$$

donde r es el radio utilizado para la vecindad. En el presente trabajo se utilizará siempre un radio $r = 1$. Por otro lado, el número de células en la vecindad de Moore para la d -ésima dimensión esta dado por:

$$|\mathcal{V}^M| = (2r + 1)^d , \tag{2.8}$$

donde r es el radio de acción de la vecindad, en el presente trabajo $r = 1$. Entonces el conjunto de células que presenta la vecindad es:

$$\mathcal{V}^M = \bigcup_{x=0}^r \bigcup_{y=0}^d S_{(i_0, \dots, i_{y+x}, \dots, i_d)} . \tag{2.9}$$

2.3.3 Estados y función de transición

El número de estados que se elige para la regla define en gran parte la complejidad del sistema final. El primer AC diseñado por John von Neumann tenía 29 estados, lo que hacía al sistema realmente complejo. Dicha complejidad fue con los años disminuyendo hasta que finalmente John H. Conway diseñó famoso *The Game of Life* que sólo utiliza 2, y logra conservar características importantes tal como la universalidad.

El hecho de que con pocos estados pudiese realizarse un AC complejo radica en la manera de utilizar dichos estados, es decir, la manera en la que se define la regla.

Sea Q tal que $Q \in \mathbb{Z}^+$ el conjunto de estados que pueden tomar las células. La célula toma el valor del estado junto con su posición dentro del espacio como identidad, de esta manera no es posible tener en un mismo tiempo dos células iguales.

Sea entonces $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ una función de transición de AC, donde \mathbb{A} , el dominio de la función, es el conjunto de vecindades posibles de acuerdo a la vecindad previamente establecida en combinación con el conjunto de estados Q ; y el codominio \mathbb{B} es el conjunto de estados siguientes de cada vecindad.

El número de vecindades depende de el número de estados y el número de vecinos en la vecindad elegida, de tal manera que:

$$|\mathbb{A}| = |Q|^{|\mathcal{V}|}, \quad (2.10)$$

donde al observar la ecuación 2.10 se puede apreciar que asemeja a un sistema numérico posicional base $|Q|$ donde $|\mathcal{V}|$ es la cantidad de dígitos que pueden utilizarse. Así, para listar todas las posibles vecindades solo es necesario listar desde cero base Q con $|\mathcal{V}|$ dígitos hasta el máximo valor posible base Q con $|\mathcal{V}|$ dígitos, en orden lexicográfico.

Sea $Q = \{0, 1\}$ y $r = 1$, entonces $|\mathcal{V}| = 2r + 1 = 3$ en un AC unidimensional. El conjunto \mathcal{V} se obtiene mediante:

$$\mathcal{V} = \bigcup_{x=0}^r S_{i+x} \cup S_{i-x} = \bigcup_{x=0}^1 S_{i+x} \cup S_{i-x} = \{S_{i-1}, S_i, S_{i+1}\}, \quad (2.11)$$

finalmente, en la tabla 2.1 se muestra como se combina dicha vecindad con los estados posibles.

Por otro lado, el codominio \mathbb{B} es el conjunto de estados siguientes de cada vecindad donde $\mathbb{B} \in Q$. Entonces la función de transición es siempre sobreyectiva, donde cada vecindad tiene un estado al que puede pasar la célula central al siguiente tiempo. Debe cumplirse que $|\mathbb{A}| = |\mathbb{B}|$. Continuando con el ejemplo, en la tabla 2.1 se muestra también el conjunto \mathbb{B} elegido de manera arbitraria, pues al final el estado al que debe pasar cada célula central depende estrictamente del objetivo del AC.

Reglas totalísticas

Stephen Wolfram define una regla totalística como aquella que hace uso de todas las células que comprenden la vecindad, y semi-totalística a aquellas que dejan fuera a la célula central. Además, Wolfram proporciona una notación particular para lo que llamó el AC elemental, la cual será mostrada a continuación.

A	B
000	0
001	1
010	0
011	0
100	1
101	1
110	0
111	0

Tabla 2.1: Ejemplo de una regla de AC unidimensional. A son las vecindades del AC y B el estado al que pasa cada célula central.

Un AC unidimensional con $r = 1$ y $Q = \{0, 1\}$ es el AC totalístico más simple, y sus reglas son nombradas mediante números decimales desde la regla 0 hasta la regla $|Q|^{|A|} = 2^{2^{(2r+1)}} = 255$, que es el número de reglas posibles con dicha combinación de estados y vecindad.

El nombre de la regla hace referencia a su representación en binario cuando el conjunto B está ordenado con respecto al conjunto A, donde la primer vecindad es el cero binario hasta $|A|$ en binario. En la tabla 2.2 se ejemplifica una regla, donde tomando el conjunto B en el orden de las vecindades se puede apreciar que: $00010110_2 = 22_{10}$.

Esta notación puede ser extendida para AC con $|Q| > 2 \vee r > 1 \vee d > 1$, tomando las consideraciones necesarias. Para un aumento en el radio solo es necesario considerar vecindades más extensas y un mayor número de reglas. Si el aumento es de estados entonces se inflinge un cambio de la notación binaria a una notación $|Q|$ -aria; e. g., si $|Q| = 3$ las vecindades y reglas serán números en base 3. Por otro lado, si se cambia la dimensión entonces es necesario realizar una convención con respecto al manejo de las células y su orden lineal, pues al final, todas las vecindades son representadas linealmente.

En una vecindad de von Neumann para cada dimensión aumenta dos células, una superior y otra inferior a la célula central, más la misma célula central. Sea S un conjunto de células en un espacio d -dimensional y $S_{(i_0, \dots, i_d)}$ una célula del espacio, se puede realizar el orden de la siguiente manera:

$$S_{(i_0+1, i_1, i_2, \dots, i_d)} S_{(i_0-1, i_1, i_2, \dots, i_d)} S_{(i_0, i_1+1, i_2, \dots, i_d)} S_{(i_0, i_1-1, i_2, \dots, i_d)} \tag{2.12}$$

$$S_{(i_0, i_1, i_2+1, \dots, i_d)} S_{(i_0, i_1, i_2-1, \dots, i_d)} \cdots S_{(i_0, i_1, i_2, \dots, i_d+1)} S_{(i_0, i_1, i_2, \dots, i_d-1)} S_{(i_0, i_1, i_2, \dots, i_d)}$$

Si, por ejemplo, $d = 3$ entonces una célula del espacio S se representa como $S_{(i_0, i_1, i_2)}$, su vecindad quedaría ordenada de forma lineal como:

$$S_{(i_0+1, i_1, i_2)} S_{(i_0-1, i_1, i_2)} S_{(i_0, i_1+1, i_2)} S_{(i_0, i_1-1, i_2)} S_{(i_0, i_1, i_2+1)} S_{(i_0, i_1, i_2-1)} S_{(i_0, i_1, i_2)} \quad (2.13)$$

Dicha notación para la representación de vecindades de von Neumann es la utilizada en la presente tesis. Sin embargo, la vecindad de Moore también debe representarse linealmente.

El orden que adquieren las vecindades de Moore es a través de las permutaciones con repetición, es decir ${}_{|Q|}P'_{|\mathcal{V}|}$, lo que hace que existan $|Q|^{|\mathcal{V}|}$ vecinos para cada célula. La manera de listar dichas vecindades es listar las permutaciones en orden lexicográfico descendente.

$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$
000 \rightarrow 0
001 \rightarrow 0
010 \rightarrow 0
011 \rightarrow 1
100 \rightarrow 0
101 \rightarrow 1
110 \rightarrow 1
111 \rightarrow 0

Tabla 2.2: Regla 22 de acuerdo a la notación de Wolfram.

Reglas Aditivas

Una regla aditiva es aquella en la que el conjunto \mathbb{B} es calculado a través de la suma de los estados de los elementos de la vecindad. Los estados de las células de la vecindad \mathcal{V} se suman, siendo esta operación mod $|Q|$, obteniendo así el estado siguiente de la célula central de dicha vecindad.

Como ejemplo sea $Q = \{0, 1, 2\}$, $d = 1$ y $\mathcal{V} = \{S_{i-1}, S_i, S_{i+1}\}$. El conjunto \mathbb{A} se muestra en la tabla 2.3 donde para cada vecindad le corresponde un elemento del conjunto \mathbb{B} calculado mediante la adición modular de los elementos de \mathbb{A} , o bien $x \in \mathbb{B} | x = (S_{i-1} + S_i + S_{i+1}) \bmod |Q|$.

Reglas similares a *Life*

Debido a la popularidad e importancia de la regla *The Game of Life* o simplemente *Life*, posterior a su aparición se comenzó a realizar reglas con un esquema parecido. Existen dos formas de observar la regla *Life* desde el punto de vista de la definición formal, ambas aprovechando su carácter binario.

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
A	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
B	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0

Tabla 2.3: Ejemplo de regla aditiva para $Q = \{0, 1, 2\}$, $d = 1$ y $\mathcal{V} = \{S_{i-1}, S_i, S_{i+1}\}$. Las vecindades estan colocadas de manera vertical, debiendo leerse de arriba hacia abajo.

El primero está basado en la analogía presentada por [Berlekamp *et. al.*, 1982], donde cada célula es un individuo vivo (estado 1) o muerto (estado 0), y se necesita un número específico de individuos alrededor para que éste nazca, muera o bien, siga vivo o muerto según sea el caso. Entonces una regla puede presentarse como:

$$R_{a_1, a_2, \dots, a_i / b_1, b_2, \dots, b_i} \tag{2.14}$$

Donde a_1 es el ambiente en que vive la célula o bien el número necesario de elementos en valor 1 o “vivos” en la vecindad para que la célula central continúe con vida; por el otro lado, b_1 representa la “fertilidad” de la célula, es decir, el número de elementos vivos en la vecindad para que, de estar la célula central muerta o en estado 0, ésta pueda pasar a estado 1 o vivo al siguiente tiempo; puede haber i condiciones de ambiente o fertilidad. En cualquier otro caso la célula central pasará a estado 0 o muerto.

También es posible definir la regla solamente como un rango, donde se tiene un límite superior o máximo de células vivas, y otro inferior o mínimo. Entonces, cualquier vecindad con una cantidad fuera de dicho rango hará pasar a su célula central a un estado muerto. La regla se suele representar de la siguiente manera:

$$R_{S_{min}, S_{max}}^{|\mathcal{V}^{N,M}|} \tag{2.15}$$

donde R es la regla, $|\mathcal{V}^{N,M}|$ es la cantidad máxima de elementos para la vecindad ya sea de von Neumann o de Moore, S_{min} es la cota inferior y S_{max} es la cota superior, siendo $0 \leq S_{min} \leq S_{max} \leq |\mathcal{V}^{N,M}|$. Es esta notación la que se utilizará para reglas con dimensión $d > 1$, que es la que también utilizan [Chaté & Manneville, 1991].

Evolución

Hasta ahora se ha descrito un AC por sus partes individuales y la relación entre éstas, no obstante, es necesario que todos los elementos se mezclen y “evolucionen” a partir de un conjunto de células con un conjunto de estados predeterminados.

Llamaremos *evolución* a la aplicación de la función de transición global $F : S \rightarrow S$ sobre un estado global E_t , donde el resultado de dicha aplicación es un estado global E_{t+1} , o bien:

$$E_{t+1} = F(E_t) \tag{2.16}$$

un estado global E_t son los estados del conjunto de células S para un tiempo t :

$$E_t = \{S_0^t, S_1^t, S_2^t, \dots, S_{|S|}^t\} , \tag{2.17}$$

así, al aplicar F a un estado global cualquiera E se aplica f a cada célula de dicho estado global, es decir:

$$F(E_t) = f(S_0^t)f(S_1^t)f(S_2^t) \dots f(S_{|S|}^t) . \tag{2.18}$$

Al final se tiene un conjunto de estados globales $\{E_0, E_1, E_2, \dots, E_k\}$, donde k es el número de evoluciones del sistema.

Entonces, y a manera de resumen, un autómata celular es un sistema dinámico discreto que, de acuerdo a lo detallado hasta ahora puede ser representado por la quintupla $(Q, d, \mathcal{V}, E_0, f)$, donde:

- $Q \in \mathbb{Z}^+$ es el conjunto finito de estados.
- d es un número entero que representa la dimensión del AC.
- \mathcal{V} que es el conjunto vecindad que posee cada célula.
- E_0 es el estado global inicial del AC.
- $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ es la función local de transición, donde \mathbb{A} es el conjunto de vecindades y \mathbb{B} el conjunto de estados finales.

Capítulo 3

Análisis estadísticos

Los autómatas celulares (AC) no fueron estudiados a través de métodos estadísticos hasta que Wolfram publico su artículo *Statistical Mechanics of Cellular Automata* en 1983. En él Wolfram describe por vez primera a los AC como modelos que pueden ser interpretados como sistemas masivos de información, con lo cual era posible medir la entropía del sistema, media, moda, etc. De este modo, un seguimiento a los estudios de mallas de gas que se habían realizado previamente y que habían planteado a los AC como un modelo capaz de representar sistemas con grandes cantidades de partículas y mediante éste conseguir información general, es decir, una estadística.

Después del análisis estadístico de Wolfram, que culminaría en su renombrada clasificación, otros investigadores utilizaron diferentes herramientas y puntos de vista para analizar al autómata celular ya no por sus partes, sino por el comportamiento que presentaban los grandes espacios de evoluciones. Es el caso de Chaté y Manneville que utilizan la teoría de puntos críticos para proponer una clasificación mediante este modelo, argumentando que es completamente metódico a diferencia del propuesto por Wolfram. A pesar de tal argumento en su trabajo comparan su clasificación con la de Wolfram como punto de referencia. No obstante el método utilizado encontraron discrepancias entre el modelo y las simulaciones, lo que conllevó al descubrimiento del comportamiento colectivo no trivial.

La teoría de campo medio utilizada por Chaté y Manneville es tomada por Gutowitz y Victor y generalizada en lo que llamaron la teoría de estructura local. En dicha teoría se divide el espacio de evoluciones en bloques, donde para cada uno se calcula independientemente su siguiente estado probable, para después unir los resultados de los bloques y obtener un resultado más preciso del estado global siguiente. A pesar de la exactitud que presenta fue descartado para grandes espacios de evoluciones debido al gasto computacional que presentaba [Gutowitz *et. al.*, 1987].

Son estos modelos los que permiten un estudio con independencia de la dimensión y sin aumentar significativamente el cálculo a realizar, además de ser de igual manera independientes de la regla que se utilice, lo que favorece la simpleza y velocidad

del trabajo. Una característica más de estos modelos es que con ellos se pretende conocer el comportamiento general del sistema sin realizar las evoluciones, *id est* un análisis *a priori*. Del otro lado, el análisis de varianza requiere que se realicen los experimentos y a partir de ellos observa cómo es el comportamiento, es decir, un análisis *a posteriori*.

3.1 Teoría de campo medio

Posterior al análisis realizado por Wolfram, comenzó un estudio orientado a la dinámica global a través de métodos estadísticos de los autómatas celulares [Wolfram, 1983]. Dentro de los trabajos existentes resalta por sus resultados el estudio de Chaté y Manneville, donde utilizan la teoría de puntos críticos [Chaté & Manneville, 1992]. Sus trabajos fueron basados en el análisis de AC mediante la teoría de campo medio. Dicha teoría es de vital interés pues ofrece una manera simple de analizar el comportamiento global de los AC.

En la mecánica estadística se estudian los sistemas físicos a través de una visión cuantitativa de las cualidades de las partículas, que componen el sistema que se está estudiando. En dicho enfoque existen **microestados** y **macroestados**. Los primeros se conforman a través de las características de los elementos primitivos del sistema, como son el espín de los átomos o las fuerzas Van der Waals en las moléculas. Los segundos se componen a partir de la observación estadística de los microestados del sistema que se estudia. De esta manera se pueden utilizar herramientas como el promedio, la media aritmética, la desviación estándar, la esperanza, y varianza. Además, Boltzman ofrece una definición estadística de la entropía, que constituye la base de los estudios en la mecánica estadística [Uznov, 1993].

La teoría de campo medio nace del estudio de sistemas físicos, en particular aquellos asociados con campos ferromagnéticos. En estos sistemas se utiliza el concepto de microestado y macroestado, de tal manera que los átomos del material son las partículas a estudiar y el grado de libertad del espín de dicho átomo es el microestado. Los macroestados representan el campo magnético del material estudiado y se conforma de la interrelación de los microestados [Ma, 1976].

Un sistema ferromagnético tiene un grado de complejidad muy elevado. Tan solo el grado de libertad del espín de los átomos llega a tener magnitudes de 10^{23} estados. Por lo cual se buscó un método simple de análisis. Es entonces que la teoría de campo medio surge inicialmente como la media aritmética del sistema, sin tomar en cuenta las interacciones entre los propios microestados. Esta característica sería agregada posteriormente culminando en la teoría que hoy se conoce [Uznov, 1993].

Así, un AC se puede observar desde la visión de la mecánica estadística dadas sus propiedades intrínsecas. Haciendo una analogía con los sistemas ferromagnéticos las células serían los átomos, los grados de libertad del espín denotarían el conjunto finito

de estados. De la interacción de las células a través de la función local de transición se obtienen los estados globales del sistema o bien macroestados de acuerdo a la analogía.

3.1.1 Definición para dos estados

Entonces es viable utilizar la teoría de campo medio para observar características globales en los AC. En 3.1 se define el campo medio para AC con dos estados. Esta definición se ha tomado de los trabajos de Gutowitz [Gutowitz *et. al.*, 1987]:

$$p_{t+1} = \sum_{i=1}^{S^p} f(S_i^p) \cdot p_t^v \cdot (1 - p_t)^u, \quad (3.1)$$

donde, p es probabilidad, S^p es el conjunto de todas las vecindades del AC, v es la cantidad de células con valor 1 y u con valor 0 en S_i^p . A continuación se presenta un ejemplo del uso de la teoría de campo medio. El AC utilizado se define como $(S = \{0, 1\}, d = 1, \mathcal{V} = \{S_{i-1}, S_i, S_{i+1}\}, f)$, donde x_i es la célula central de la vecindad y f se define en la tabla 3.1, que es la regla 110 en la notación de Wolfram.

$f(S^p) \rightarrow S$
000 \rightarrow 0
001 \rightarrow 1
010 \rightarrow 1
011 \rightarrow 1
100 \rightarrow 0
101 \rightarrow 1
110 \rightarrow 1
111 \rightarrow 0

Tabla 3.1: Función de transición para la regla 110.

A continuación se utiliza la ecuación 3.1 con la regla 110. Primero se muestra en las ecuaciones 3.2 la manera de sustituir y obtener la solución para cada vecindad. Finalmente, se obtiene el polinomio de segundo grado que se muestra en la ecuación 3.3. La ecuación 3.3 es recursiva, por lo cual es posible calcular el comportamiento a cualquier tiempo a partir de un estado inicial. Además, se puede sustituir $(1 - p)$ por q . Haciendo esto el polinomio obtenido guarda una gran similitud con los polinomios de Bernstein. McIntosh hace notar este detalle y realiza un estudio basado en las características que presentan los polinomios de Bernstein en [McIntosh, 2009].

En la figura 3.1 se presenta la curva formada por la ecuación 3.3 junto con la función identidad a través de la cual se obtiene información pertinente sobre el comportamiento de la regla. De acuerdo a la teoría de la criticalidad la intersección entre

la función identidad y la curva que representa el sistema es un punto crítico. En el caso de la regla 110 el punto crítico es un punto atractor, que hace que el sistema tienda a la densidad de la intersección, es decir a 0.618034.

$$\begin{aligned}
 f(000)p_t^0(1-p_t)^3 &\rightarrow 0 & + \\
 f(001)p_t^1(1-p_t)^2 &\rightarrow p_t(1-p_t)^2 & + \\
 f(010)p_t^1(1-p_t)^2 &\rightarrow p_t(1-p_t)^2 & + \\
 f(011)p_t^2(1-p_t)^1 &\rightarrow p_t^2(1-p_t) & + \\
 f(100)p_t^1(1-p_t)^2 &\rightarrow 0 & + \\
 f(101)p_t^2(1-p_t)^1 &\rightarrow p_t^2(1-p_t) & + \\
 f(110)p_t^2(1-p_t)^1 &\rightarrow p_t^2(1-p_t) & + \\
 f(111)p_t^3(1-p_t)^0 &\rightarrow 0 & \\
 & & = 2p_t(1-p_t)^2 + 3p_t^2(1-p_t)
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

$$p_{t+1} = 2p_t(1-p_t)^2 + 3p_t^2(1-p_t) \tag{3.3}$$

Por otro lado, al realizar el experimento con diferentes densidades se puede comprobar que la predicción es correcta. La manera de graficar los resultados es a través de un mapa de retorno. Los mapas de retorno toman la densidad del sistema en el tiempo t y en $t+1$ y lo grafican como un punto en el plano cartesiano donde t es el valor en las abscisas y $t+1$ las ordenadas. En la gráfica existirán tantos puntos como

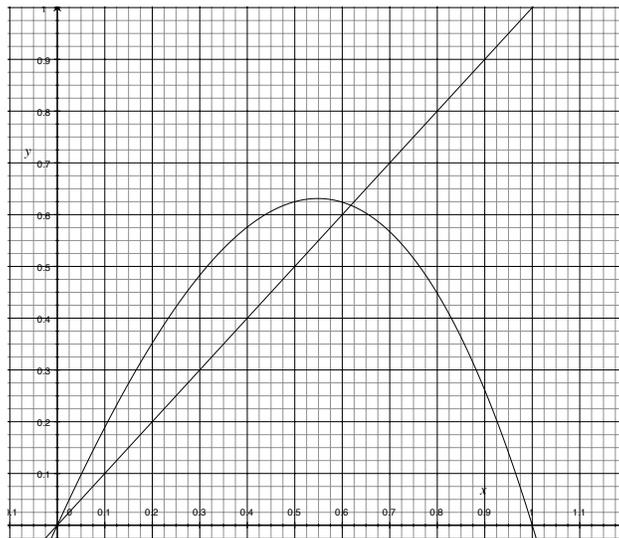


Figura 3.1: Polinomio de campo medio para la regla 110.

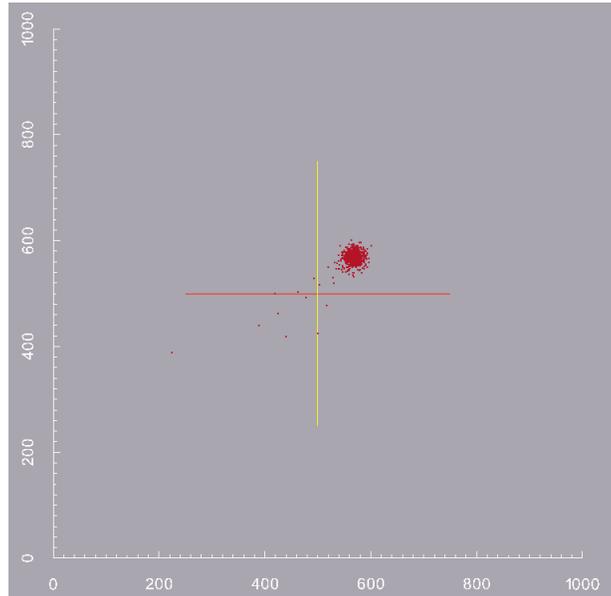


Figura 3.2: Mapa de retorno para la regla 110 para una densidad inicial de 0.75 y para 1000 evoluciones.

evoluciones se hayan realizado en el experimento. El mapa de retorno de la regla 110 se presenta en la figura 3.2.

3.1.2 Definición para n estados

En la ecuación 3.4 se presenta una generalización de la teoría de campo medio con la cual es posible analizar AC de más de dos estados. Se propone dicha generalización debido al creciente interés en el uso de AC para el modelado de sistemas y, dado que muchos sistemas poseen más de dos estados es necesario un método de análisis para tales sistemas.

$$p_j^{t+1} = \sum_{i=1}^{S^\rho} f(S_i^\rho) \prod_{j=0}^{|S|} q_j^{\alpha(S_j, S_i^\rho)} \quad (3.4)$$

En 3.4 se utiliza q_j como p_j^t ; α es una función que toma la vecindad S_i^ρ y el estado S_j y regresa la cantidad de elementos S_j existentes en S_i^ρ ; y finalmente, $|S|$ es la cardinalidad de S . Con estos cambios se hará necesario tener una ecuación de predicción de la densidad por cada estado existente, el mismo que depende de las densidades del tiempo anterior del conjunto de estados restante.

Supongamos que se tiene un AC donde ($S = \{0, 1, 2\}$, $d = 1$, $\rho = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$, f), donde f se muestra en la tabla 3.1.2. Es este el AC más sencillo con tres estados, no obstante la cantidad de vecindades que presenta son $3^3 = 27$, por lo que su regla

de evolución tiene 27 elementos. Para el ejemplo se usará la regla 112222011012-210110210012122. Donde el trit¹ más significativo es el perteneciente a la vecindad 000 y el menos significativo a la 222.

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
$f(S^\rho)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
S	1	1	2	2	2	2	0	1	1	0	1	2	2	1	0	1	1	0	2	1	0	0	1	2	1	2	2

Tabla 3.2: Función de transición para la regla 112222011012210110210012122₃. La primera fila muestra las vecindades de manera vertical para t y en la segunda fila se encuentra el estado de la célula central en $t + 1$.

Una vez teniendo definido el AC es posible utilizar la ecuación 3.4, desglosando el resultado en tres ecuaciones que permitirán calcular el valor probable de cada estado basado en los otros dos, tal como se muestra en 3.5.

$$\begin{aligned}
 p_0^{t+1} &= \sum_{i=1}^{S^\rho} f(S_i^\rho) q_0^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} q_1^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} q_2^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} = \sum_{i=1}^{S^\rho} f(S_i^\rho) (1 - q_1 - q_2)^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} q_1^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} q_2^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} \\
 p_1^{t+1} &= \sum_{i=1}^{S^\rho} f(S_i^\rho) q_0^{\alpha(S_1, S_i^\rho)} q_1^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} q_2^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} = \sum_{i=1}^{S^\rho} f(S_i^\rho) q_0^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} (1 - q_0 - q_2)^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} q_2^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} \\
 p_2^{t+1} &= \sum_{i=1}^{S^\rho} f(S_i^\rho) q_0^{\alpha(S_2, S_i^\rho)} q_1^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} q_2^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} = \sum_{i=1}^{S^\rho} f(S_i^\rho) q_0^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} q_1^{\alpha(S_0, S_i^\rho)} (1 - q_1 - q_2)^{\alpha(S_0, S_i^\rho)}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Posteriormente cada ecuación es evaluada para cada vecindad posible tal como se realizón en el ejemplo para la regla 110, con el fin de obtener un polinomio de tres variables. El polinomio de la regla 112222011012210110210012122 se muestra en la ecuación 3.6.

$$q_0^3 + 2q_1^3 + 2q_2^3 + 2q_0^2q_1 + 4q_0q_1^2 + 4q_0q_1q_2 + 2q_1^2q_2 + 5q_1q_2^2 + 2q_0q_2^2 \tag{3.6}$$

3.2 Análisis de varianza

La estadística estudia la recolección, análisis e interpretación de datos. Es una área de la ciencia que se dedica al estudio de los modelos mediante los cuales es posible el

¹Elemento del sistema numérico base 3. Análogo al bit. Su nombre viene del ingles: **trinary digit**.

análisis de grandes cantidades de información, con el objetivo de poder interpretar o concluir un resultado concreto.

Existen dos ramas principales de la estadística; la descriptiva, que se dedica a la descripción mediante parámetros numéricos o visuales de la información proporcionada; algunos ejemplos son la media, la moda o la desviación estandar; y la inferencial, que se concentra en utilizar los datos proporcionados y aplicarles algún modelo de inferencia o predicción con el cual obtener patrones, que proporcionen más información de la que aparentemente existe; ejemplos de la estadística inferencial son la estimación, el análisis de varianza, la correlación y las series de tiempo.

Dos conceptos básicos al momento de utilizar la estadística son la muestra y la población. La población hace referencia al conjunto de todos los elementos que son objeto de estudio. En el caso de los autómatas celulares (AC) la población serían las células en cada estado, en particular los estados globales del autómata celular.

Por otro lado, una muestra es un subconjunto de la población. Usualmente se utilizan las muestras para poder obtener información pertinente a la población. La elección de una muestra suele ser un método crucial en los procesos estadísticos. A la elección de una muestra de la población se le llama muestreo y se puede realizar de manera probabilística y no probabilística. En el presente trabajo no se utilizará ningún tipo de muestra, pues se estará trabajando con poblaciones enteras.

La muestra y la población se utilizan en estadística para poder calcular entre otras cosas sus medidas de dispersión. Una medida de dispersión o de variabilidad es aquella medida en la que existe variación en una distribución, indicando por medio de un número si la variable se encuentra muy alejada de la media. Algunas medidas de dispersión son el medio rango, la varianza, la desviación estándar y la covarianza. El presente trabajo cubre el análisis de la varianza para autómatas celulares.

3.2.1 Varianza

El análisis de varianza (también conocido como ANOVA por su nombre en inglés *ANalysis Of VAriance*) se utiliza para verificar las diferencias existentes entre medias aritméticas de un conjunto de muestras. La varianza es el cuadrado de la desviación estandar y puede ser calculada a través:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X - M)^2}{N}, \quad (3.7)$$

donde X es el valor individual y M la media aritmética de la muestra, N es la cantidad de muestras y σ la desviación estandar que al elevarla al cuadrado, resulta en la varianza. En la fórmula anterior, el numerador se le conoce como la suma de cuadrados y se refiere a la suma de las diferencias de cada muestra con la media

aritmética de las mismas, elevadas al cuadrado previa adición. Por otro lado, al denominador también se le conoce como grados de libertad; en este caso se utiliza N dado a que debe considerarse todos los grados de libertad existentes pues el análisis propuesto es de toda la población de las muestras. Finalmente, en los experimentos que se realicen un valor alto en la varianza indica que existe una gran variación entre los elementos de las muestras utilizadas.

3.2.2 Análisis de varianza en AC

En un AC existen diversos momentos en los cuales se puede realizar un análisis de varianza. Por practicidad se utilizará un ejemplo genérico.

Sea Z un autómata celular, $\{E_0, E_1, E_2, \dots, E_k\}$ el conjunto de estados globales derivado de la evolución de Z y cada estado global es dividido en subconjuntos, de la siguiente manera: $\{e_0, e_1, e_2, e_3\} \subset E_x \mid e_0 \cup e_1 \cup e_2 \cup e_3 = E_x \wedge \bigcap_{i < 4} e_i = \emptyset$, donde E_x es cualquiera de los k estados globales de Z .

De esta manera, se ha disectado el sistema gracias a lo cual se tienen los elementos necesarios para realizar diversos análisis de varianza.

ANOVA global

Con un análisis poblacional del sistema se pretende comprender el comportamiento global del AC, para lo cual son necesarios los estados globales, tomados como muestras, donde las diferencias entre estos permitirán observar los cambios que tiene a lo largo de la evolución. Para calcular la varianza de, por ejemplo, el AC Z se puede realizar de la siguiente manera:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=0}^k (\lambda_i - \Lambda)^2}{k} \quad (3.8)$$

donde λ es la media del estado global, Λ la media aritmética de todos los estados globales y k el número de estados globales.

ANOVA espacial

Para poder conocer lo que sucede dentro de cada estado global E , es necesario utilizar los subconjuntos $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, mismos que se utilizarán como muestras en un análisis de varianza con el objeto de observar las diferencias entre el mismo estado global. El

mecanismo de cálculo es exactamente el mismo, con la diferencia de las muestras a analizar. Entonces, para el ANOVA espacial de Z se debe calcular:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=0}^l (\phi_i - \Phi)^2}{l} \quad (3.9)$$

donde, ϕ_i es la media aritmética del subconjunto e_i , Φ es la media de los subconjuntos y l es la cantidad de subconjuntos.

Puesto que este análisis es válido solo para un estado global dado, un análisis aun más exhaustivo comprendería ambos esquemas presentados. De esta forma, se desea tener un análisis de la varianza *dentro* de los estados globales a través de las evoluciones del sistema.

Es posible calcular la varianza espacial para cada estado global y posteriormente utilizar esta misma varianza para compararla con las varianzas de los demás estados globales. Finalmente, se podría buscar un patrón entre la varianza y el crecimiento o decrecimiento en la población.

Retomando la regla que ha sido objeto de estudio anteriormente, la regla 110, se han realizado evoluciones con una configuración inicial aleatoria con una densidad de 75% de elementos con valor uno. El espacio de evoluciones unidimensional ha sido partido en 4 bloques para de esta forma calcular el ANOVA espacial entre estos cuatro bloques.

En la figura 3.3 se muestra la serie de tiempo para el ANOVA espacial para la regla 110 durante 200 evoluciones. Al ser la regla 110 parte de lo que se denomina reglas complejas de acuerdo a la notación de Wolfram es normal que la gráfica sea inteligible, pues la configuración al ser en parte caos, la varianza entre los bloques a través del tiempo es heterogénea.

En las series de tiempo generadas por el ANOVA espacial es de importancia la visualización de patrones a lo largo de la serie, o bien que la serie converja a un punto particular. Para poder observar mejor los patrones o puntos de convergencia de la serie de tiempo se pueden utilizar métodos estadísticos como la media móvil. La media móvil es el cálculo de la media entre n elementos a cada lado del punto a calcular de la serie de tiempo tomando como central desde el primero hasta el último, logrando de esta manera una gráfica más suave y con ello más sencilla de leer. La gráfica con la media móvil calculada se muestra en la figura 3.4.

En muchas ocasiones aun al suavizar la serie de tiempo no se obtiene información realmente significativa, es por eso que se pueden realizar otro tipo de análisis, como son las autocorrelaciones. Las gráficas de autocorrelación, basada en la función de autocorrelación (ACF), permiten observar si una serie de tiempo posee o no elementos aleatorios. Para el estudio de AC el observar la aleatoriedad es un tema importante,

y más aun en el caso del comportamiento colectivo, pues es necesario saber si el fenómeno observado a través de la gráfica es una serie de eventos lógicos o simple azar. En una gráfica de autocorrelación, cuando los elementos son todos cero implica que la serie de tiempo es completamente aleatoria [StatSoft, 2012].

Por otro lado, con que un elemento sea significativamente diferente de cero se puede decir que ya no es causa del azar. Por otro lado, la gráfica de autocorrelación utiliza los valores inmediatos, y en ocasiones eso puede acarrear errores de correlación entre variables que no están directamente unidas por la variable del tiempo. Es decir, cuando los valores dentro de la serie de tiempo $t, t+1, t+2$ puedan parecer tener una correlación pues t y $t+1$ tiene correlación y también existe entre $t+1$ y $t+2$, no necesariamente existe entre t y $t+2$, o el caso contrario puede de igual manera ser cierto. En este caso, se utiliza la función de autocorrelación parcial (PACF), misma que verifica la existencia de una verdadera correlación entre tiempos no adyacentes [StatSoft, 2012]. La gráfica de autocorrelación y autocorrelación parcial para la regla 110 se presenta en la figura 3.5.

Las gráficas de ACF, PACF y media móvil son realizadas a través del software libre *Gretl* [Cottrell & Lucchetti, 2012].

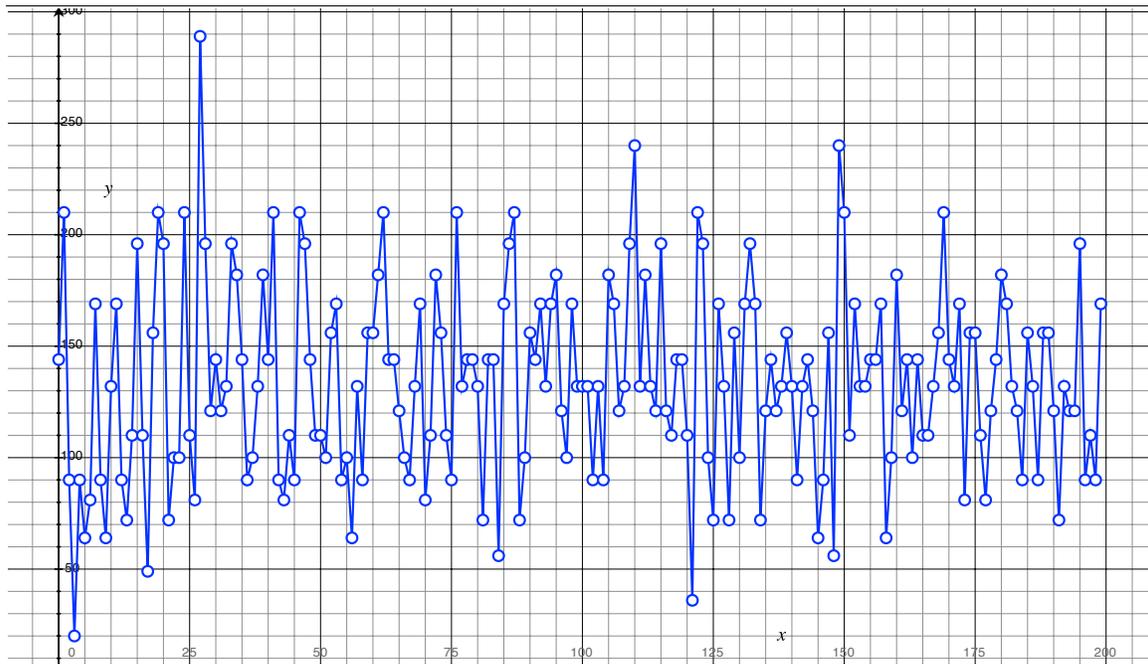


Figura 3.3: ANOVA espacial a lo largo de 200 evoluciones para la regla 110.

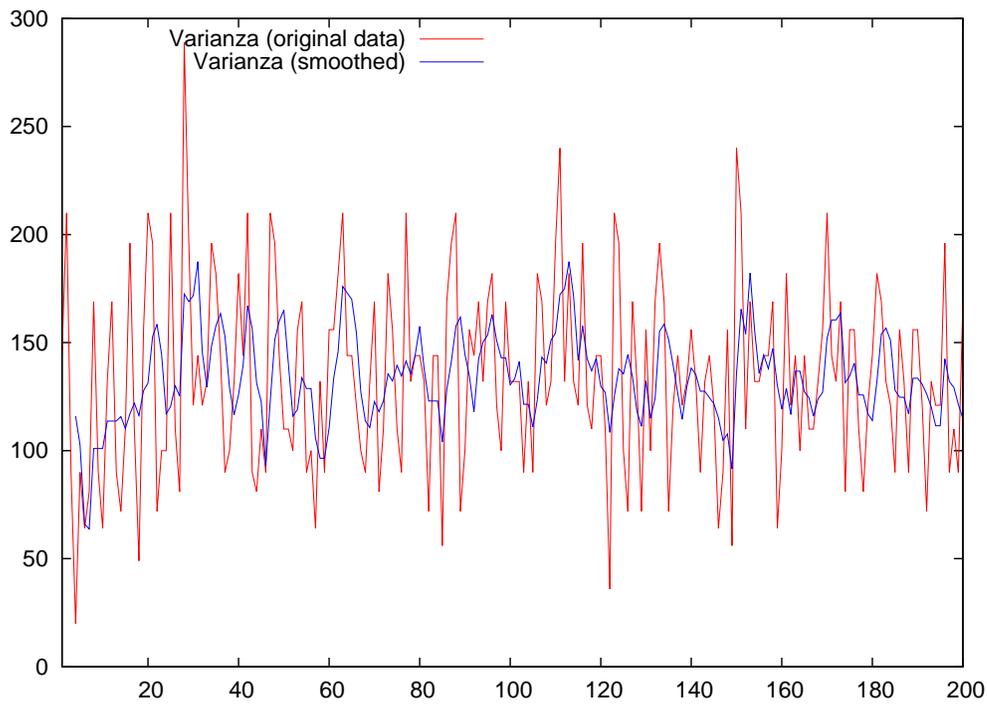


Figura 3.4: En rojo, ANOVA espacial a lo largo de 200 evoluciones para la regla 110. En azul, la misma gráfica suavizada a través de la media móvil con una ventana de 4 elementos.

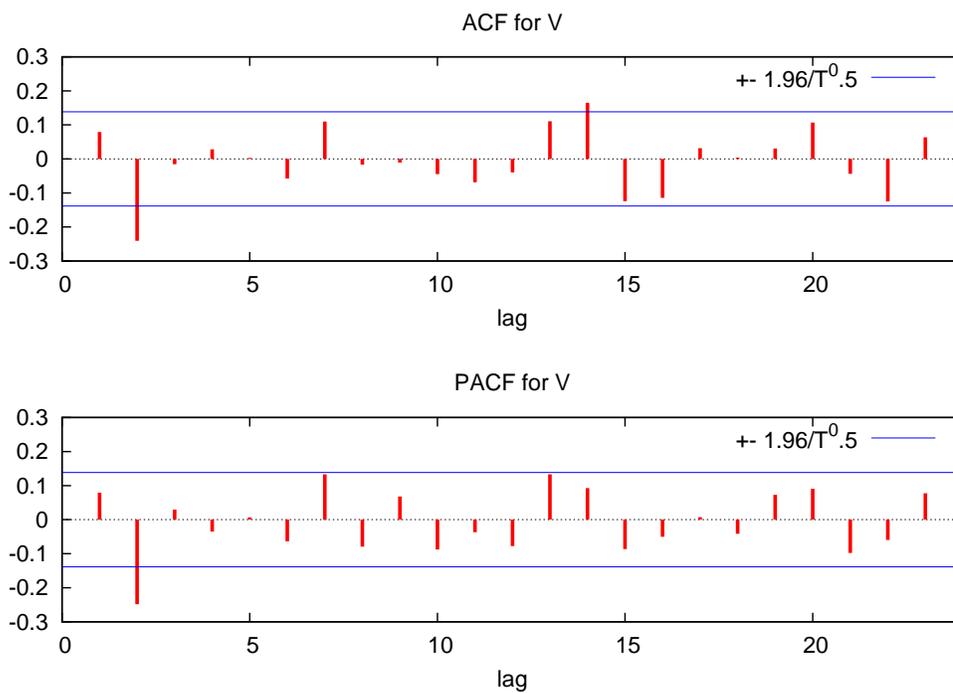


Figura 3.5: En la parte superior se muestra la función de auto correlación; en la inferior la función de auto correlación parcial.

Capítulo 4

Análisis no estadísticos

Existen en la literatura diversos análisis que se han diseñado y aplicado a los AC dependiendo del enfoque con el que se estudien. La mayoría de los estudios se han centrado ya sea en la forma de la regla de evolución o bien en el comportamiento global del sistema.

Algunos de los análisis existentes son capaces de clasificar las reglas de autómatas celulares (AC) a través de centrarse en diferentes aspectos del AC como puede ser la regla de evolución, que representa la interacción local del sistema; algunos ejemplos son los parámetros λ y Z . Otros fijan su atención en el análisis del comportamiento global del sistema, entre los que destacan los campos de atractores y la entropía. Y existe un último tipo de análisis que busca el eslabón entre la interacción local y el comportamiento global, como son los diagramas de *de Bruijn* que además permiten realizar búsquedas de preimágenes, patrones fijos y móviles.

Si bien todas estas medidas y análisis atacan cierta parte del AC cada uno tiene una complejidad diferente al momento de calcularse. Tal es el caso que los parámetros λ , Z y Θ pueden realizarse a AC en diferentes dimensiones y con una cantidad de estados arbitraria sin que el gasto computacional sea significativo [Voorhees, 1997]. Éste trabajo se enfocará solo al estudio mediante los parámetros λ y Z por ser los más relevantes. Por el contrario, calcular los campos de atractores o los diagramas de *de Bruijn* para AC diferentes a los unidimensionales es un tema que apenas está en vías de investigación.

En el presente capítulo se tratan algunos de los modelos de clasificación de reglas que pueden ser aplicados a los AC que presentan el fenómeno del comportamiento colectivo no trivial.

4.1 Clasificación de Wolfram

Después de analizar el comportamiento global de los autómatas celulares en una dimensión con dos estados y la vecindad mínima, Wolfram definió cuatro diferentes clases para ubicar cada una de las 128 reglas. El resultado fue conocido prontamente por la comunidad científica y aunque no todos lo aceptaron se comenzó a utilizar como referente [Wolfram, 2002; Wolfram, 1983].

Wolfram propone las siguientes categorías para AC:

- **Clase I.** Aquellas reglas que evolucionan a un estado homogéneo.
- **Clase II.** Las reglas que evolucionan a estructuras periódicas bien definidas.
- **Clase III.** Reglas que muestran patrones caóticos y aperiódicos.
- **Clase IV.** Son reglas que presentan patrones complejos y estructuras localizadas.

Dado que la clasificación está dada respecto al comportamiento global del sistema es quizá más sencillo observarlo en la figura 4.1. También, Wolfram encuentra una similitud entre sus clases y el comportamiento de los autómatas celulares en el campo de los sistemas dinámicos:

- **Clase I.** Reglas que evolucionan a puntos límite.
- **Clase II.** Reglas que evolucionan a ciclos límite.
- **Clase III.** Reglas que evolucionan a comportamientos caóticos, aquellos asociados a los atractores extraños.
- **Clase IV.** Reglas que efectivamente tienen transiciones largas y no poseen un análogo directo en sistemas dinámicos.

Aun a pesar de poder dar ejemplos claros para cada clase el caso contrario, es decir, la carencia de un procedimiento para establecer la clase de una regla dada, fue uno de los puntos más atacados en la clasificación de Wolfram.

Otro punto de discusión que desató la clasificación de Wolfram fue la manera de generalizarla para otros autómatas y más aun, distinguir claramente entre sus clases III y IV. Dicho problema ha sido tratado desde diferentes puntos de vista y con diversas herramientas pero no ha logrado ser solucionado, si bien algunos resultados se han aproximado no han logrado resolver el problema por entero.

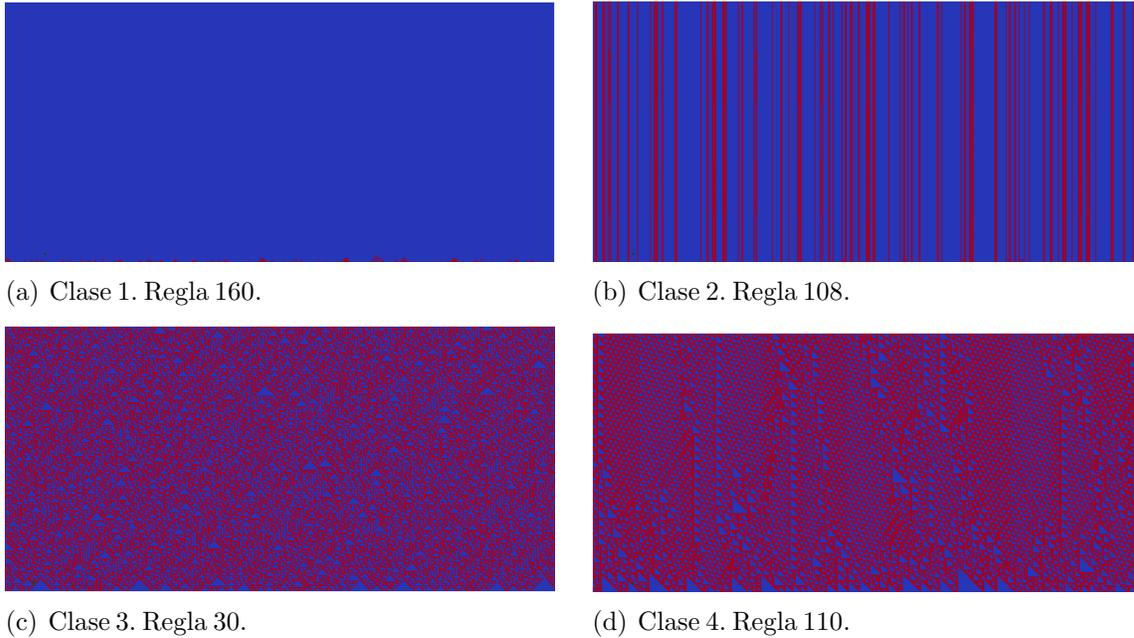


Figura 4.1: Clases de Wolfram. Las reglas están nombradas en la notación de Wolfram.

4.2 Otros análisis

4.2.1 El parámetro λ

En 1990 Langton propone un parámetro con el cual sería posible tener un acercamiento al problema de la clasificación de los AC, y un acercamiento al problema de la distinción de las clases III y IV de Wolfram [Langton *et. al.*, 1990; Langton, 1990; Mitchell *et. al.*, 1994].

Aun a pesar de la sencillez que presenta el análisis, éste permite clasificar reglas de AC con diferentes estados y dimensiones, pues está basado en la forma de la regla y no en el comportamiento global expresado en la evolución, si bien permite tener una idea aproximada de esta última.

Sea R una regla de AC definida como (Q, d, V, E_0, f) , donde $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$. El número de vecindades está definido como $|Q|^{|V|}$. También ha de definirse un estado inactivo $q_i \in Q$. Entonces, el parámetro λ se define como:

$$\lambda = \frac{|Q|^{|V|} - n}{|Q|^{|V|}}, \quad (4.1)$$

donde n es el número de veces que el estado q_i aparece en el codominio \mathbb{B} de la función de transición f . Así, el parámetro λ es básicamente la fracción de estados

activos en la función de transición. En el caso de un conjunto de estados binario se resume a la cantidad de elementos con valor 1 en el conjunto \mathbb{B} .

Dada la naturaleza de la función de transición y las posibles reglas que pueden surgir de las diferentes permutaciones del conjunto \mathbb{B} es necesario limitar el espectro de reglas que influyen en el parámetro. De esta manera es necesario restar la fracción de reglas que presentan el mismo comportamiento pero con diferentes estados de la siguiente manera:

$$0 \leq \lambda \leq 1 - \frac{1}{|Q|} \quad (4.2)$$

Los límites impuestos al parámetro λ son los casos en los que el conjunto \mathbb{B} es el más homogéneo para el caso del límite inferior y el más heterogéneo en el superior. Es decir, cuando $\lambda = 0$ la función de transición hará que todas las vecindades lleven el estado inactivo q_i ; por el contrario, al ser $\lambda = 1 - \frac{1}{|Q|}$ es el caso donde todos los estados están en igual de condiciones. Por lo tanto, el espectro de interés se encuentra dentro de dichos límites.

\mathbb{A}	000	001	010	011	100	101	110	111
\mathbb{B}	0	1	1	1	0	1	1	0

Tabla 4.1: Función de transición $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ de la regla 110.

Para el caso de $Q = \{0, 1\}$ los límites son $0 \leq \lambda \leq 0.5$. Entonces para valuar λ para la regla 110 debe calcularse n , que de acuerdo a la tabla 4.1 $n = 5$. Finalmente, el valor de λ para la regla 110 se obtiene de la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{2^3 - 5}{2^3} = \frac{3}{8} = 0.375 . \quad (4.3)$$

Una de las grandes ventajas de λ es que no necesita más que la función de transición y que ésta puede tener una cantidad de conjuntos indefinida, de la misma manera que no importa la dimensión en la que se encuentre siempre y cuando pueda listarse la regla de una manera alfanumérica basada en el conjunto de vecindades.

A través del parámetro λ se pueden encontrar reglas con comportamientos similares que pueden ser organizadas dentro de 6 categorías:

1. *Puntos fijos espacialmente homogéneos.* Todos los valores de entropía, información y patrones presentes son igual a cero.
2. *Puntos fijos espacialmente no homogéneos.* Se realiza un cambio global hacia un patrón definido. La entropía presente es finita debido que el patrón definido es aleatorio en un cierto grado, como resultado del estado inicial.

3. *Comportamiento periódico o comportamiento periódico variable.* Indica regiones con comportamiento periódico separadas por paredes estáticas entre éstos.
4. *Comportamiento caótico local.* Estas reglas producen caos entre las paredes, donde las paredes pueden ser estáticas o dinámicas a lo largo de la evolución.
5. *Comportamiento caótico.* La tasa de dispersión entre los patrones es alta, la entropía del sistema es alta.
6. *Comportamiento complejo.* Esta clase es característica por largas transiciones y complejos patrones espacio temporales, incluida la oscilación y propagación de estructuras.

La clasificación propuesta a través del parámetro λ clarifica detalles de la clasificación de Wolfram. A grandes rasgos, la clase uno anterior se corresponde con la clase I de Wolfram; las clases 2,3 y 4 comprenden la clase II de Wolfram; la clase 5 sería la clase III de Wolfram; y la clase 6 corresponde a la IV de Wolfram [Langton *et. al.*, 1990].

El parámetro λ solo es un reflejo del posible comportamiento de las reglas, de ninguna manera es una medida exacta y mucho menos hay forma de conocer los límites entre las clases a lo largo de los posibles valores de λ .

Para poder establecer la clasificación de una regla es necesario observar su comportamiento, por lo cual la clasificación basada en el parámetro λ no puede realizarse de manera aislada, es necesario acompañarla de otros análisis que ayuden a tener información sobre lo que sucede en el aspecto global del AC en experimentos posteriores al cálculo del parámetro. No obstante, puede ayudar a observar similitudes entre un grupo de reglas, y es en este aspecto donde se encuentra su potencial.

4.2.2 El parámetro Z

Andrew Wuensche diseñó el parámetro Z basado en λ cuando se encontraba realizando un estudio basado en campos de atractores para AC unidimensionales. Mientras el parámetro λ toma en cuenta la frecuencia de un estado determinado en la función de transición, el parámetro Z toma en cuenta los valores de la función de transición para subcategorías de vecindades relacionadas [Wuensche, 1996].

Además de predecir los grados de convergencia del flujo dinámico de estados en el espacio, que es un ejemplo de un comportamiento global, el parámetro Z proporciona una buena indicación de, al menos, los extremos del comportamiento local entre el orden y el caos, ambas influenciadas por las condiciones de los estados iniciales.

El parámetro Z está basado en el cálculo de preimágenes. Dada una configuración de un espacio de evoluciones particular E_i , una preimagen es la configuración del espacio de evolución E_{i-1} que, aplicando la regla de AC normalmente, produce la configu-

ración E_i . Es decir, siendo F la función de transición global se tiene que $F(E_{i-1}) = E_i$. Este cálculo se ha realizado mediante dos algoritmos, uno diseñado por Wuensche llamado algoritmo de reversa y otro utilizando diagramas de *de Bruijn*. El parámetro Z está diseñado de acuerdo al algoritmo de reversa [Wuensche & Lesser, 1992].

Dada la regla de AC primero se coloca de acuerdo a la notación de Wolfram y se observan los pares de izquierda a derecha; un par de elementos iguales forman un par llamado *determinístico* y un par donde los elementos de la regla son opuestos puede ser *ambiguo* o *prohibido*. Esto quiere decir que los pares determinísticos son aquellos que pueden proveer una lectura de preimágenes exacta, los ambiguos tienen más de una preimágen posible y los prohibidos no tienen preimágen. Posteriormente se realiza el mismo procedimiento de derecha a izquierda, reordenando antes la regla por reflexión.

Finalmente se obtiene una fracción de pares deterministas cuando se cuenta de izquierda a derecha llamada Z_L y otra cuando se realiza en sentido contrario llamada Z_R . El parámetro Z es el valor más grande entre Z_L y Z_R .

Por ejemplo, para la regla 110 se muestra a continuación el cálculo del parámetro Z . Primero es necesario contar el número de pares deterministas de izquierda a derecha y viceversa. En las tablas 4.2 y 4.3 se muestra la manera de realizar dicho conteo. Dado que cada valor de Z es una fracción del total de pares deterministas se tiene que, de la tabla 4.2 $Z_L = \frac{3}{4} = 0.75$ y de la tabla 4.3 $Z_R = \frac{1}{4} = 0.25$; finalmente, $Z_L > Z_R$ por lo tanto $Z = Z_L = 0.75$.

A	111	110	101	100	011	010	001	000
B	0	1	1	0	1	1	1	0

Tabla 4.2: Cálculo del parámetro Z_L para la regla 110. Los pares deterministas están marcados con color gris y los ambiguos o prohibidos sin color.

A	111	011	101	001	110	010	100	000
B	0	1	1	1	1	1	0	0

Tabla 4.3: Cálculo del parámetro Z_R para la regla 110. Los pares deterministas están marcados con color gris y los ambiguos o prohibidos sin color.

El parámetro Z es una probabilidad utilizada para predecir que tipo de campo de atractor puede tener el sistema. Cuando Z tiene un valor alto el número de preimágenes en un estado global de un AC arbitrario es probable que sea pequeño, siempre en relación al tamaño del sistema. Para $Z = 1$ el máximo número de vértices de entrada al estado global no puede ser mayor que $2^{|\mathcal{V}|-1}$, y si solo uno de los valores de Z_L y Z_R es igual a 1 entonces tiene que ser necesariamente menor que $2^{|\mathcal{V}|-1}$. Por el contrario, si Z es bajo el número de vértices de entrada sería relativamente alto. Para $Z = 0$ todos los estados globales se convierten en una sola preimágen que converge a un estado en un solo tiempo donde todos los elementos son 0 o 1. En otras

palabras, a menor valor de Z el sistema tiene al orden y a mayor medida se encuentra el caos [Wuensche, 1998].

Capítulo 5

Experimentos y resultados

Un experimento es un procedimiento mediante el cual se intenta probar o verificar una hipótesis sobre algún fenómeno en particular. En el caso de la presente tesis llamaremos experimento a la ejecución de alguna regla de autómatas celulares (AC) para un número de evoluciones, una cantidad de células (tamaño del espacio de evolución) y un estado inicial previamente definidos.

En los autómatas celulares los experimentos tienen una gran relevancia pues en muchas ocasiones de este aspecto depende el comportamiento global del sistema. Si bien podemos tener una regla de evolución, al poner juntos los elementos y evolucionar el sistema debemos tener en cuenta que se están observando las cotas de todos los elementos adecuadamente. Por ejemplo, en el caso del comportamiento colectivo no trivial para dimensiones mayores a 4 existen reglas que solo presentan el comportamiento para determinadas densidades en sus estados iniciales.

Entonces, cualquier serie de experimentos realizados debe ser consistente de cada aspecto, de tal manera que un estudio completo será aquel que tome en cuenta, para el caso particular de los AC, un espacio de evolución lo suficientemente grande, una cantidad de evoluciones adecuada y un amplio espectro de estados iniciales. A esto se le llamará la muestra experimental.

En éste trabajo se realizan experimentos basados en las consideraciones tomadas por Chaté y Manneville, para que de esta forma los resultados sean consistentes con el estado del arte. Por otro lado, se explorarán los límites inferiores y se propuso un tipo de muestra experimental.

5.1 Muestra experimental

De acuerdo con los experimentos realizados por Chaté y Manneville el comportamiento colectivo no trivial se presenta únicamente en espacios de evolución grandes,

mayores a 50,000 células y dependiendo de la regla solo en algunas densidades iniciales. También, la cantidad de evoluciones realizada era de más de 500 y en ocasiones hasta 5000, con el pretexto de comprobar la estabilidad del fenómeno. Un ejemplo donde no son necesarios un alto número de evoluciones es la regla 33 en tres dimensiones, para la cual el ciclo tres se presenta prácticamente de inmediato. En la figura 5.1 se muestra el espacio tridimensional con 9 evoluciones, desde $t = 0$ hasta $t = 8$. Claramente el fenómeno se puede apreciar cada tres evoluciones.

En las pruebas realizadas en la presente tesis se ha confirmado que el comportamiento colectivo está presente en espacios de evolución desde 256 células, lo que hace del fenómeno aun más interesante debido a su estabilidad. Tal es el caso de la regla 384 en cuatro dimensiones, donde para espacios menores a 3^4 el fenómeno es inexistente, pero comienza a tomar forma a partir de 4^4 . En la figura 5.2 se pueden apreciar los mapas de retorno para cada espacio de evoluciones y en la figura 5.3 se muestra el análisis de varianza para cada experimento, donde se puede observar que la varianza se va a cero en el espacio de 3^4 células, al contrario del espacio con 4^4 elementos que ya presenta el característico ciclo tres.

Por otro lado, la densidad inicial de células con valor 1 aun es crucial en algunas reglas, siendo el único factor inflexible. Razón por la cual se realizaron cuatro experimentos con cada regla, donde cada uno corresponde a una densidad particular.

De acuerdo con las consideraciones anteriores los experimentos fueron realizados en 4 dimensiones, desde la 3^a y hasta la 6^a , el tamaño del espacio de evoluciones es exacto y está basado en la dimensión a la que pertenece el AC, donde el tamaño es superior a las 27000 células; se realizan 100 evoluciones para cada experimento pues el fenómeno se presenta desde pocas generaciones; finalmente, se realizan 4 experimentos por regla, pertenecientes a 4 densidades iniciales diferentes: 0.25, 0.5, 0.75, 0.95.

La razón de utilizar 4 densidades diferentes es la de explorar el comportamiento en diferentes escenarios, siendo éstos los casos que cubren el espectro de posibilidades sin llegar a aumentar de manera drástica la cantidad de experimentos. También, la cantidad de experimentos es conveniente de acuerdo al tiempo que tardan los experimentos en realizarse llegando a ser de más de 8 horas por cada uno, haciendo que el estudio de una regla pueda ser de más de 24 horas, obligando así a reducir el número de reglas estudiadas.

En la tabla 5.1 se muestra la información exacta utilizada para cada regla estudiada. A pesar de existir otras reglas que presentan el comportamiento colectivo no trivial la colección de reglas elegida es representativa en dimensión y comportamiento. Finalmente, los resultados que se obtienen de cada regla se pueden analizar de acuerdo los temas vistos en los capítulos 3 y 4.

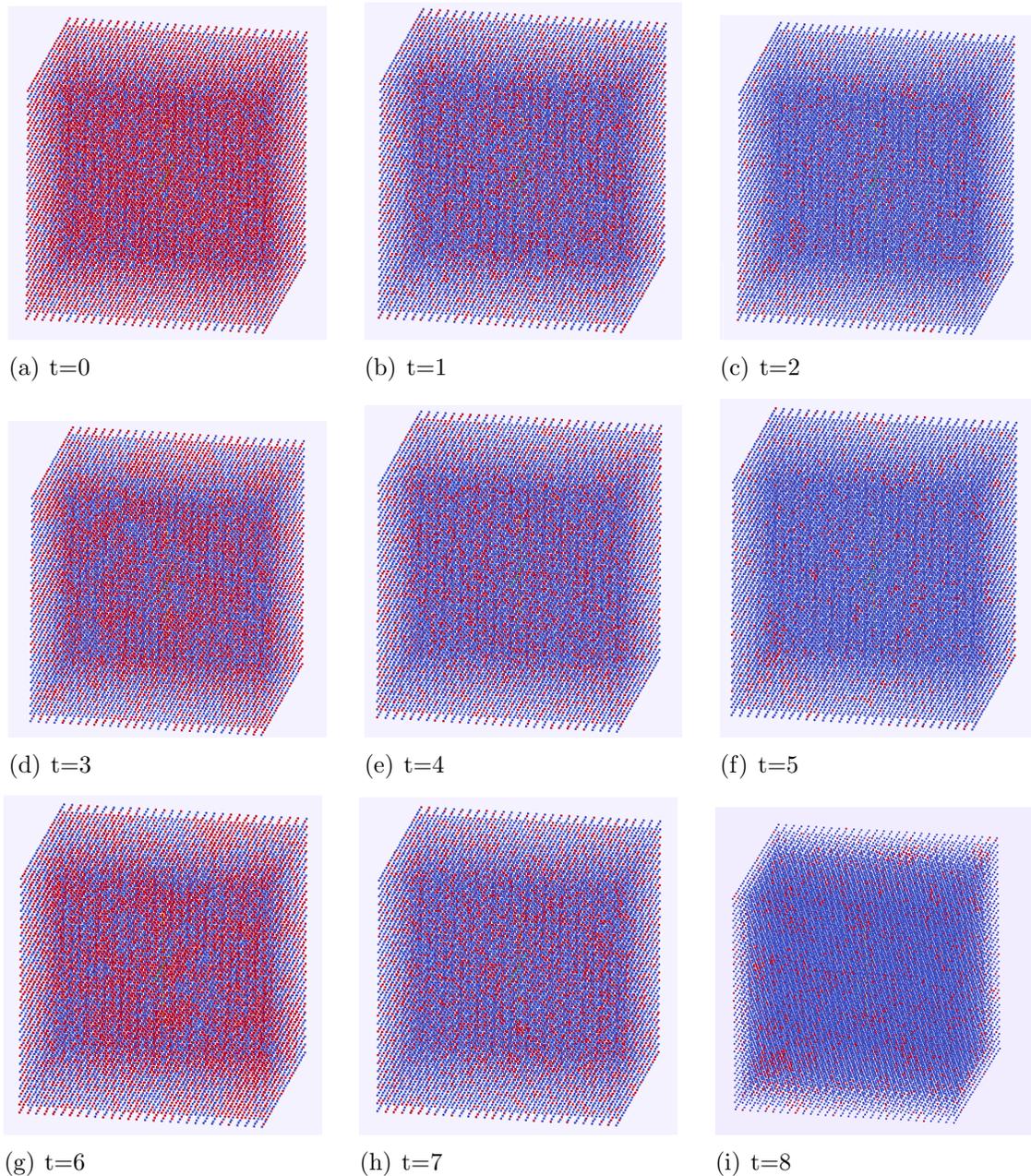


Figura 5.1: Primeras 9 evoluciones de la regla 33 en 3 dimensiones con una densidad inicial de 95%.

5.2 Computación asociada

Existen diversos programas que pueden realizar experimentos de AC y algunas de las herramientas incluso ejecutan algún tipo de análisis. No obstante, la mayoría de herramientas realiza experimentos en un subconjunto muy particular de autómatas celulares. Por otro lado, la mayoría de los análisis existentes se resumen a AC unidi-

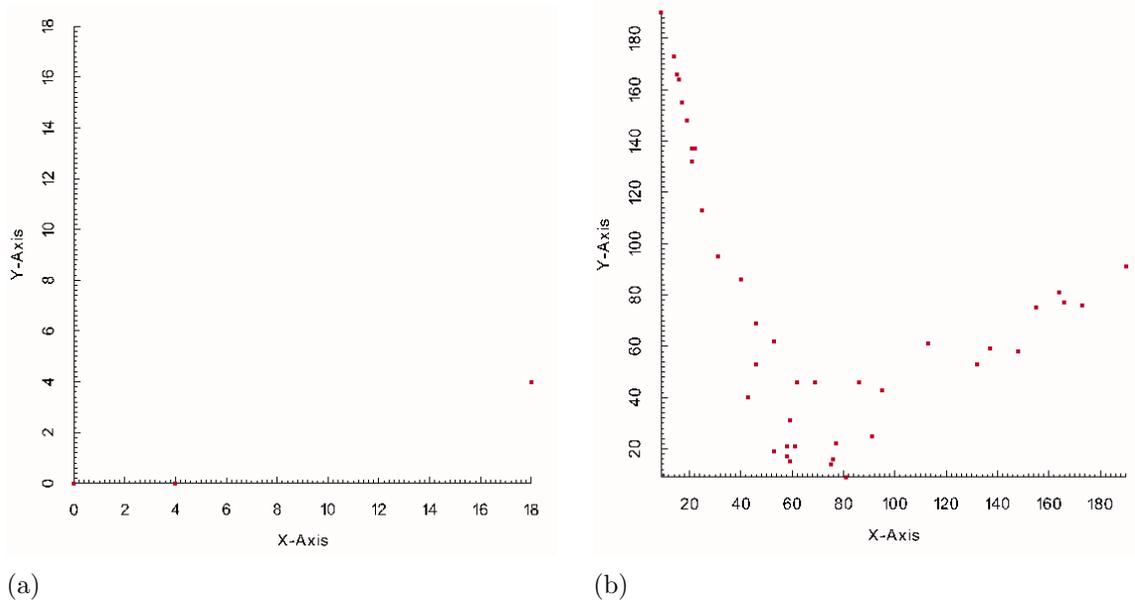


Figura 5.2: Mapas de retorno de la regla 384 en 4 dimensiones para 250 evoluciones. El número de células es de 3^4 y 4^4 , para a) y b) respectivamente.

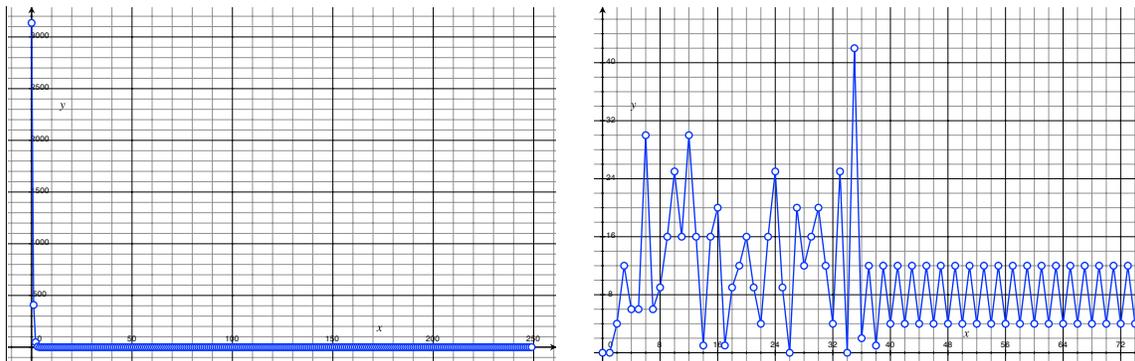


Figura 5.3: Análisis de varianza de la regla 384 en 4 dimensiones para 250 evoluciones. El número de células es de 3^4 y 4^4 , para a) y b) respectivamente.

mensionales. Algunos de los programas para ejecutar experimentos de AC existentes son:

- *Discret Dinamic Laboratory (DDLab)*. Andrew Wuensche [Wuensche, 1996].
- *NXLCAU systems*. Harold V. McIntosh [McIntosh, 1988].
- *Cellular Automata Lab (CAL)*. Rudy Rucker y John Walker [Rucker & Walker, 1994]
- *Golly*. Andrew Trevorrow and Tom Rokicki [Trevorrow & Rokicki].

El *DDLab* es un software gráfico interactivo para la investigación de AC y redes booleanas. Trabaja con sistemas en 1, 2 y 3 dimensiones. Tiene una gran variedad

Regla	Dimensión	Células	Evoluciones	Densidades
33	3	30^3	100	0.25, 0.50, 0.75, 0.95
384	4	16^4	100	0.25, 0.50, 0.75, 0.95
$R_{3,8}^{V^N}$	4	16^4	100	0.25, 0.50, 0.75, 0.95
$R_{4,8}^{V^N}$	4	16^4	100	0.25, 0.50, 0.75, 0.95
$R_{5,9}^{V^N}$	5	8^5	100	0.25, 0.50, 0.75, 0.95
$R_{4,8}^{V^N}$	5	8^5	100	0.25, 0.50, 0.75, 0.95
$R_{5,9}^{V^N}$	6	6^6	100	0.25, 0.50, 0.75, 0.95
$R_{5,10}^{V^N}$	6	6^6	100	0.25, 0.50, 0.75, 0.95

Tabla 5.1: Datos de los experimentos por regla estudiada.

de medidas y algoritmos de análisis para la dinámica y patrones de los sistemas estudiados.

Los *NXLCAU systems* son una serie de programas que permiten realizar estudios de AC en una dimensión. Los análisis están basados en diagramas de *de Brujin*, teoría de campo medio y densidades. A través de la teoría de campo medio es posible el estudio de algunas reglas en altas dimensiones.

Por otro lado, los programas *CAL* y *Golly* permiten la creación de reglas, el primero en 2 dimensiones y el segundo en 1 y 2. Proveen una serie de herramientas para la edición y visualización de nuevas reglas y algunas ya conocidas. *Golly* soporta hasta 256 estados y provee uno de los algoritmos más rápidos para la evolución de reglas tipo *The Game of Life*.

Lamentablemente ningún programa provee las herramientas necesarias para estudiar el comportamiento colectivo no trivial, excepto con la teoría de campo medio, misma que se ha visto no es suficiente para explicar el fenómeno. Otro aspecto es el tamaño del espacio de evoluciones pues cuando se proveen diversas medidas y análisis la cantidad de células es limitada, como en el caso del DDLab.

Al final no existe un programa capaz de proporcionar las herramientas para realizar experimentos en las reglas que presentan el comportamiento colectivo no trivial, razón por la cual se vio en la necesidad de realizar un sistema que proporcionara dichas herramientas.

5.2.1 Requerimientos y limitaciones

El sistema realizado necesitaba poder ejecutar experimentos de la magnitud de miles de células y cientos de evoluciones sobre reglas de autómata celular en diferentes dimensiones y con dos estados. Es por eso que se procedió a realizar el sistema lo más genérico posible pero limitado en la vecindad, donde solo pueden elegirse vecindades de von Neumann y Moore de radio uno.

El sistema no es capaz de diseñar reglas por lo cual es necesario ingresarlas de alguna de la siguientes dos formas. Es posible como una cadena de caracteres donde el primer símbolo de izquierda a derecha representa la vecindad formada por la combinación de la dimensión y una vecindad dada, ya sea de von Neumann o de Moore, procediendo hacia la derecha de manera lexicográfica conforme ascienden las vecindades. O bien ingresando la cota mínima y máxima, separadas por una coma, que tiene que cumplir la vecindad del AC para pasar al estado 1.

El número de células del sistema se ingresa por dimensión, es decir, el número ingresado será elevado a la dimensión elegida generando el espacio dimensional con un índice lexicográfico. Los estados del autómata celular pueden ser desde 2 y hasta 9, aunque los experimentos del presente trabajo cubren solo AC de 2 estados.

Los resultados deben ser guardados en archivos y en el caso de las tres primeras dimensiones también deben almacenarse las configuraciones de cada evolución con el propósito de poder visualizar la evolución del AC.

5.2.2 Diseño e implementación

EL programa esta diseñado de tal manera que la única limitante al momento de realizar un experimento sean el tiempo que se desea esperar para que el trabajo sea realizado. Esto debido a que entre mayor sea la dimensión, los estados, el número de células y evoluciones mayor sea el tiempo que tarde en realizar el experimento.

El programa está escrito en el lenguaje de programación ANSI C debido al rendimiento que ofrece. Ha sido probado en plataformas Mac OS X y Linux. Es compilado con el compilador GCC 4.2.1 de la *Free Software Foundation, Inc.* El programa es ejecutado por consola y recibe como único parámetro el nombre del archivo del cual se tomarán las reglas de autómata celular que se ejecutarán. El modo de ejecución del programa se presenta a continuación:

```
Usuario : CarpetaPrograma$./programa archivo.dat
```

Donde “programa” es el nombre del ejecutable y “archivo.dat” contiene la información de loa AC a ejecutar. Cada línea dentro del archivo representa un AC diferente. El formato del archivo son los datos que forman al AC de manera numérica separados por una coma cada uno, como se muestra a continuación:

```
dimension , vecindad , estados , cantidad de celulas , evoluciones , regla
```

Para la dimensión, los estados, las evoluciones y la cantidad de células solo basta indicarlo numéricamente. En el campo de la vecindad se indicará con el número 1 la vecindad de von Neumann y con un 0 la de Moore. La regla se colocará como una cadena de caracteres de acuerdo al orden lexicográfico de las vecindades siendo el primer elemento el cero. Un ejemplo del archivo de entrada se muestra abajo.

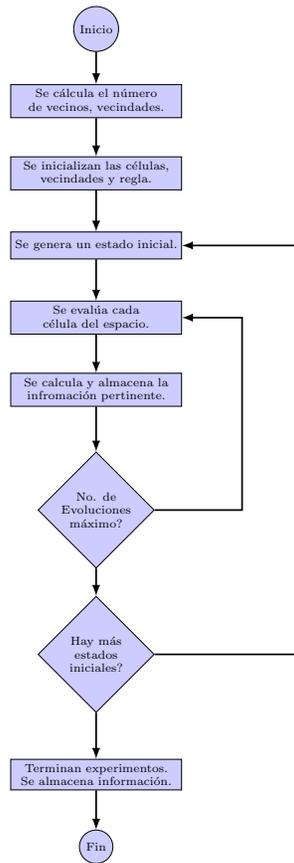


Figura 5.4: Diagrama de flujo del programa para realizar experimentos de AC.

de las funciones principales dentro del algoritmo 1 son **getVecindadNeumann** que a partir de los datos de la célula actual y la dimensión del sistema obtiene sus vecinos para la vecindad de von Neumann; por otro lado, se busca dentro del conjunto de vecindades y mediante la función **getNoVecindad**, la vecindad obtenida para de esta manera obtener el valor siguiente de la célula actual. El algoritmo **getNoVecindad** permite evaluar cualquier tipo de regla sin restricciones de estados o número de vecinos más que los infringidos por el propio lenguaje en cuanto al tamaño de arreglos bidimensionales.

Algoritmo 1 Evaluación de las células y cálculo de varianza.

Entrada: valorVecindad=0, vecindadActual[noVecinos], regla[noVecindades], Celulas[noCelulas], vecindades[noVecindades][noVecinos], mediaBloques[Bloques][noEvoluciones].

```

1: for i=0 to noEvoluciones do
2:   for j=0 to noCelulas do
3:     get VecindadNeumann(vecindadActual,Celulas,j)
4:     valorVecindad = getNoVecindad(vecindadActual,vecindades,noVecinos,noVecindades)

5:     Celulas[j].estadot+1=regla[valorVecindad]
6:     if Celulas[j].estadot=1 then
7:       densidadt++
8:     end if
9:   end for
10:  mediasGlobales[i] = densidadt
11:  for j=0 to Bloques do
12:    promedioBloques += densidadBloques[j]
13:    mediaBloques[j][evol] = densidadBloques[j]
14:  end for
15:  promedioBloques = promedioBloques / Bloques
16:  for j=0 to Bloques do
17:    varianzaTiempoBloques[evol] = ( densidadBloques[j] - promedioBloques )2
18:    densidadBloques[j] = 0;
19:  end for
20:  varianzaTiempoBloques[i] = varianzaTiempoBloques[i] / Bloques
21:  densidadt=densidadt1=0;
22:  for j=0 to noCelulas do
23:    Celulas[j].estadot = Celulas[j].estadot+1
24:  end for
25: end for

```

5.2.3 Costo computacional

Posterior a la definición se procede a la evolución. La cantidad de operaciones realizada en cada experimento puede variar debido a las variaciones en la definición del autómata, el espacio de evoluciones o la cantidad de células. Supongamos que cada vez que se examina o modifica el estado de una célula es una operación, al igual que una consulta a la regla de evolución sobre la vecindad actual. Sea S el conjunto de células utilizado, e el número de evoluciones, n la cantidad de células del espacio S y \mathcal{V} la vecindad utilizada. Las operaciones necesarias para llevar a cabo la consulta de vecindades por cada célula es representada por:

Algoritmo 2 Obtiene la vecindad de von Neumann con la notación definida en el capítulo 2.

Entrada: El conjunto de vecindades V , el conjunto de células S , la célula i , el tamaño del espacio T , la dimensión d , un conjunto de coordenadas auxiliar llamado `coordenadasActuales` y la vecindad que albergara los vecinos de i llamada `vecinosActuales`.

```

1: l=0
2: for j=0 to d do
3:   copiaCoordenadas(coordenadasActuales,S[i].coordenadas,d);
4:   coordenadasActuales[j]++;
5:   if coordenadasActuales[j]>=T then
6:     coordenadasActuales[j]=0
7:     vecinosActuales[l]=getCelulaValue(coordenadasActuales,S)
8:     l++
9:     coordenadasActuales[j]=T
10:  else
11:    vecinosActuales[l]=getCelulaValue(coordenadasActuales,S)
12:    l++
13:  end if
14:  copiaCoordenadas(coordenadasActuales,S[i].coordenadas,d)
15:  coordenadasActuales[j]-
16:  if coordenadasActuales[j]<0 then
17:    coordenadasActuales[j]=T-1
18:    vecinosActuales[l]=getCelulaValue(coordenadasActuales,S)
19:    l++
20:    coordenadasActuales[j]=0
21:  else
22:    vecinosActuales[l]=getCelulaValue(coordenadasActuales,S)
23:    l++
24:  end if
25:  vecinosActuales[l]=S[i].estadot
26: end for

```

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{|\mathcal{V}^{N|M}|} \mathcal{V}_j^{N|M}(S_i), \quad (5.1)$$

donde $\mathcal{V}_j^{N|M}(S_i)$ es el j -esimo vecino de la célula S_i . Posteriormente se debe encontrar el valor de la función de transición para cada vecindad, lo que en el peor de los casos conlleva la siguiente cantidad de operaciones:

Algoritmo 3 Busca una vecindad dada en el conjunto de vecindades y devuelve su posición de acuerdo a una notación lexicográfica.

Entrada: La vecindad a buscar *vecindadActual*, el conjunto de vecindades *V*, el número de vecinos *noVecinos* y la cantidad de vecindades *noVecindades*.

```

1: for i=0 to noVecindades do
2:   for j=0 to noVecinos do
3:     if vecindadActual[j]! =V[i][j] then
4:       Salir
5:     end if
6:   end for
7:   if j=noVecinos then
8:     Salir
9:   end if
10: end for
11: return i;

```

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{\mathbb{A}} f_{S_i}(\mathcal{V}_k^{N|M}), \quad (5.2)$$

donde $\mathbb{A} = |Q|^{|V^{N|M}|}$, es decir, el número total de vecindades y f_{S_i} representa la aplicación de la función de transición para la célula S_i . Lo que hace que al final la cantidad de operaciones ω principal sea de:

$$\omega = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{|V^{N|M}|} \mathcal{V}_j^{N|M}(S_i) + \sum_{k=0}^{\mathbb{A}} f_{S_i}(\mathcal{V}_k^{N|M}) \right), \quad (5.3)$$

Lo que es más, si se toman en cuenta detalles adicionales como que cada célula del espacio debe contar con una variable auxiliar de su estado y que al final de cada evolución debe copiarse se pueden agregar n operaciones más. También, debido a que el objetivo es analizar la densidad del AC se debe guardar un registro de cada célula en cada evolución, lo que hace un total de $|Q|n$ operaciones más. Entonces, el valor de ω es:

$$\omega = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{|V^{N|M}|} \mathcal{V}_j^{N|M}(S_i) + \sum_{k=0}^{\mathbb{A}} f_{S_i}(\mathcal{V}_k^{N|M}) \right) + (|Q| + 1)n, \quad (5.4)$$

Esta cantidad de operaciones se debe realizar por cada evolución. Entonces el valor total de operaciones por experimento sería:

$$\Omega = \sum_{m=0}^e \omega_e \quad (5.5)$$

Pasando las ecuaciones anteriores a la notación *Big O* se tienen las siguientes funciones:

$$f(x) = x^{2d+1} + x^{|Q|^{2d+1}} \quad \text{Por célula} \quad (5.6)$$

$$g(y) = f(x)^n + (|Q| + 1)x \quad \text{Por evolución} \quad (5.7)$$

$$h(z) = g(y)^e \quad \text{Por experimento} \quad (5.8)$$

Lo que evidentemente es un algoritmo de tipo exponencial, por un lado por los estados y por otro por la dimensión. Lo cual lo coloca dentro de los problemas más difíciles, solo detrás de los de grado factorial.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Discusión

6.1.1 Comportamiento colectivo y clases de Wolfram

Las clases propuestas por Wolfram se han convertido en un estándar *de facto* al momento de clasificar las reglas de AC ya no solo en una dimensión. Debido a esta misma situación se ha hecho común verificar a través de la clasificación de Wolfram otros trabajos o clasificaciones.

En el presente trabajo se utiliza el comportamiento de la densidad de los AC a través del tiempo para intentar clasificarlos, de primera instancia entre aquellos que presentan un comportamiento colectivo y aquellos que no. Esta clasificación puede verse más extendida y es que el análisis de varianza sobre el espacio de evoluciones permite no solo ver el intercambio de información entre bloques, sino también la aleatoriedad que se sucede entre dicho intercambio a lo largo del tiempo.

De esta manera, se ha realizado el análisis de varianza a 8 reglas en una dimensión de las cuales ya es conocido de antemano su comportamiento y clasificación en el esquema de Wolfram. En estas reglas se ha logrado discernir un comportamiento diferente de acuerdo a su clasificación.

Clase 1

Para la clase 1, de aquellos AC que llegan a una configuración donde todos los elementos pertenecen a un solo estado se eligieron las reglas 32 y 160. Estas reglas, sin importar la configuración inicial con la que se trabaje siempre terminarán en una configuración donde todas las células pertenecen al estado 1 o 0.

Si se observa este comportamiento desde el punto de vista del análisis de varianza espacial, implica que cuando se ha logrado llegar a la configuración homogénea el intercambio de información entre los bloques es nula, por lo cual no existe ninguna variación y de esta manera el valor de la varianza es igual a cero.

En la imagen 6.1 se presenta la serie de tiempo de la varianza espacial para la regla 32 y 160 junto con sus respectivas gráficas del análisis de correlación de la serie de tiempo. En la imagen se puede observar que pasadas las primeras evoluciones la varianza del sistema cae a cero. En la imagen 6.5 se muestran las evoluciones de las reglas, donde los elementos en azul representan el valor cero y en rojo valores de uno, y se aprecia el comportamiento global consistente con la clasificación de Wolfram.

Clase 2

En la clase 2 de Wolfram las reglas de AC tienen un espectro de comportamiento más avanzado, ahora las configuraciones finales tienen un comportamiento periódico, sin importar de cuantas evoluciones este formado el periodo. Este comportamiento periódico se puede observar dentro de la evolución de las reglas 108 y 184 en la figura 6.6 como la constante repetición de un estado cada determinado número de evoluciones.

Cuando se realiza un análisis de varianza sobre reglas periódicas se puede observar un claro patrón en la serie de tiempo de la varianza espacial. En este caso la varianza no puede ser de cero pues existe un cambio constante de la densidad debido al periodo, y es ese cambio constante lo que se percibe en la serie de tiempo.

Para cuando la información en el AC es lineal y no existe un verdadero intercambio entre los bloques en que se divide el espacio para su estudio con ANOVA la gráfica de la serie de tiempo suele ser como la mostrada por la regla 108 en la figura 6.2, donde se salta de una densidad a otra en el intervalo de tiempo que marca el periodo. Por otro lado, la regla 184 en la misma figura tiene un periodo donde la información está en constante movimiento a la izquierda del espacio de evoluciones y al ser un sistema cerrado la información se vuelve a repetir al momento en que llega al borde. En esta forma periódica es un poco más compleja y así lo refleja su respectiva serie de tiempo del ANOVA, donde se ven picos de varianza seguidos de espacios de tiempo donde no existe intercambio de información, para volver a aparecer posteriormente un intercambio entre los bloques diferente del anterior. Este comportamiento aunque un poco más difícil de interpretar sigue siendo consistente pues los momentos en los que se observa el intercambio constante de información está representado por las nuevas células que han entrado al bloque gracias al movimiento de la información desde la izquierda del espacio de evoluciones y cuando existe el cambio en la varianza es debido la transición de dicho intercambio.

Clase 3

La clase 3 de Wolfram esta reservada para aquellas reglas que presenten un comportamiento caótico. Dicho comportamiento se puede observar cuando no existe ningún patrón discernible en la evolución del AC. Una regla que ha sido objeto de múltiples análisis y se ha comprobado es capaz de proporcionar evoluciones caóticas es la regla 30. Wolfram incluye dentro de esta clase a la regla 22, misma que no ha sido tan estudiada pero que presenta un comportamiento similar a la vista de las evoluciones.

La aleatoriedad es un tema controversial en los AC pues no existe un único método de comprobar dicha aleatoriedad. A través del ANOVA espacial se obtiene una serie de tiempo y en dicha serie de tiempo es posible encontrar patrones que proporcionen información respecto a la manera en que ésta cambia a lo largo de las evoluciones. Entonces, si no existiese ningún patrón dentro de la serie de tiempo se podría decir que el intercambio de información es aleatorio, lo cual sugeriría claramente una regla que genera estados globales aleatorios.

En la figura 6.3 se muestra el ANOVA para las reglas 22 y 30, donde nuevamente el comportamiento de la regla 30 es consistente con la clasificación de Wolfram, no obstante, la regla 22 no presenta un comportamiento meramente aleatorio. Si se observa con detenimiento la función de autocorrelación parcial se podrá ver que para el caso de la regla 30 la mayoría de las barras están en cero o muy cercanas a ella, por el contrario con la regla 22 existen más de una barra que no esta en cero, lo cual indica que si hay una relación en la varianza a lo largo de las evoluciones.

Al inicio la regla 30 presenta una relación entre las evoluciones, pero ésta es rápidamente disuelta. La correlación entre los primeros estados es perfectamente normal pues los primeros estados globales de un AC siempre dependen directamente de el estado global, sin importar la clase a la que pertenezcan.

Clase 4

La clase 4 de Wolfram es de una gran peculiaridad pues, por un lado las evoluciones de las reglas que caen en esta clase se muestran muy similares a las de la clase 3, por otro lado se ha probado que tienen propiedades particulares que las hacen objeto de estudio. El comportamiento de la clase 4 de Wolfram es llamado Complejo, pues aunque existe un aparente caos, se presentan patrones reconocibles dentro del caos.

Un trabajo donde se discute a profundidad sobre la diferencia entre el caos y la complejidad es el famoso *The edge of chaos* de Langton, donde discute una forma de diferenciar entre estas dos clases de Wolfram. El presente trabajo observa las reglas de clase 4 casi de la misma forma que de clase 3, sin existir una gran diferencia.

Donde el ANOVA espacial es de interés es la momento de decir que tan aleatoria

es la varianza y de esta manera sugerir que reglas son más ordenadas que otras. En la figura 6.4 se muestra el análisis de varianza para las reglas 54 y 110. En el caso de la regla 110 ya ha sido probado que presenta un comportamiento complejo al ser capaz de soportar computación. Por otro lado, con la regla 54 solo se sospecha que pueda soportar computación, sin embargo no se ha logrado aun.

6.1.2 Comportamiento colectivo no trivial

Para el estudio del comportamiento colectivo no trivial se realizaron una serie de experimentos donde se ponía a prueba las diferentes reglas. El principal factor que influye en el comportamiento colectivo no trivial es la densidad, por lo tanto es importante observar el comportamiento de las reglas aun cuando no presenten un comportamiento colectivo pues en base a este comportamiento se puede discernir no solo el comportamiento general de la regla, sino su clasificación de acuerdo a Wolfram.

Regla	Dimensión	Parámetro λ	Parámetro λ_r
33	3	22/128	0.343
384	4	46/512	0.179
$R_{3,8}^{\mathcal{V}^N}$	4	47/512	0.183
$R_{4,8}^{\mathcal{V}^N}$	4	131/512	0.511
$R_{5,9}^{\mathcal{V}^N}$	5	574/2048	0.560
$R_{4,8}^{\mathcal{V}^N}$	5	299/2048	0.291
$R_{5,9}^{\mathcal{V}^N}$	6	1471/8192	0.359
$R_{5,10}^{\mathcal{V}^N}$	6	1185/8192	0.289

Tabla 6.1: Valores de los parámetros λ y λ_r para el conjunto de reglas estudiado.

Fueron 8 las reglas analizadas, la cuales ya era conocido que presentaban el comportamiento colectivo no trivial. Estas reglas no solo fueron sometidas a los experimentos de ANOVA, sino que se calculó su parámetro λ y λ_r con lo cual se obtiene un enfoque más amplio al momento de intentar explicar el fenómeno. Estos resultados están condensados en la tabla 6.1.2.

Los resultados de los análisis se muestran en las figuras siguientes y la forma de interpretarlas es explicada en el capítulo 3:

- **3 Dimensiones:** Regla 33 figuras 6.9, 6.10 y 6.11.
- **4 Dimensiones:** Regla 384 figuras 6.12, 6.13 y 6.14; regla $R_{3,8}^{\mathcal{V}^N}$ 6.15, 6.16 y 6.17; $R_{4,8}^{\mathcal{V}^N}$ figuras 6.18, 6.19 y 6.20
- **5 Dimensiones:** Regla $R_{4,8}^{\mathcal{V}^N}$ figuras 6.21, 6.22 y 6.23; regla $R_{5,9}^{\mathcal{V}^N}$ figuras 6.24, 6.25 y 6.26.

- **6 Dimensiones:** Regla $R_{5,9}^{\mathcal{V}^N}$ figuras 6.27, 6.28 y 6.29; regla $R_{5,10}^{\mathcal{V}^N}$ figuras 6.30, 6.31 y 6.32.

La serie de experimentos realizados sobre las reglas que presentan el comportamiento colectivo no trivial fueron realizados con el objetivo de encontrar similitudes entre las reglas, mismas que brindará una explicación al fenómeno observado.

Lamentablemente el análisis de varianza y el posterior análisis de la serie de tiempo resultante son técnicas pertenecientes a la estadística y es por ello que deben ser interpretadas en conjunto lo que dificulta la creación de un parámetro que resuma los resultados en un rango establecido como se hace con el parámetro λ y Z . A pesar de esto, el análisis entrega resultados interesantes, siempre dependientes de las variables del experimento.

Es debido a la susceptibilidad a los cambios en los parámetros de los experimentos como son el número de evoluciones y la cantidad de células por lo que de primera instancia se realizaron experimentos iguales para todas las reglas, con el único objetivo de encontrar similitudes entre ellas. Posteriormente se realizaron experimentos que buscaban distintos objetivos y ya no a todas las reglas.

Un factor imprescindible es la cantidad de evoluciones que deben tomarse en cuenta. Por un lado, ya se ha visto que el comportamiento colectivo no trivial se presenta desde las primeras evoluciones, pero de acuerdo al trabajo realizado por Chate y Manneville un punto importante era que el fenómeno persistía a lo largo de muchas evoluciones. Los experimentos realizados por Chate y Manneville llegan a ser de hasta 5000 evoluciones. La persistencia del fenómeno sobre tiempos tan largos parecía indicar que la regla no seguía la ley de los grandes números. En el artículo de Pikovsky y Kurts *Do Globally Coupled Maps Really Violate the Law of Large Numbers* muestran que la ley es seguida en los mapas acoplados que presentaban el comportamiento colectivo no trivial y sugieren que lo mismo puede ser realizado en autómatas celulares. Para poder observar si el camino que sigue el comportamiento colectivo no trivial en AC era coherente con la ley de los grandes números se realizaron experimentos con una mayor cantidad evoluciones, llegando a las 1000 evoluciones por experimento.

Un ejemplo de estos experimentos se muestra en la figura 6.33 donde se presenta el mapa de retorno y el correspondiente análisis de varianza para la regla $R_{5,9}^{\mathcal{V}^N}$ en la 5^a dimensión. En este experimento se puede observar que la regla genera un quasiperiodo tres en el mapa de retorno. También, las funciones de autocorrelación normal y parcial muestran que la varianza en la serie de tiempo no es aleatoria, razón suficiente para sugerir que existe un patrón en la forma en que se mueve la información a través del espacio de evoluciones. Este resultado no indica que la regla sea completamente periódica pues no hay manera de saber si la densidad presentada es a causa de la misma configuración cada vez. Este resultado no debería ser causa de sorpresa pues el hecho de que no se aleatoria la varianza a lo largo de la evolución confirma el que la regla tenga un valor en el parámetro $\lambda = 0.280$, que de acuerdo al estudio realizado por Langton la regla pertenece al grupo de reglas periódicas.

Otro tipo de experimentos realizados son aquellos donde los estados iniciales no tienen una distribución uniforme a través del espacio de evoluciones. Con estos experimentos se intenta observar la forma en que el comportamiento colectivo se sincroniza a lo largo del espacio de evoluciones. Dado que la importancia en este experimento es observar lo que sucede dentro del espacio de evoluciones se eligió la regla 33 en 3 dimensiones para, de esta manera poder ver la evolución completa. Los resultados del experimento se muestran en la figura 6.34 donde se aprecia que el sistema no presenta el ciclo tres y en su lugar llega a una configuración periódica común. Siendo consistente de nuevo con su clasificación con el parámetro λ .

El análisis de las series de tiempo obtenidas a través del ANOVA espacial se realizó mediante las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) las cuales son un buen indicador de la aleatoriedad de los datos presentes en la serie. Es a través de este análisis que se puede ver si el intercambio de información a lo largo del espacio de evoluciones es meramente azar o es causa directa de lo que sucede en las evoluciones anteriores. Con este análisis se puede inferir si la evolución de un autómata celular genera configuraciones aleatorias. Este análisis es interesante en las reglas clase 3 y 4 de Wolfram pues pueden distinguir entre aquellas que solo presentan caos y aquellas que pueden tener algún tipo de patrón o dependencia, por muy o poco marcado que éste sea. En los experimentos a la regla 30 se ha confirmado su capacidad de generar caos. Por otro lado, la regla 22 muestra que sus configuraciones son menos caóticas de lo que se suponía, por lo que esta regla está mal ubicada dentro de la clasificación de Wolfram. También, la regla 54 que se sospecha puede ser compleja presenta una gran capacidad de generar configuraciones aleatorias, por lo que estaría de esta manera en una categoría errónea. Esto no quiere decir que con la regla 54 no pueda soportar computación, pues solo es una manera de saber que tan aleatorio es su comportamiento, y en esta medida la complejidad de ser utilizada para soportar computación como la regla 110. La regla 110 presenta poca aleatoriedad en su gráfica PACF, lo que deja pensar que las reglas complejas no presentan un completo caos, sospecha que soporta el hecho de que la regla 22 pueda soportar computación.

6.2 Conclusiones

El comportamiento colectivo no trivial puede verse desde dos puntos de vista, el primero donde se le observa como los fenómenos colectivos de la naturaleza y se analiza desde sus características comunes y el segundo, donde se analiza el comportamiento con herramientas propias de los autómatas celulares.

Las diferentes formas del comportamiento colectivo en la naturaleza tiene en común los siguientes puntos:

- **Sincronización.** Surge de la interacción de las células. Es el elemento emergente.

- **Observador.** Es neutro.
- **Ambiente.** Solo están presentes el espacio y los actores.
- **Densidad.** De vital importancia existiendo un limite inferior.

El comportamiento colectivo no trivial aun a pesar de no estar basado directamente en algún modelo de la naturaleza cumple con algunas de estas características. La sincronización se da mediante la interacción local de las células y es el comportamiento emergente de la regla. En el caso del comportamiento colectivo no trivial la sincronización no se da mediante el movimiento constante de individuos por el espacio de evoluciones como sería el caso de un sistema que simule una parvada o un cardumen, por el contrario la sincronización que presenta es enfocada a que el individuo permanece estático y puede elegir entre dos estados en algún momento, donde los estados pueden representar cualquier cosa desde una sintonizar una estación de radio hasta salir a la calle, siendo el comportamiento colectivo el hecho de que un gran conjunto de individuos eligen realizar la misma actividad y esta actividad va cambiando en el espacio. Es como una gran ola, sólo que sin el patrón tan definido, no obstante si muestra un patrón.

Por otro lado el observador queda relegado las dimensiones superiores a 3 pudiendo solo interpretar el comportamiento a través de estadísticas. En la tercera dimensión el fenómeno es observado y la perspectiva no influye en lo absoluto, además de tener una perspectiva meramente externa. En este sentido el observador tiene un rol prácticamente nulo en el sistema, siendo de esta manera completamente neutral.

El ambiente es inexistente con la excepción del espacio de evoluciones. Al solo existir el espacio y los individuos podría tratarse del comportamiento colectivo más simple. El siguiente escenario debería contemplar al menos un estado más en el AC para que funja de ambiente e interactúe con los individuos, sin embargo agregar un estado al modelo de autómatas celulares es el escenario donde aumenta más la complejidad.

Finalmente la densidad que juega un papel importante en todo comportamiento colectivo no lo es menos para el caso del comportamiento colectivo no trivial. Como se ha apuntado en el capítulo 5 se han establecido los límites inferiores para que el comportamiento se presente, siendo en el orden de los cientos.

El comportamiento colectivo no trivial es entonces el caso mínimo de un comportamiento colectivo donde solo se tienen individuos, un espacio y la interacción entre estos. La sincronización es parte de la naturaleza misma del sistema y en este sentido no hace falta un orquestador o detonante. El siguiente paso para el estudio de los sistemas colectivos en los AC sería la introducción de un estado más al sistema, con lo cual se tendría un ambiente para la interacción del comportamiento colectivo pudiendo representar quizá un conjunto de individuos y un depredador.

Por otro lado, el comportamiento colectivo no trivial tiene un enfoque desde el

estudio de los AC con el cual es posible catalogar la regla. Al observar los resultados de las reglas para el parámetro λ y las configuraciones periódicas a las que llegan las reglas cuando los estados iniciales no están distribuidos uniformemente es preciso decir que el conjunto de reglas que presentan el comportamiento colectivo pertenecen a la categoría 2 de la clasificación de Wolfram. No obstante, es muy poco solo decir que pertenecen a ese conjunto de reglas cuando, en circunstancias normales las reglas presentan un comportamiento aun más complejo que el del conjunto periódico de Wolfram. Razón por la cual se sugiere que existe un conjunto de reglas hasta ahora ignoradas dentro de la clasificación de Wolfram y que se encuentran en el borde entre las reglas periódicas (clase 2) y caóticas (clase 3). Estas reglas serían aquellas capaces de representar el comportamiento colectivo en todas sus facetas.

En este sentido puede utilizarse el análisis propuesto para clasificar las reglas en una escala de orden y caos. Las reglas ordenadas son aquellas que tienen un comportamiento completamente colectivo, es decir, todas las células hacen lo mismo; por ejemplo son las reglas de clase 1 de Wolfram. En el otro extremo se encuentran las reglas con espacios aleatorios, es decir, caóticas; estas corresponden a las reglas de la clase 3 de Wolfram. Entonces, la clase 2 y 4 de Wolfram son puntos intermedios entre las clases 1 y 3, siendo la clase 4, complejas, la más cercana al caos al presentar durante periodos de tiempo configuraciones completamente caóticas. Siguiendo esta línea de investigación, se comprobó que la regla 22 que Wolfram incluía dentro de la clase 3 ha presentado un comportamiento no completamente caótico, por lo cual caería dentro de la clase 4. Para el caso de la regla 54 es inverso.

Otro ejemplo de las reglas que pueden presentar un comportamiento colectivo es la regla 184 en una dimensión [Bull & Stone,2009]. Esta regla se ha utilizado para representar modelos de tráfico vehicular, mismo que es inherentemente colectivo, y es efectiva solo en densidades cercanas al 50% por lo que si se observa en cualquier otra concentración la regla presenta un comportamiento característico de clase 2. Entonces, la clasificación de Wolfram puede ser extendida para dar cabida a las reglas que presenten algún tipo de comportamiento colectivo, y dicho grupo estaría entre las clases 2 y 3.

También, se realizaron análisis mediante funciones de autocorrelación. Estos análisis permiten de una manera rápida observar el grado de aleatoriedad de una regla. Si bien su objetivo original era encontrar patrones en las densidades para saber si las reglas no seguían la ley de los grandes números es posible utilizarlo para incidir en el problema de la clasificación de reglas caóticas y complejas.

El problema del comportamiento colectivo no trivial y la ley de los grandes números es tratado mediante las funciones de autocorrelación normal y parcial. De acuerdo al análisis realizado a la regla $R_{5,9}^{y,N}$ en 5 dimensiones la forma en que se mueve la información dentro del espacio de evoluciones es periódica cuando se toma en cuenta a los vecinos inmediatos de la serie de tiempo de la varianza, lo cual es perfectamente normal pues ahí solo se está observando el ciclo tres propio de la regla, sin embargo al

realizar el análisis de autocorrelación parcial también se observa que las evoluciones no son aleatorias, sino que siguen un patrón a pesar de no están conectadas directamente. Este hecho sugiere que la regla cumple la ley de los grandes números al moverse su varianza de acuerdo a un patrón cual sea éste, lo que convergería a un punto particular que es la base de la ley.

6.3 Trabajo a futuro

A lo largo de la tesis se llegan a tocar temas tan diversos que en más de una ocasión no se profundizó en dicho tema, lo que desprende varios problemas que pueden ser estudiados a futuro y conservan cierta relación con el comportamiento colectivo en general y con el comportamiento colectivo no trivial en particular.

6.3.1 Comportamiento colectivo en más de dos estados.

El comportamiento colectivo presentado en la tesis se limita a los casos de estudio en dos estados lo cual hace que el mismo comportamiento que se encuentre sea primitivo. En los sistemas colectivos de la naturaleza existen multitud de variables que pueden ser mapeadas cada una a un estado por lo cual comenzar el estudio sistemático de este tema es de interés e importancia para el área particular del comportamiento colectivo.

Los mapas de retorno no tienen un límite para los estados, si bien la complejidad de su lectura puede aumentar. Por otro lado, los parámetros λ , Z y el análisis de varianza no tienen un límite en cuanto estados o dimensión, lo cual entrega una delimitación inicial del problema.

6.3.2 Análisis de series de tiempo.

En el presente trabajo se ha presentado una metodología donde se da como resultado una serie de tiempo que muestra el comportamiento de la población del AC. Se ha realizado el análisis de dicha serie de tiempo a través de dos métodos clásicos dentro del análisis de series de tiempo, sin embargo el área de estudio es muy extensa, lo que permite utilizar otras herramientas para inferir más información de utilidad para el diseño de reglas, o bien, la comprensión de fenómenos dentro de los AC.

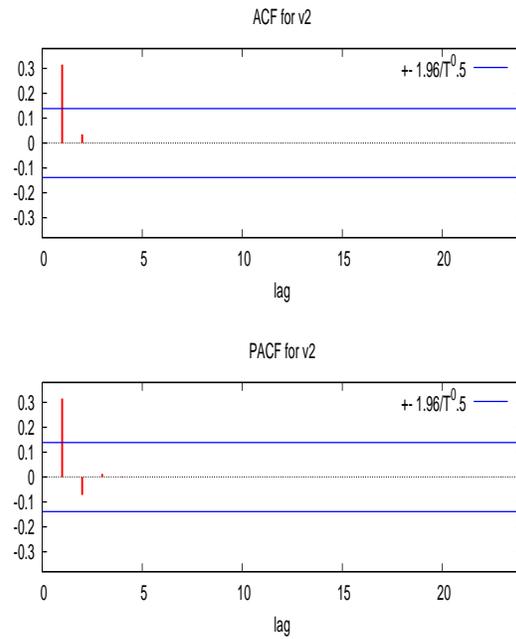
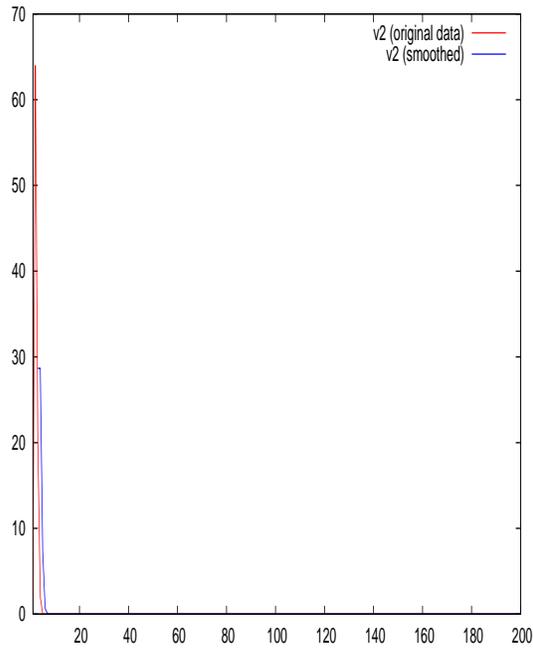
6.3.3 Diseño de sistemas discretos con comportamiento colectivo.

Si bien hasta el momento se ha hablado de comportamiento colectivo y se ha presentado una forma de estudio, en AC no existe una aproximación directa del modelado de reglas que presenten el comportamiento colectivo. Esto es, tomar modelos fuera de los AC, ya sean matemáticos o de la naturaleza, y diseñar reglas que puedan simular dicho comportamiento. Una primera aproximación puede realizarse a través del modelo existente de las parvadas donde incluso existe un algoritmo para agentes.

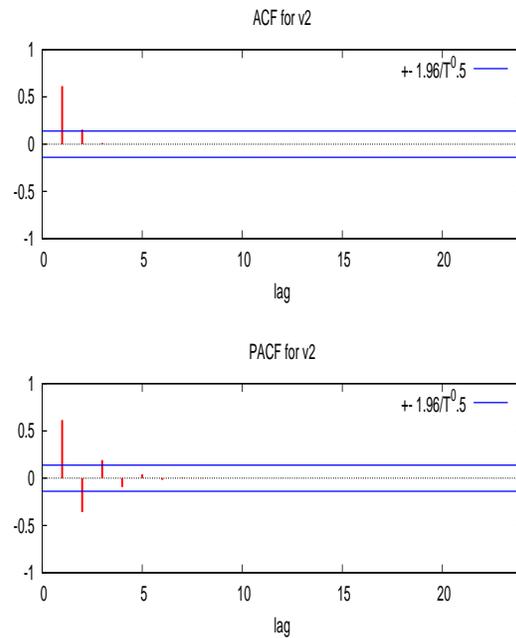
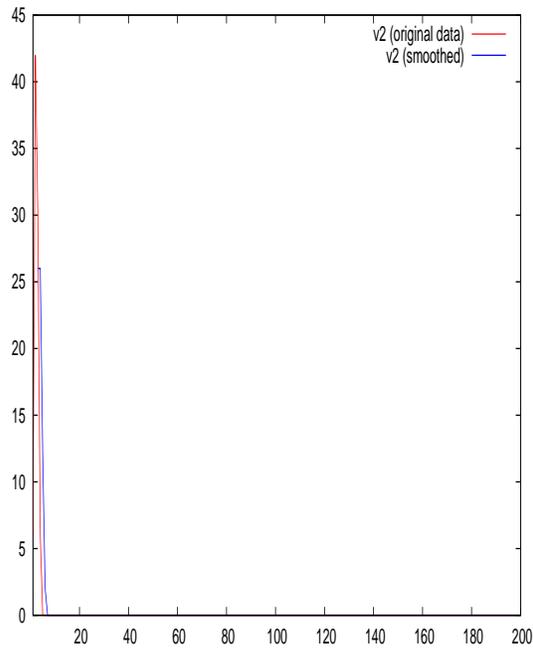
Lo métodos de estudio presentados en la tesis pueden ser utilizados no solo para el caso particular de AC sino pueden ser extendidos a mapas acoplados, redes booleanas y en general, sistemas discretos pues no se preocupan por la topología, sino por el comportamiento global a través de las densidades de los estados, elemento que comparten todos los sistemas discretos.

6.3.4 Teoría de campo medio para más de 2 estados.

En el capítulo 3 se plantea la extensión de dos a n estados para el estudio de autómatas celulares mediante la teoría de campo medio. Ya se ha probado que dicha teoría es de ayuda al momento de predecir las evoluciones de los AC en diferentes dimensiones y con dos estados, lo que permite inferir que puede ser una buena herramienta para el estudio de la familia de AC de 3 estados.

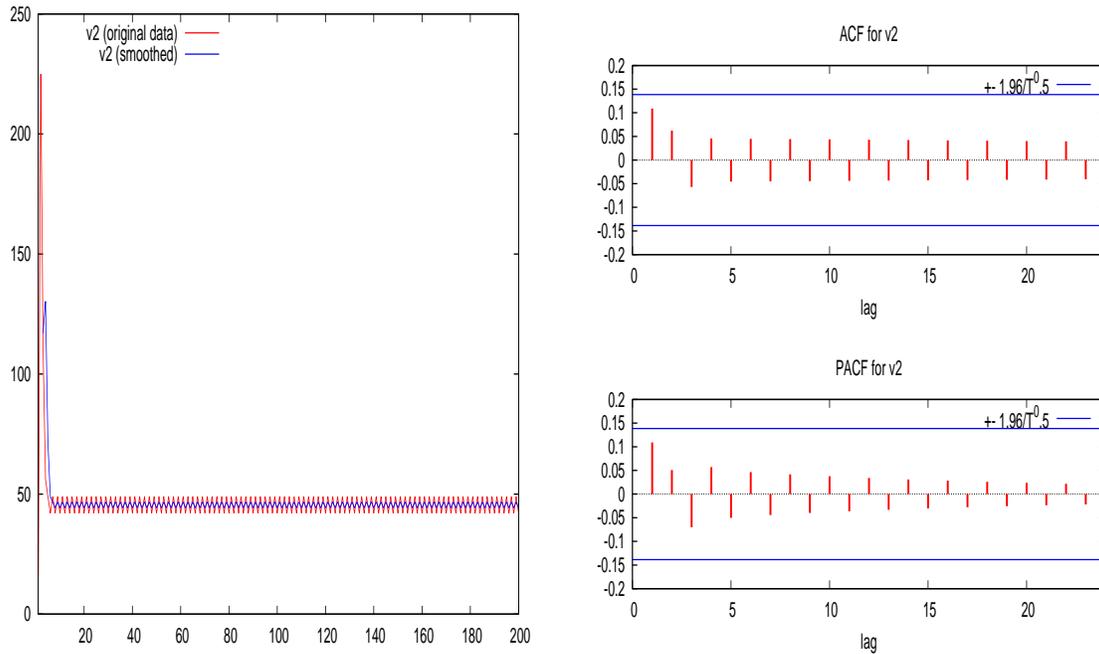


(a) Serie de tiempo de la varianza para la regla 32 (b) Mapa de retorno densidad inicial de 50%

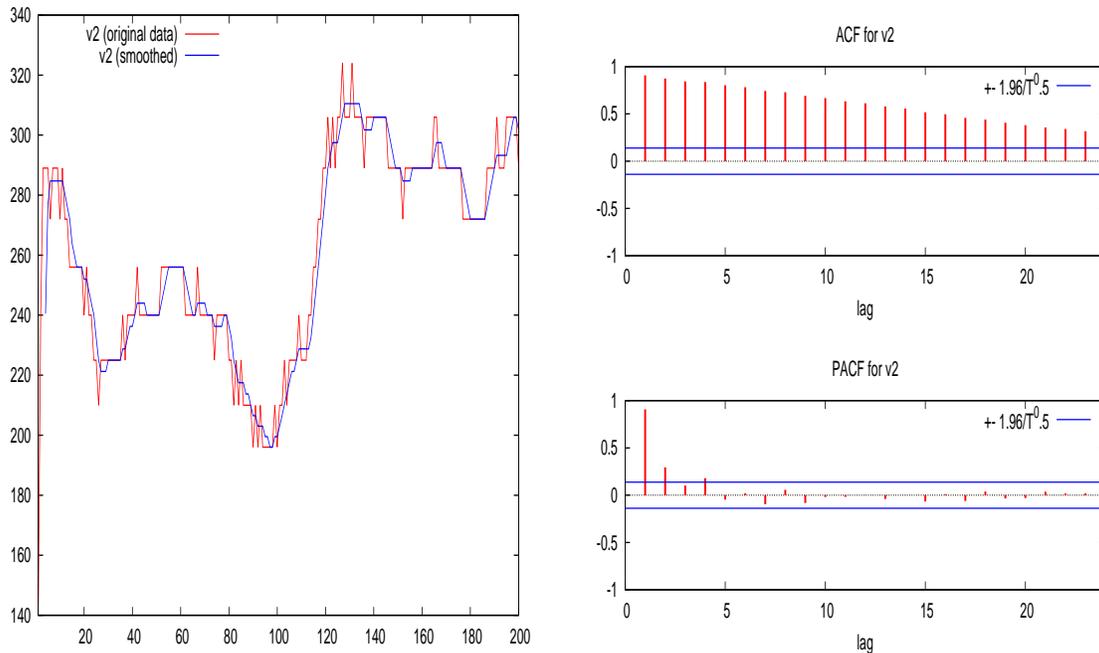


(c) Serie de tiempo de la varianza para la regla 32 (d) Mapa de retorno densidad inicial de 95%

Figura 6.1: Análisis de varianza para las reglas 32 y 160. En a) y c) se presenta la serie de tiempo original en rojo y la misma suavizada a través de la media móvil con un factor de 3. En b) y d) se muestran las gráficas de la función de autocorrelación en la parte superior y de la función de autocorrelación parcial al inferior.

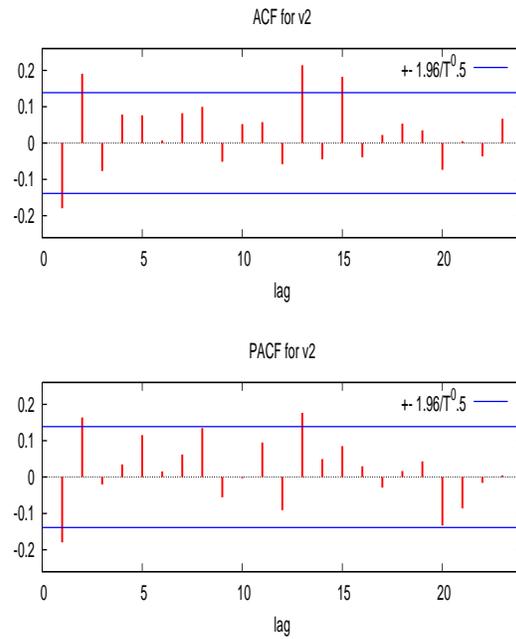
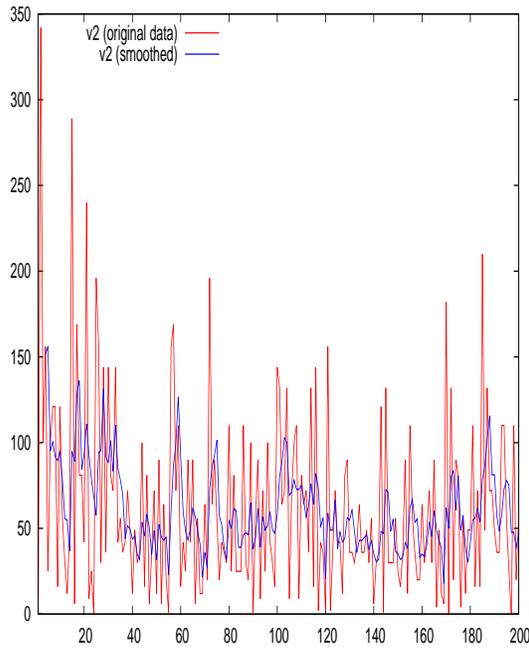


(a) Serie de tiempo de la varianza para la regla 108 (b) Mapa de retorno densidad inicial de 50%



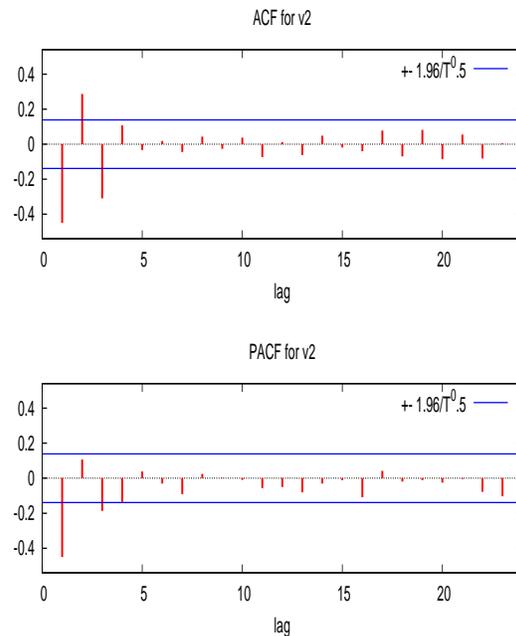
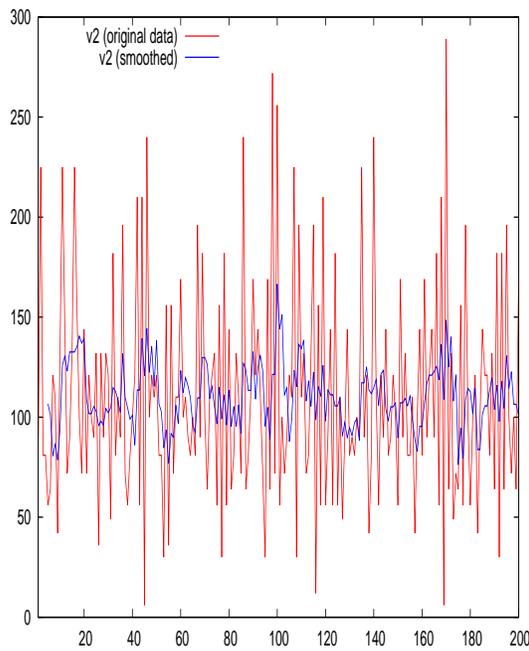
(c) Serie de tiempo de la varianza para la regla 184 (d) Mapa de retorno densidad inicial de 95%

Figura 6.2: Análisis de varianza para las reglas 108 y 184. En a) y c) se presenta la serie de tiempo original en rojo y la misma suavizada a través de la media móvil con un factor de 3. En b) y d) se muestran las gráficas de la función de autocorrelación en la parte superior y de la función de autocorrelación parcial al inferior.



(a) Serie de tiempo de la varianza para la regla 22

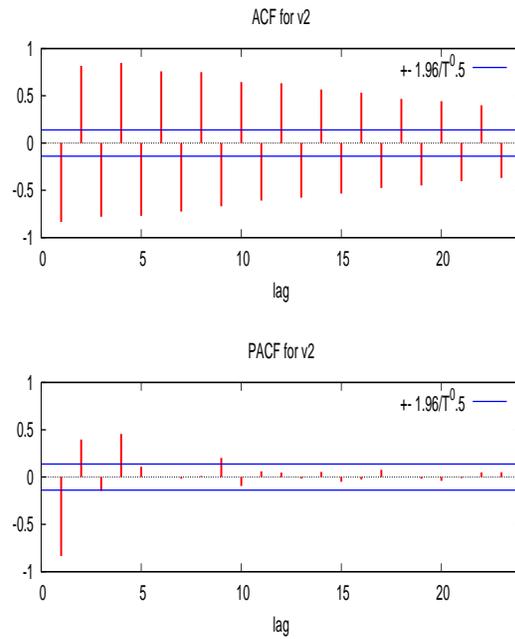
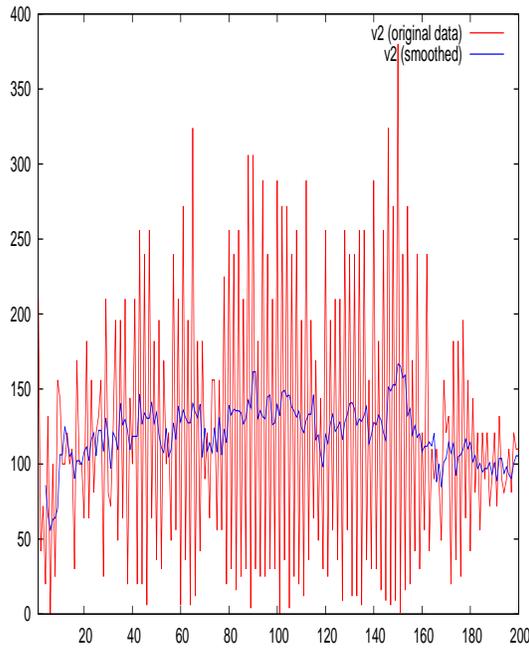
(b) Mapa de retorno densidad inicial de 50%



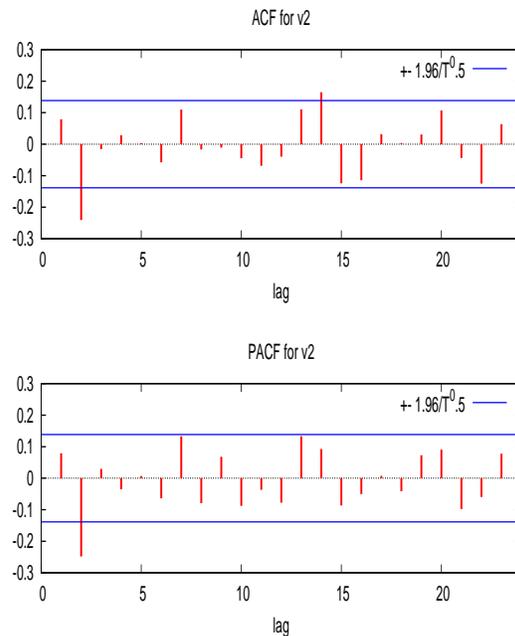
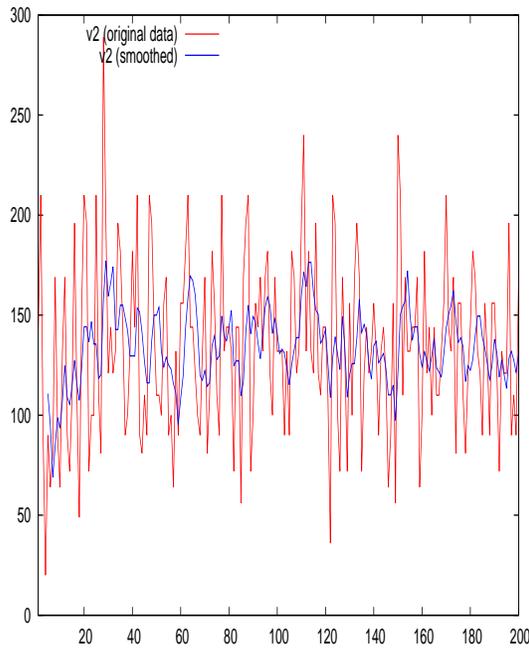
(c) Serie de tiempo de la varianza para la regla 30

(d) Mapa de retorno densidad inicial de 95%

Figura 6.3: Análisis de varianza para las reglas 22 y 30. En a) y c) se presenta la serie de tiempo original en rojo y la misma suavizada a través de la media móvil con un factor de 3. En b) y d) se muestran las gráficas de la función de autocorrelación en la parte superior y de la función de autocorrelación parcial al inferior.



(a) Serie de tiempo de la varianza para la regla 54 (b) Mapa de retorno densidad inicial de 50%



(c) Serie de tiempo de la varianza para la regla 110 (d) Mapa de retorno densidad inicial de 95%

Figura 6.4: Análisis de varianza para las reglas 54 y 110. En a) y c) se presenta la serie de tiempo original en rojo y la misma suavizada a través de la media móvil con un factor de 3. En b) y d) se muestran las gráficas de la función de autocorrelación en la parte superior y de la función de autocorrelación parcial al inferior.

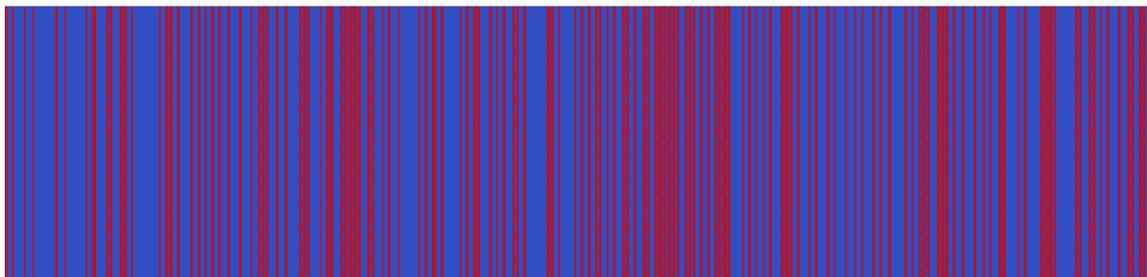


(a) Regla 32



(b) Regla 160

Figura 6.5: Se muestran 200 evoluciones de las reglas de clase 1 de Wolfram 32 y 160 para 500 células con una distribución inicial homogénea de 75% de elementos activos.

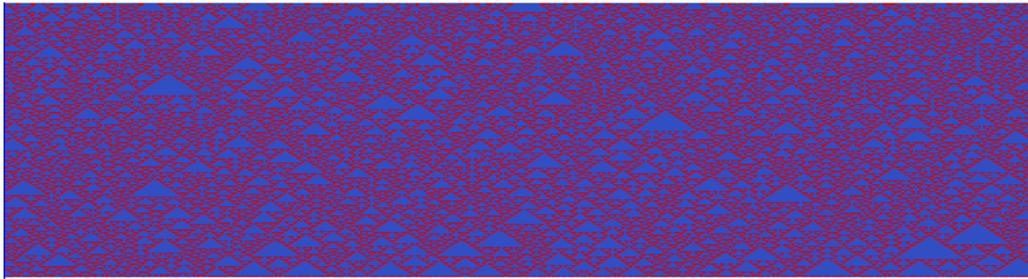


(a) Regla 108

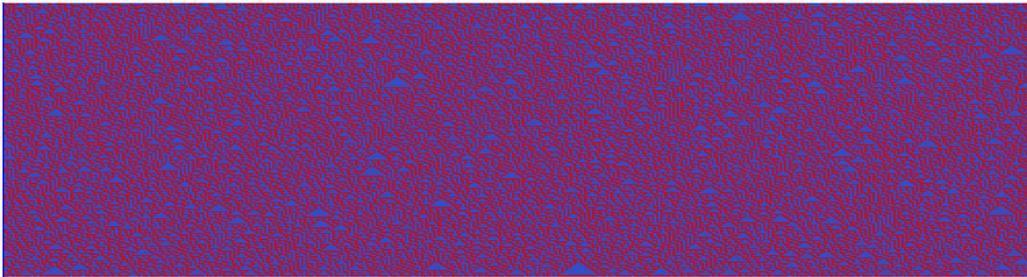


(b) Regla 184

Figura 6.6: Se muestran 200 evoluciones de las reglas de clase 2 de Wolfram 108 y 184 para 500 células con una distribución inicial homogénea de 75% de elementos activos.

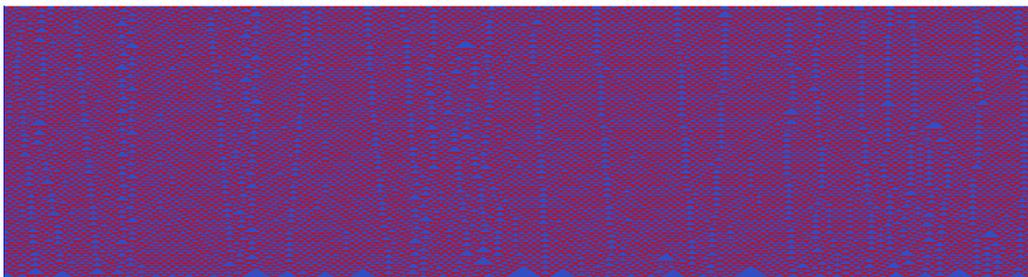


(a) Regla 22

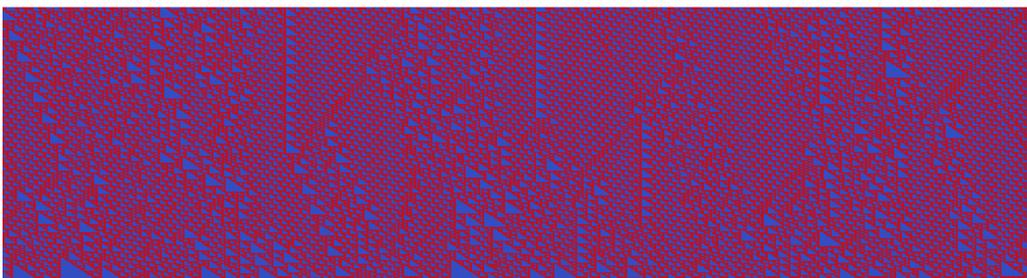


(b) Regla 30

Figura 6.7: Se muestran 200 evoluciones de las reglas de clase 3 de Wolfram 22 y 30 para 500 células con una distribución inicial homogénea de 75% de elementos activos.

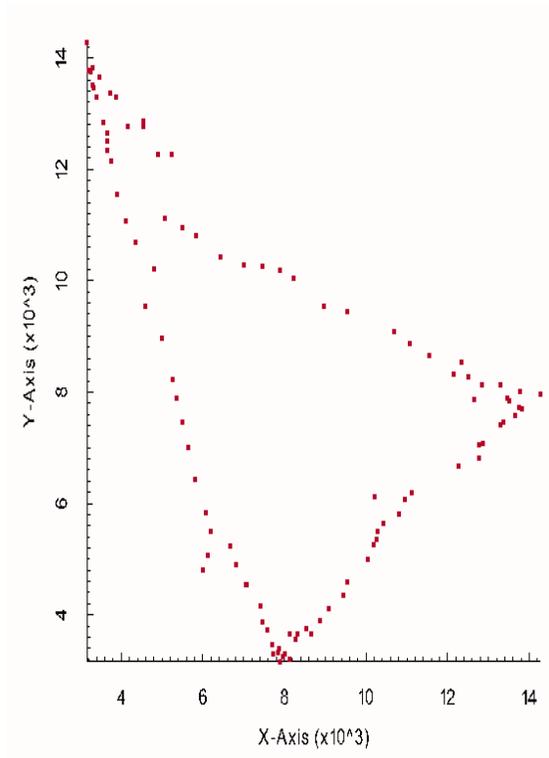


(a) Regla 54

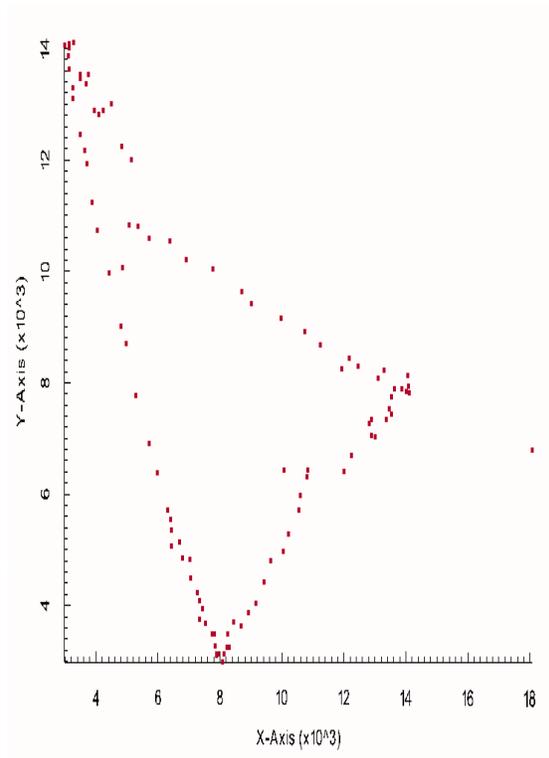


(b) Regla 110

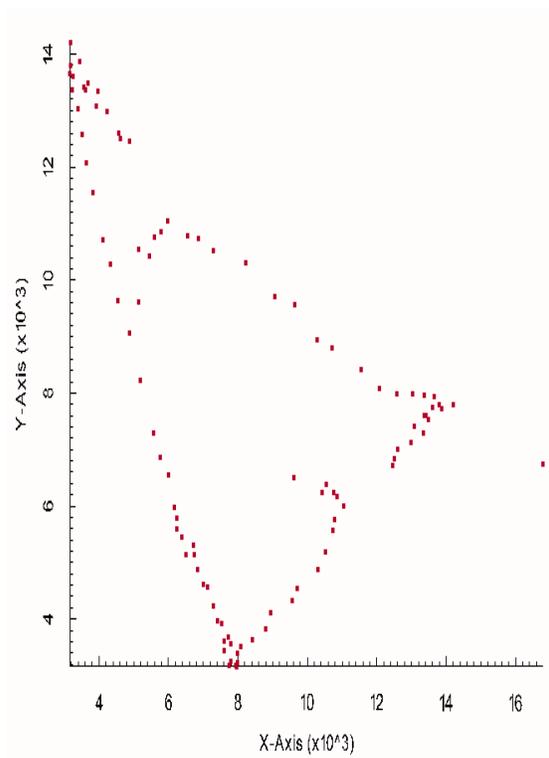
Figura 6.8: Se muestran 200 evoluciones de las reglas de clase 4 de Wolfram 54 y 110 para 500 células con una distribución inicial homogénea de 75% de elementos activos.



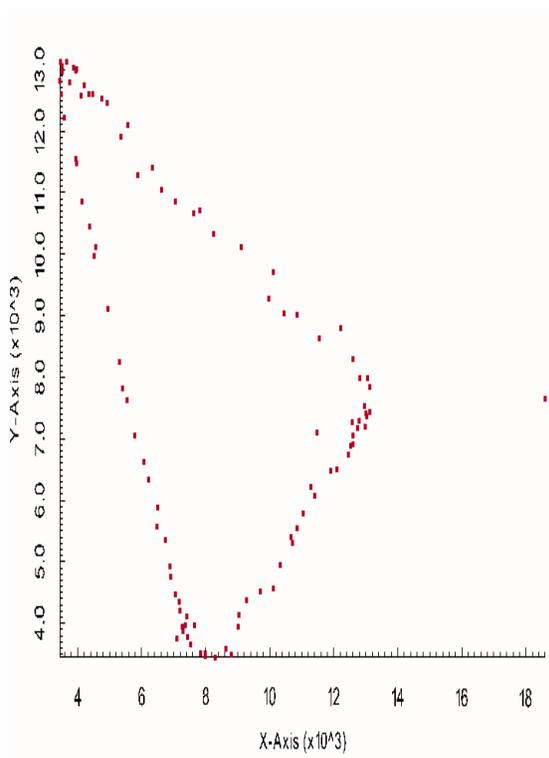
(a) Mapa de retorno densidad inicial de 25%



(b) Mapa de retorno densidad inicial de 50%



(c) Mapa de retorno densidad inicial de 75%



(d) Mapa de retorno densidad inicial de 95%

Figura 6.9: Mapas de retorno de la regla 33 en 3 dimensiones para 100 evoluciones.

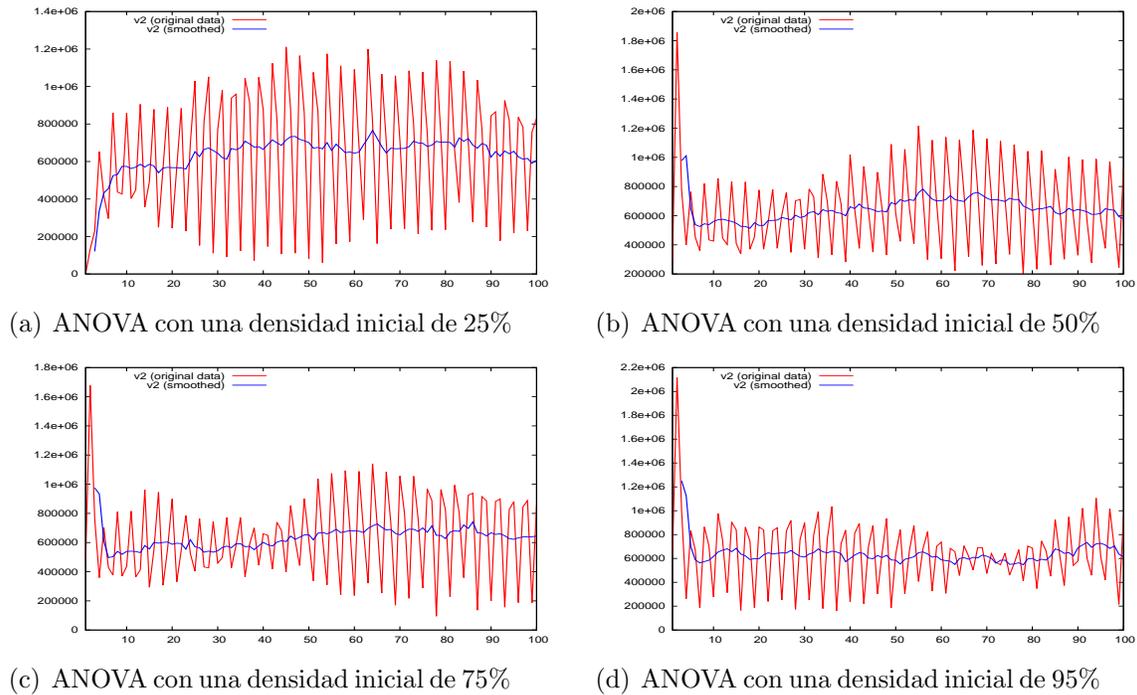


Figura 6.10: ANOVA para la regla 33 en 3 dimensiones con 100 evoluciones.

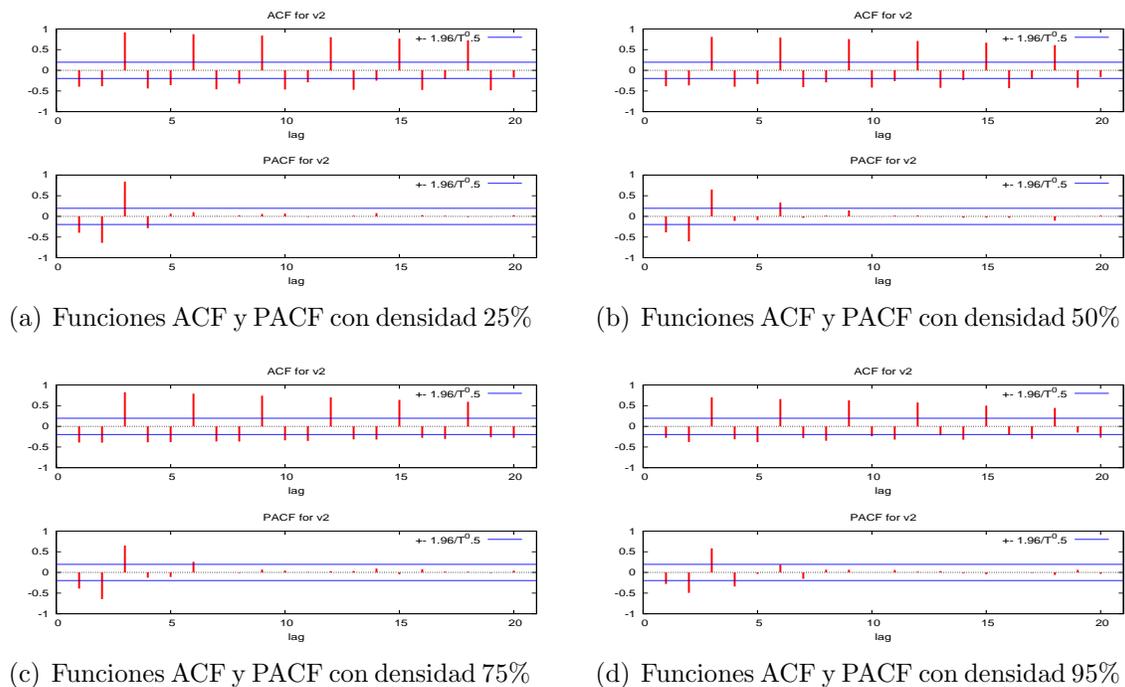
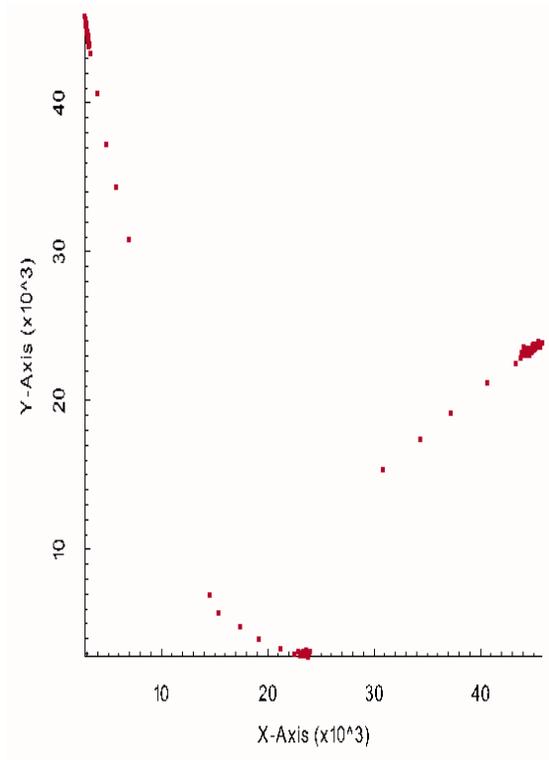
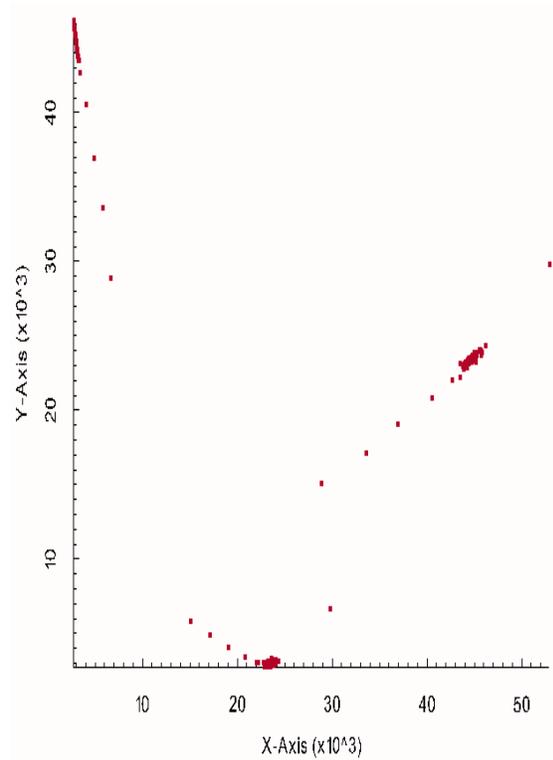


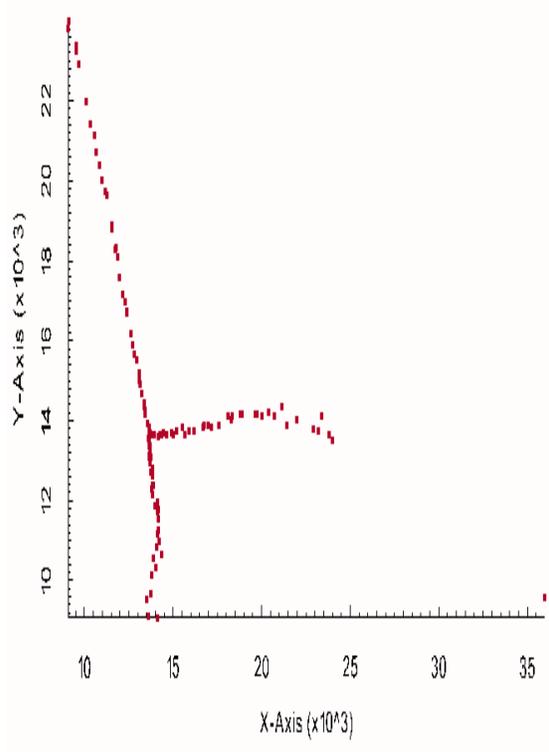
Figura 6.11: Funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) para la regla 33 en 3 dimensiones con 100 evoluciones.



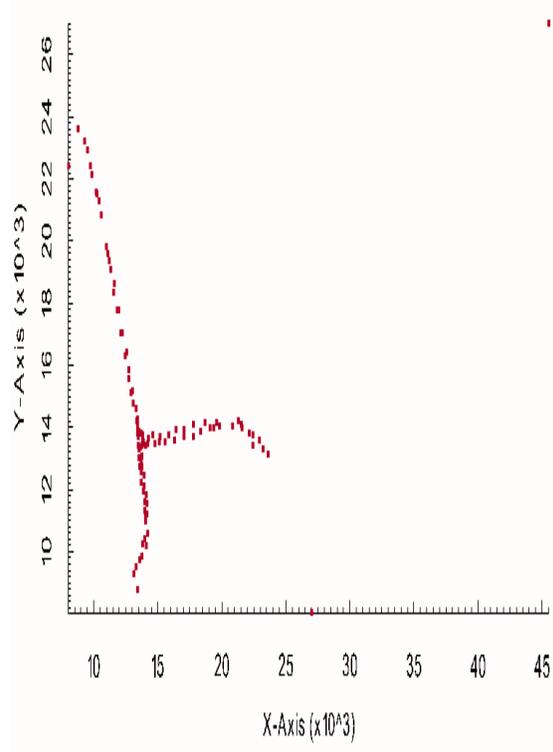
(a) Mapa de retorno densidad inicial de 25%



(b) Mapa de retorno densidad inicial de 50%



(c) Mapa de retorno densidad inicial de 75%



(d) Mapa de retorno densidad inicial de 95%

Figura 6.12: Mapas de retorno de la regla 384 en 4 dimensiones para 100 evoluciones.

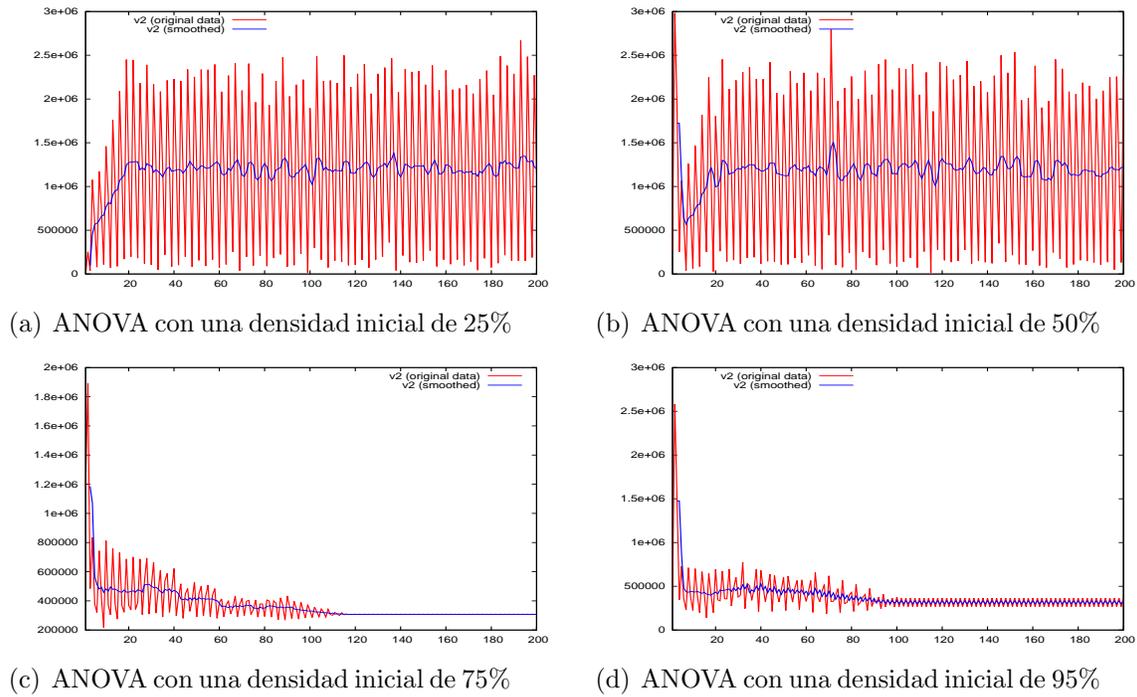


Figura 6.13: ANOVA para la regla 384 en 4 dimensiones con 100 evoluciones.

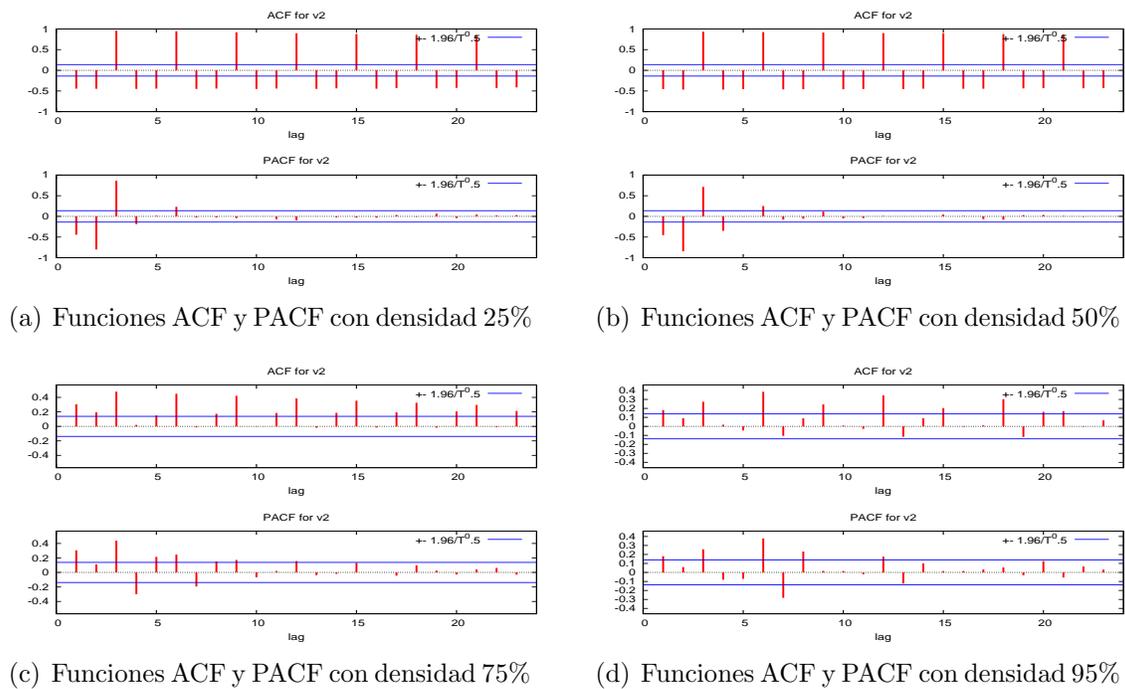
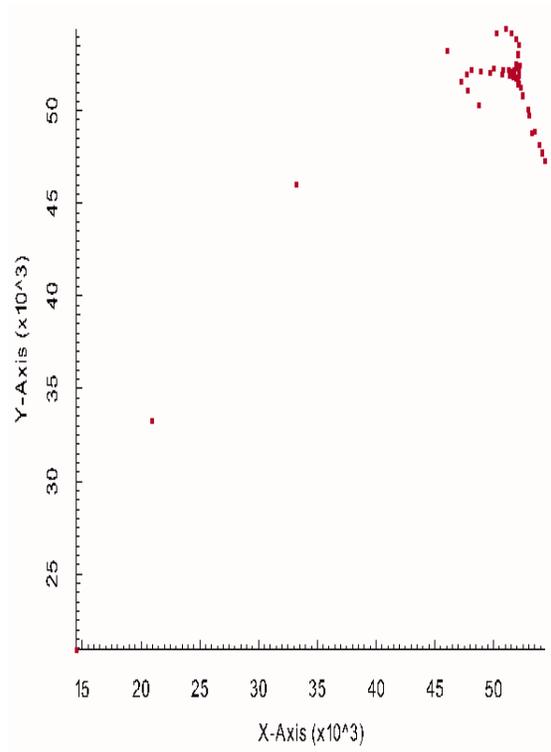
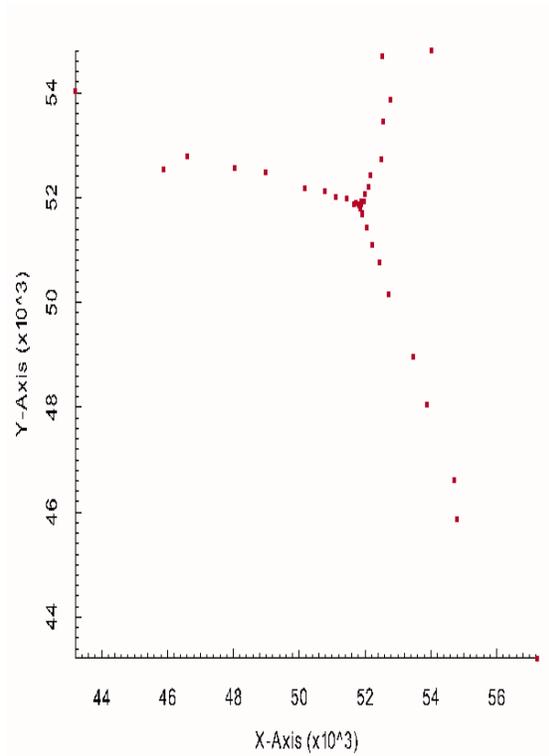


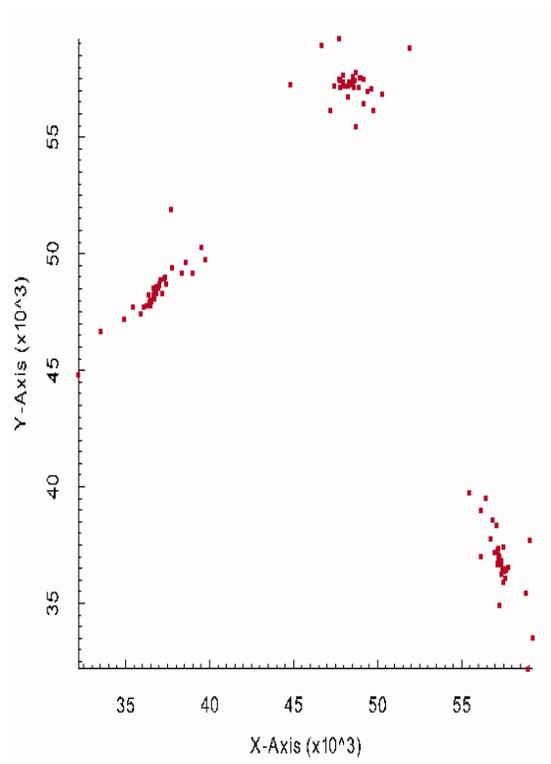
Figura 6.14: Funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) para la regla 384 en 4 dimensiones con 100 evoluciones.



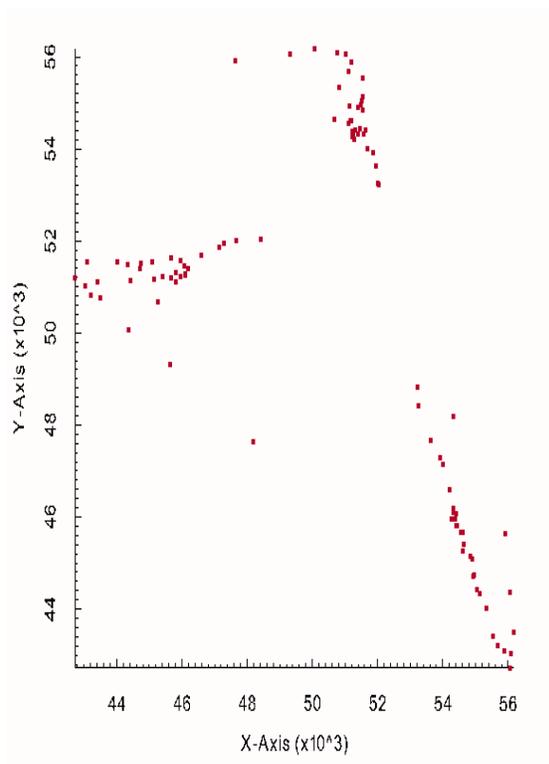
(a) Mapa de retorno densidad inicial de 25%



(b) Mapa de retorno densidad inicial de 50%



(c) Mapa de retorno densidad inicial de 75%



(d) Mapa de retorno densidad inicial de 95%

Figura 6.15: Mapas de retorno de la regla $R_{3,8}^{YN}$ en 4 dimensiones para 100 evoluciones.

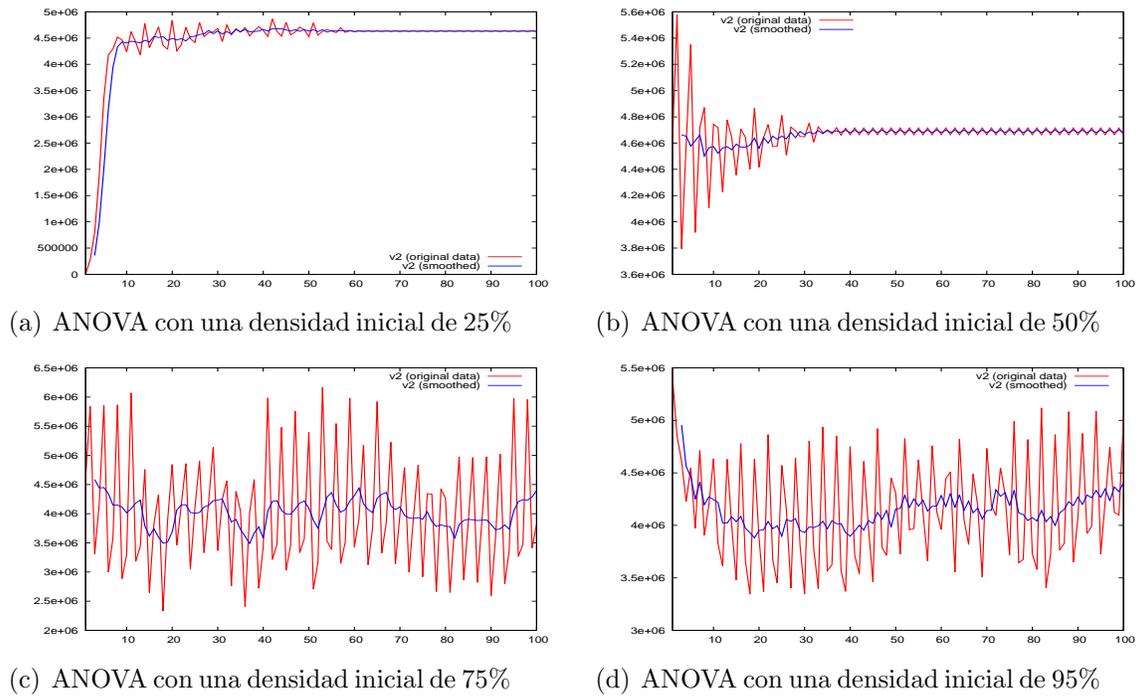


Figura 6.16: ANOVA para la regla $R_{3,8}^{\mathcal{Y}^N}$ en 4 dimensiones con 100 evoluciones.

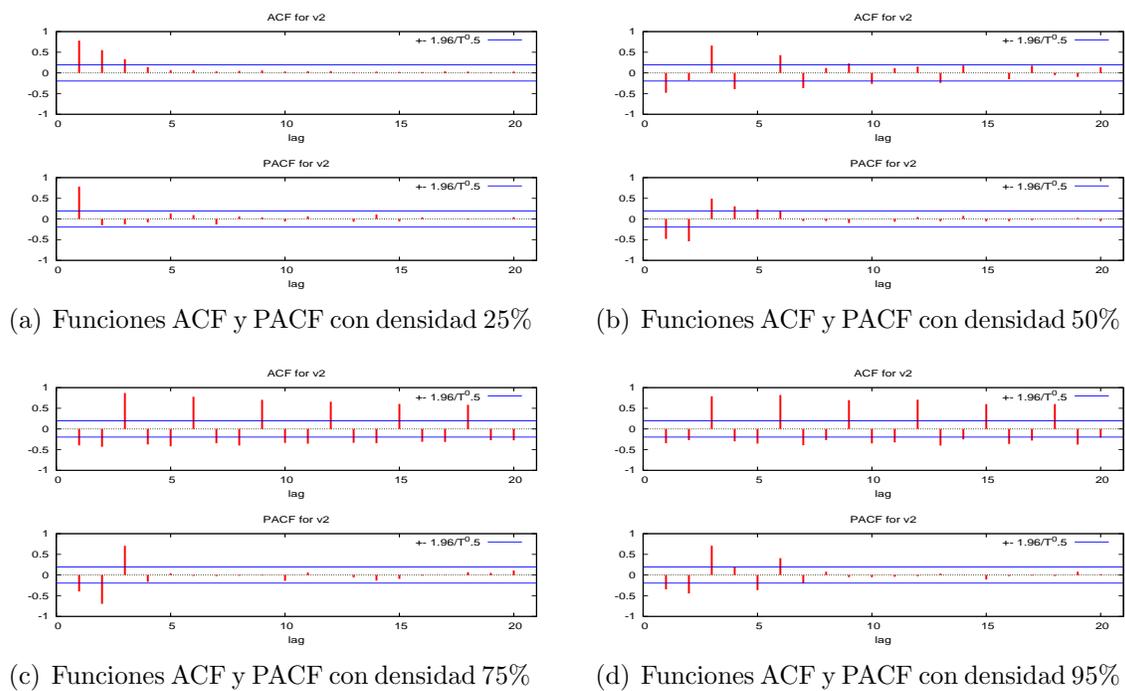
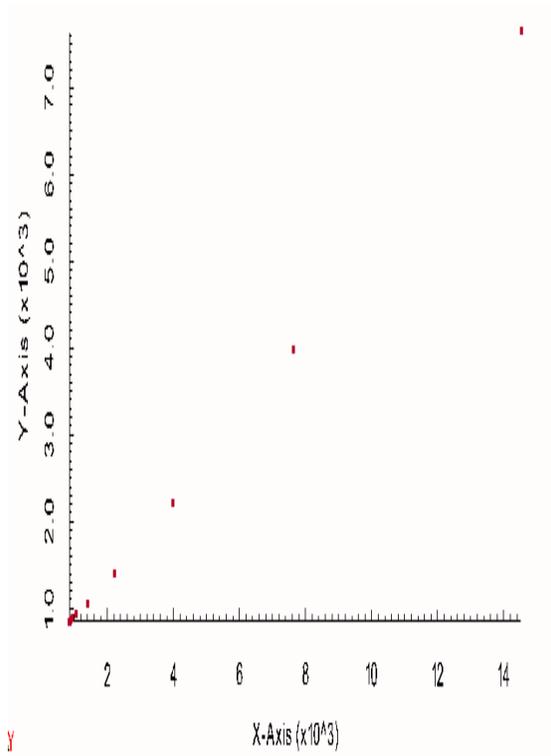
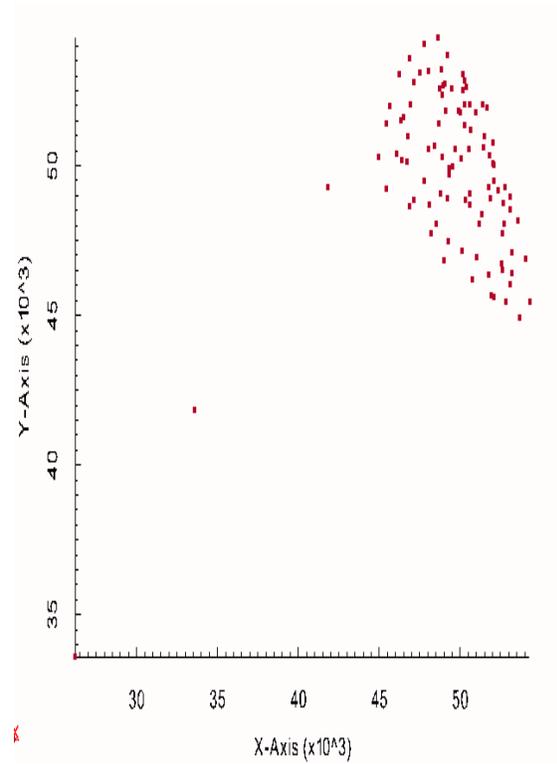


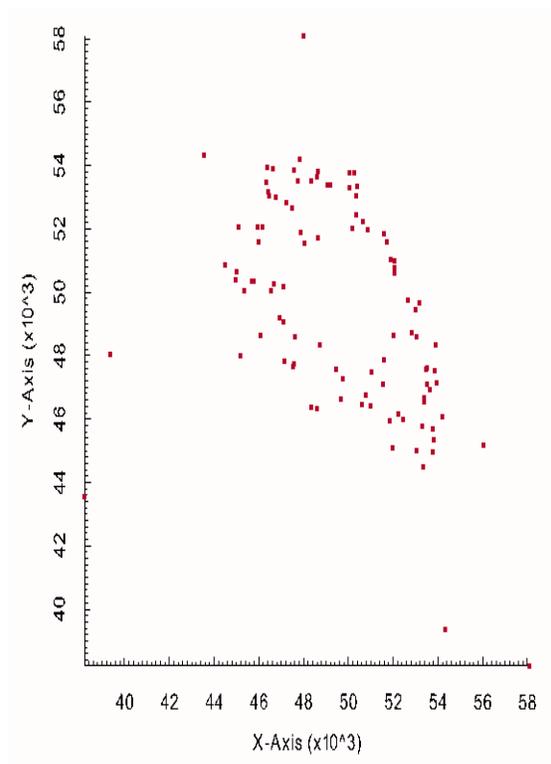
Figura 6.17: Funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) para la regla $R_{3,8}^{\mathcal{Y}^N}$ en 4 dimensiones con 100 evoluciones.



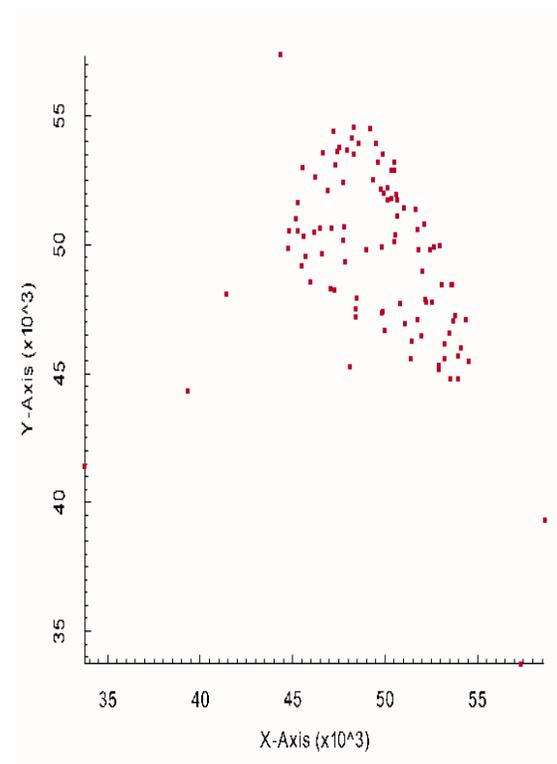
(a) Mapa de retorno densidad inicial de 25%



(b) Mapa de retorno densidad inicial de 50%



(c) Mapa de retorno densidad inicial de 75%



(d) Mapa de retorno densidad inicial de 95%

Figura 6.18: Mapas de retorno de la regla $R_{4,8}^N$ en 4 dimensiones para 100 evoluciones.

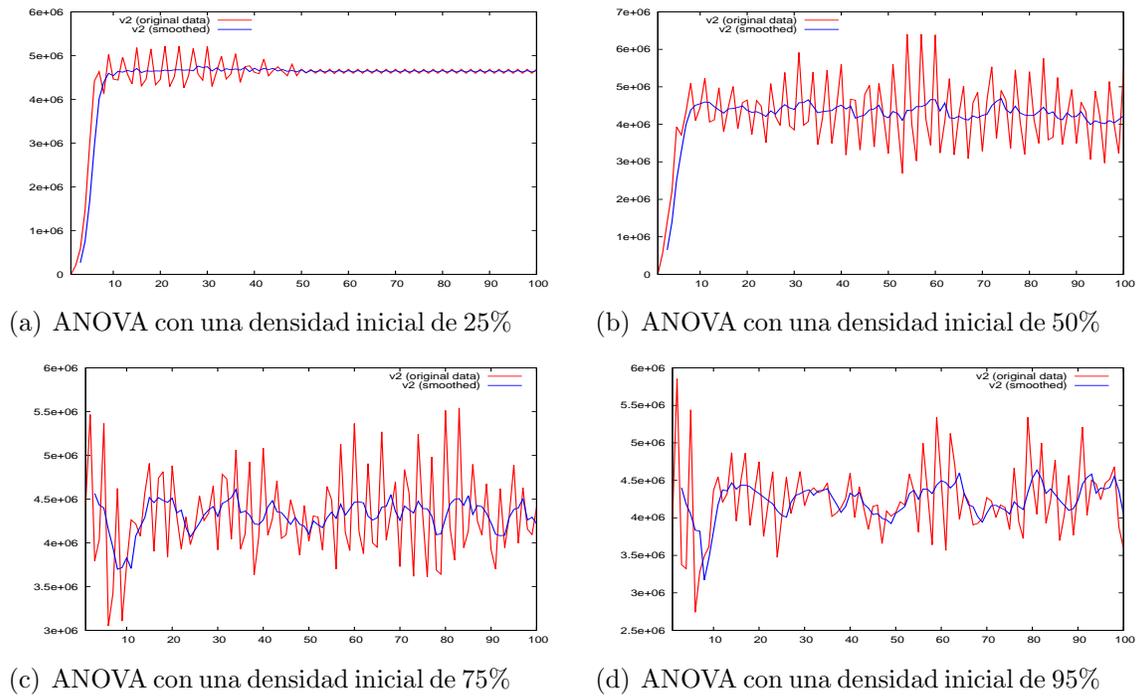


Figura 6.19: ANOVA para la regla $R_{4,8}^{\mathcal{V}^N}$ en 4 dimensiones con 100 evoluciones.

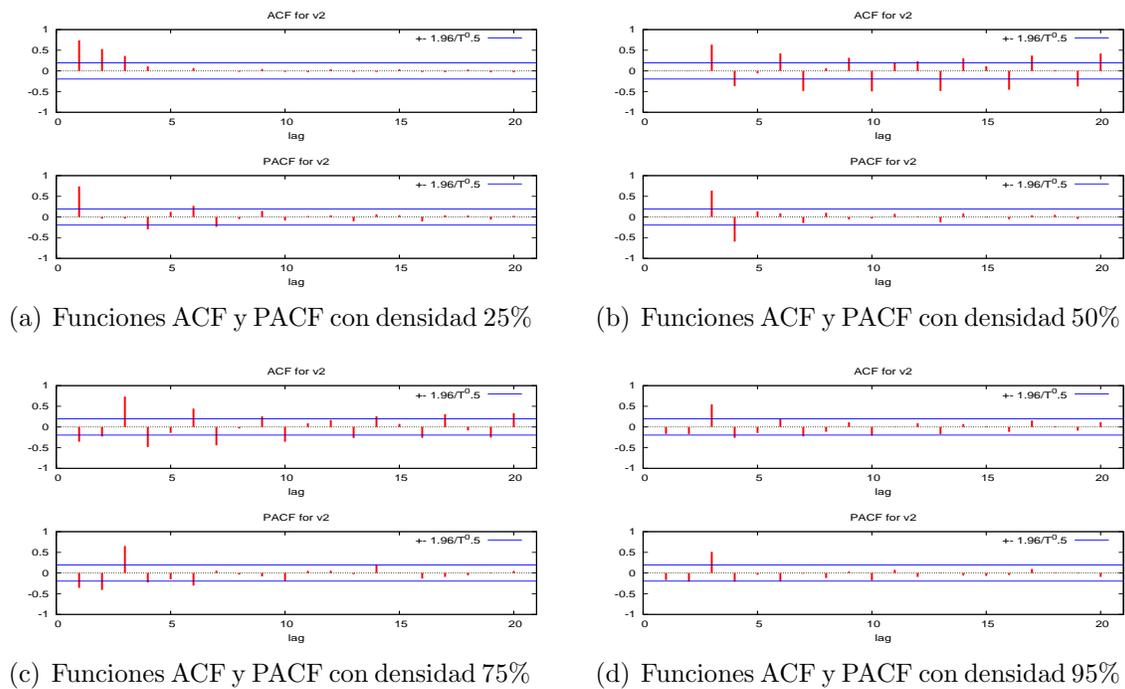
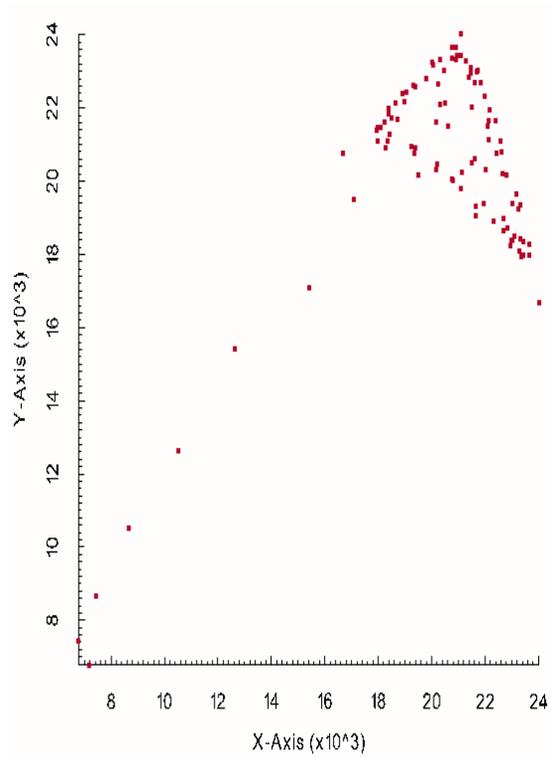
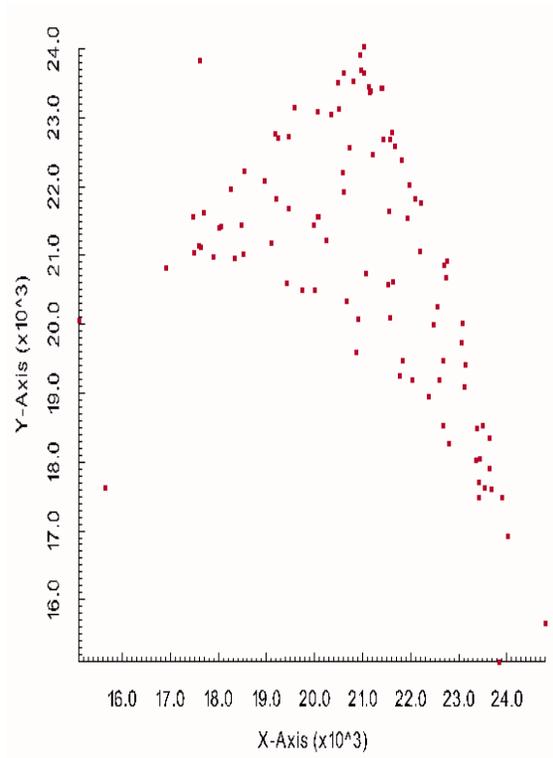


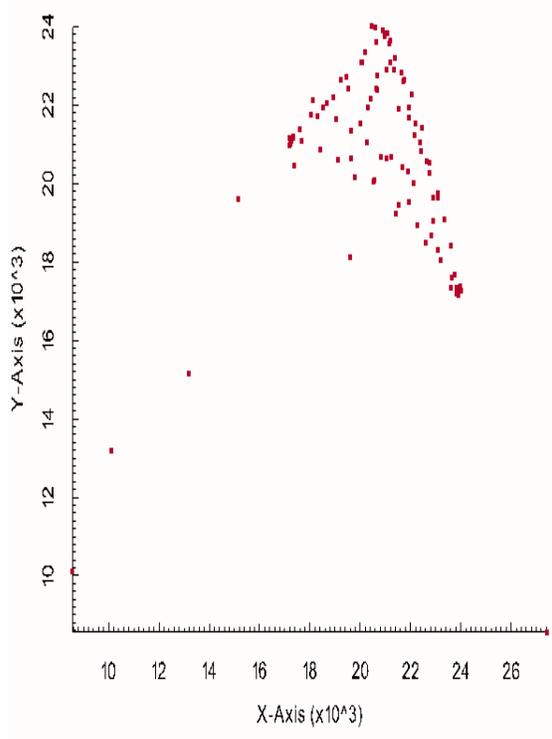
Figura 6.20: Funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) para la regla $R_{4,8}^{\mathcal{V}^N}$ en 4 dimensiones con 100 evoluciones.



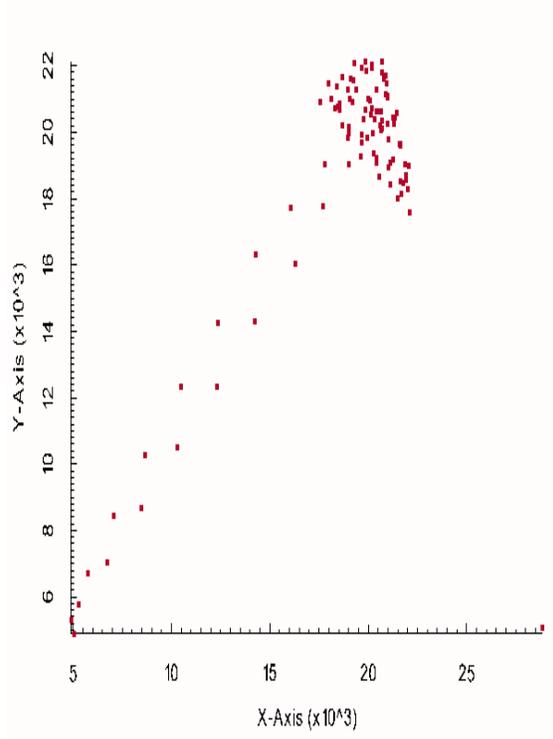
(a) Mapa de retorno densidad inicial de 25%



(b) Mapa de retorno densidad inicial de 50%



(c) Mapa de retorno densidad inicial de 75%



(d) Mapa de retorno densidad inicial de 95%

Figura 6.21: Mapas de retorno de la regla $R_{4,8}^N$ en 5 dimensiones para 100 evoluciones.

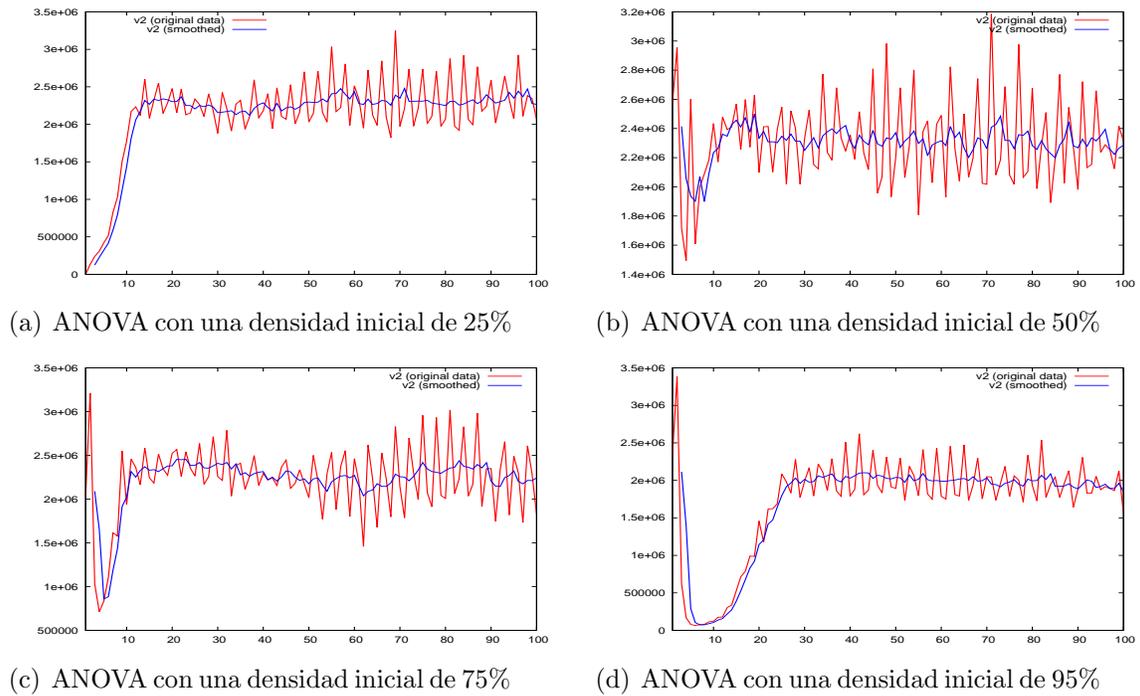


Figura 6.22: ANOVA para la regla $R_{4,8}^{\mathcal{Y}^N}$ en 5 dimensiones con 100 evoluciones.

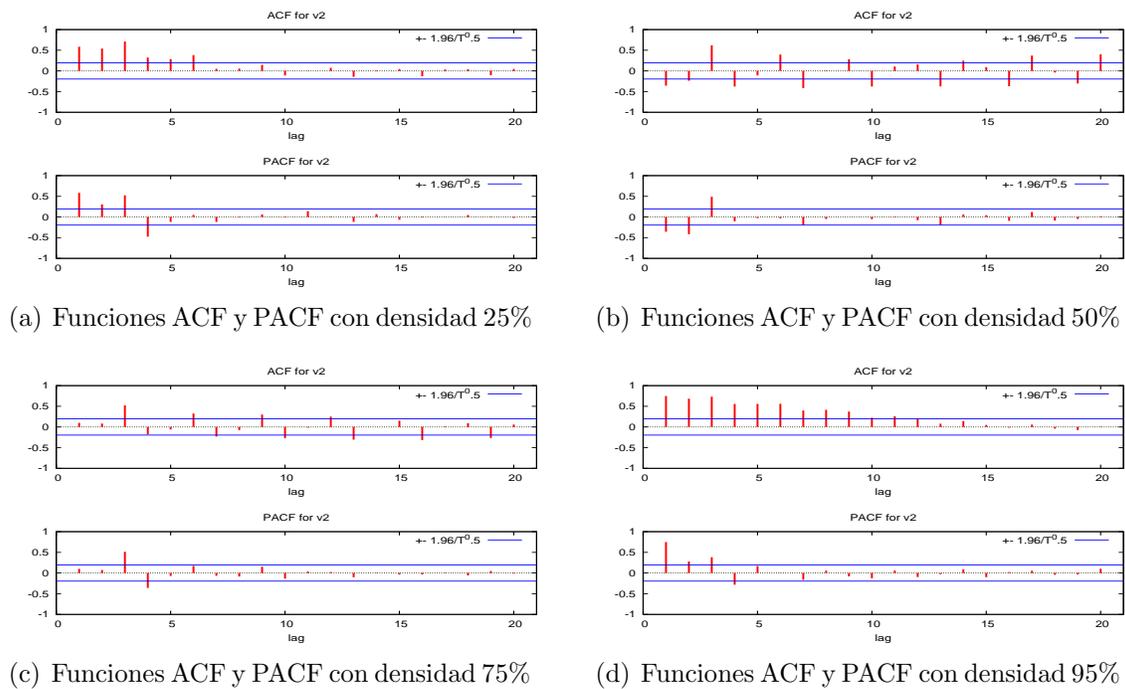
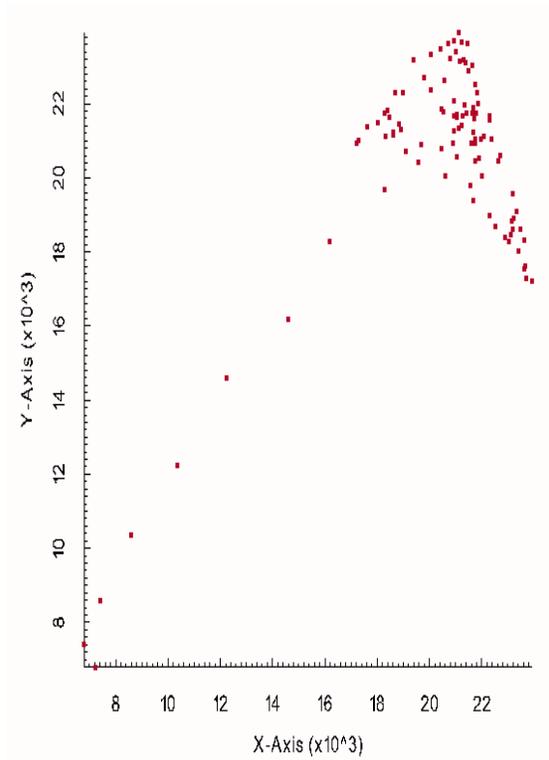
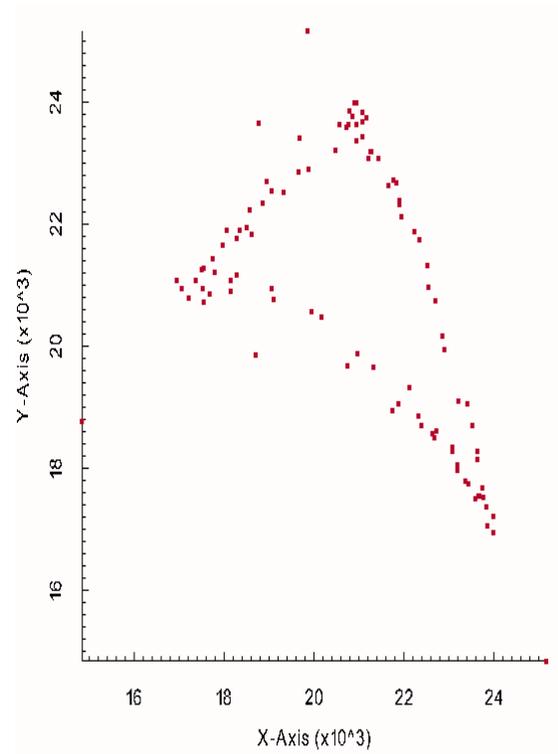


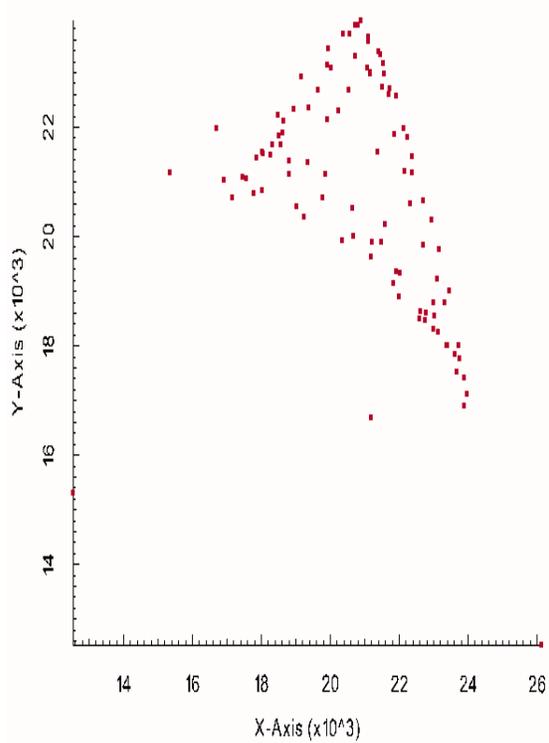
Figura 6.23: Funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) para la regla $R_{4,8}^{\mathcal{Y}^N}$ en 5 dimensiones con 100 evoluciones.



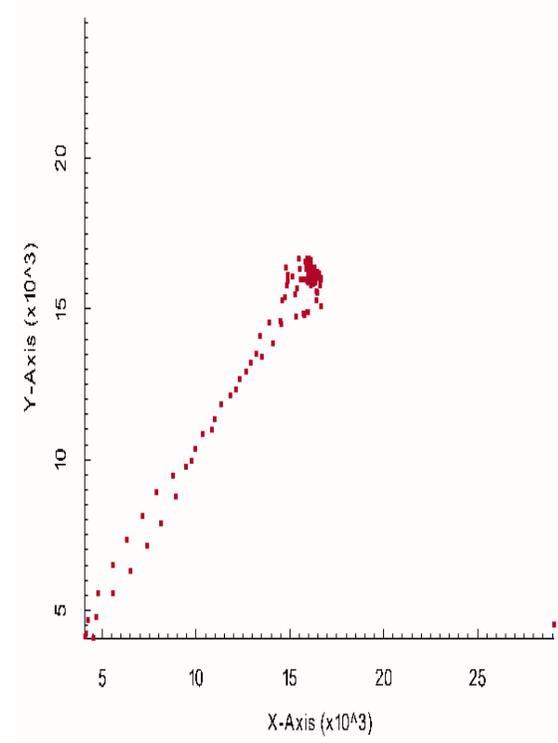
(a) Mapa de retorno densidad inicial de 25%



(b) Mapa de retorno densidad inicial de 50%



(c) Mapa de retorno densidad inicial de 75%



(d) Mapa de retorno densidad inicial de 95%

Figura 6.24: Mapas de retorno de la regla $R_{5,9}^N$ en 5 dimensiones para 100 evoluciones.

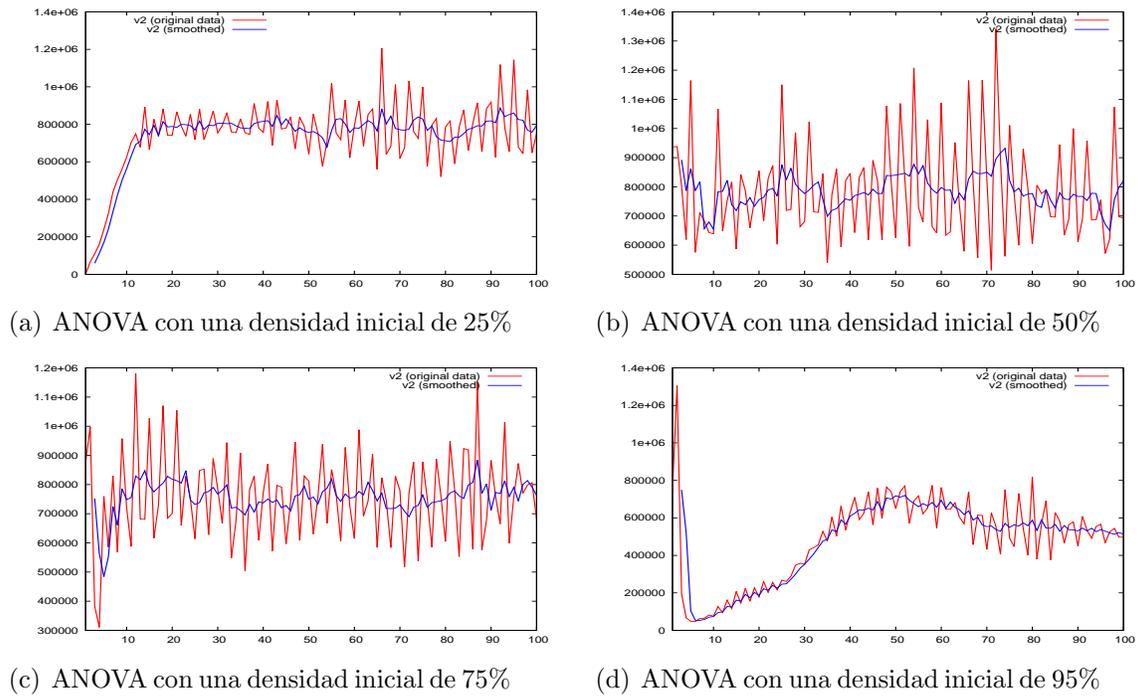


Figura 6.25: ANOVA para la regla $R_{5,9}^{\mathcal{Y}^N}$ en 5 dimensiones con 100 evoluciones.

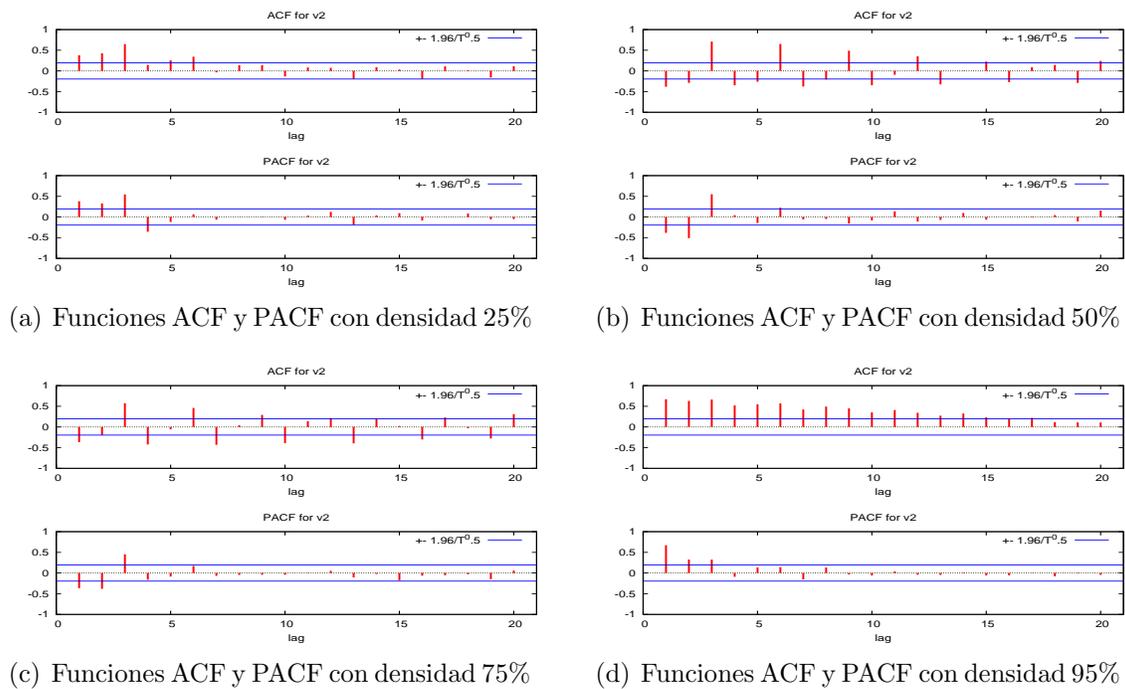
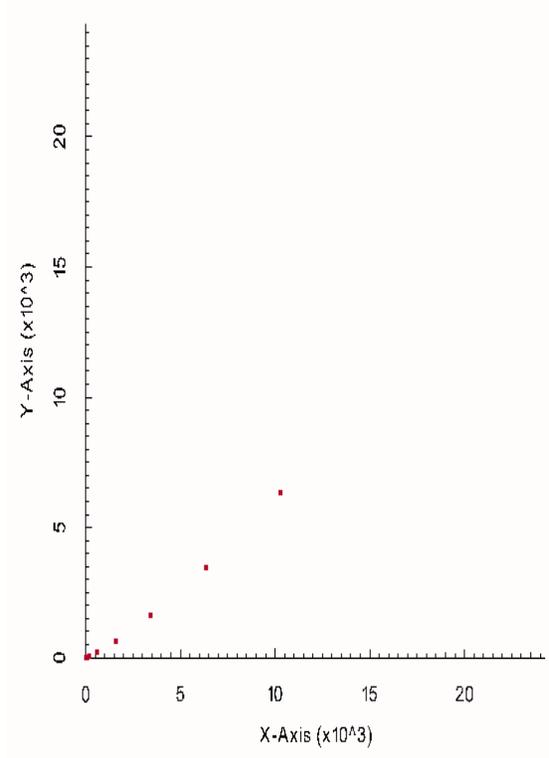
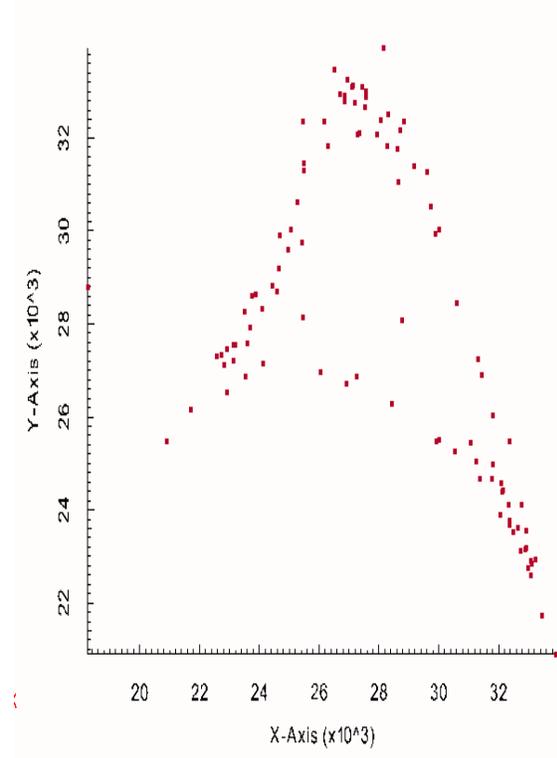


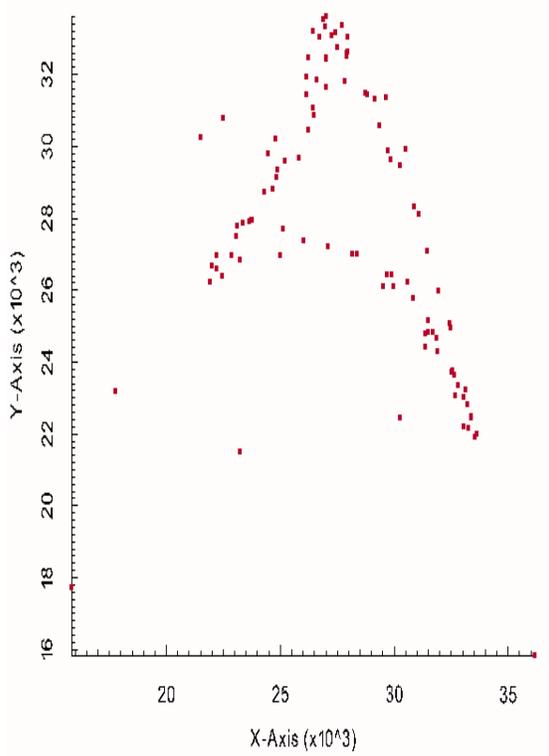
Figura 6.26: Funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) para la regla $R_{5,9}^{\mathcal{Y}^N}$ en 5 dimensiones con 100 evoluciones.



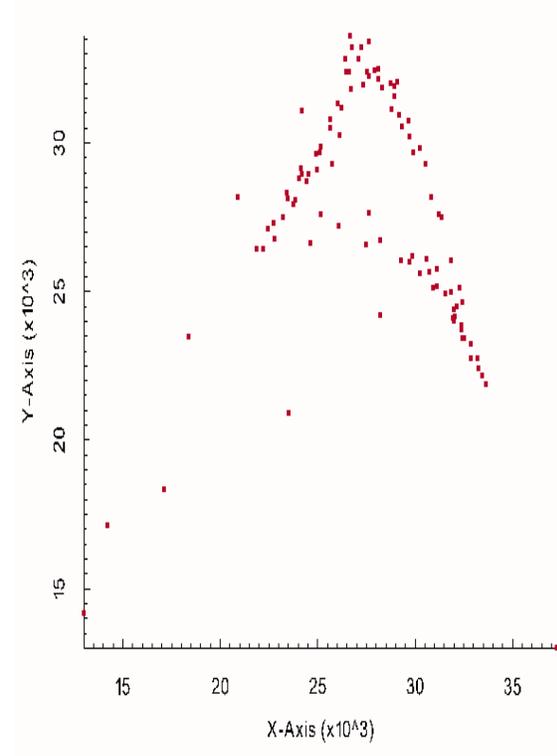
(a) Mapa de retorno densidad inicial de 25%



(b) Mapa de retorno densidad inicial de 50%



(c) Mapa de retorno densidad inicial de 75%



(d) Mapa de retorno densidad inicial de 95%

Figura 6.27: Mapas de retorno de la regla $R_{5,9}^N$ en 6 dimensiones para 100 evoluciones.

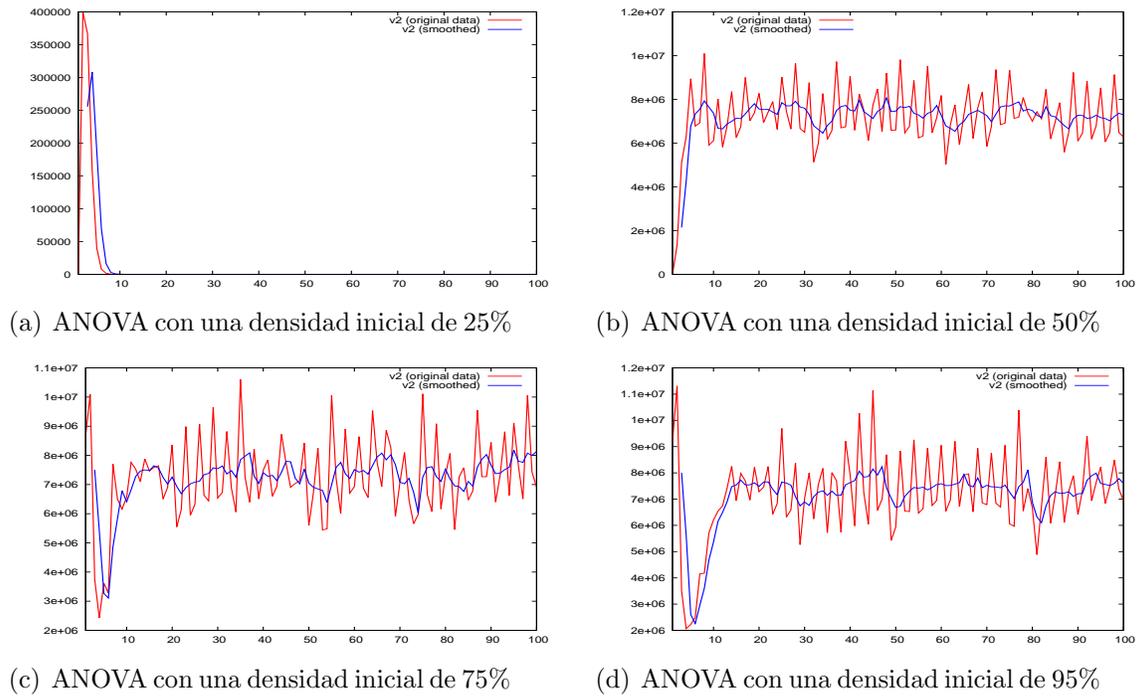


Figura 6.28: ANOVA para la regla $R_{5,9}^{\mathcal{Y}^N}$ en 6 dimensiones con 100 evoluciones.

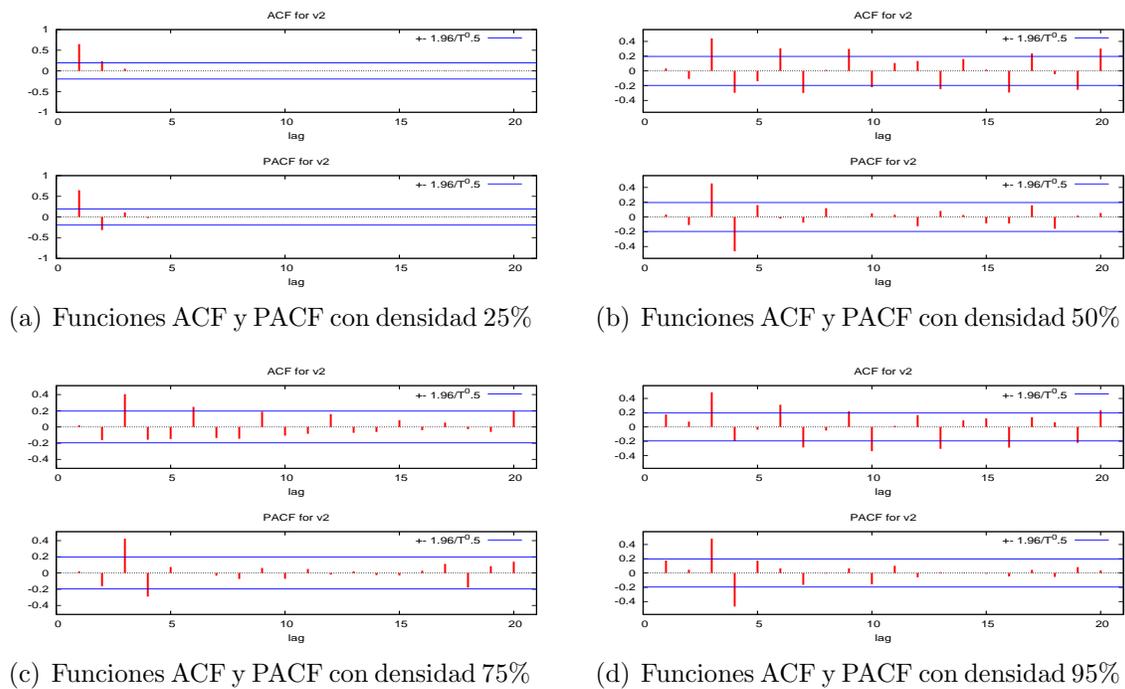
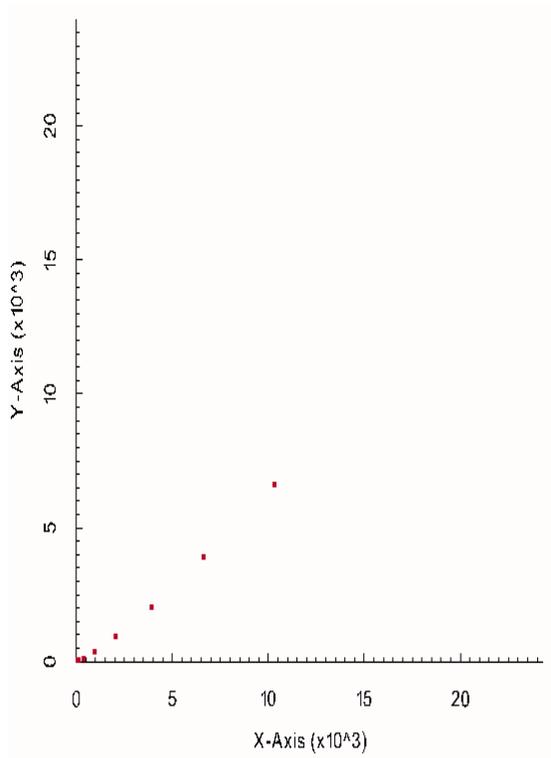
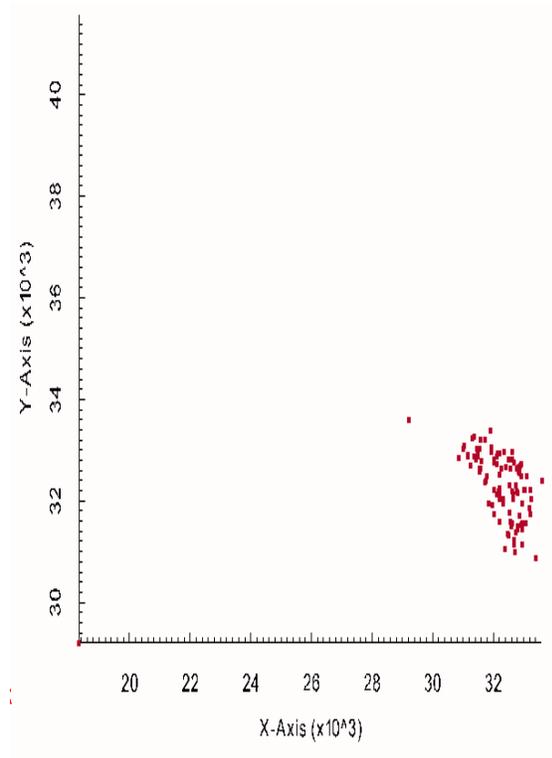


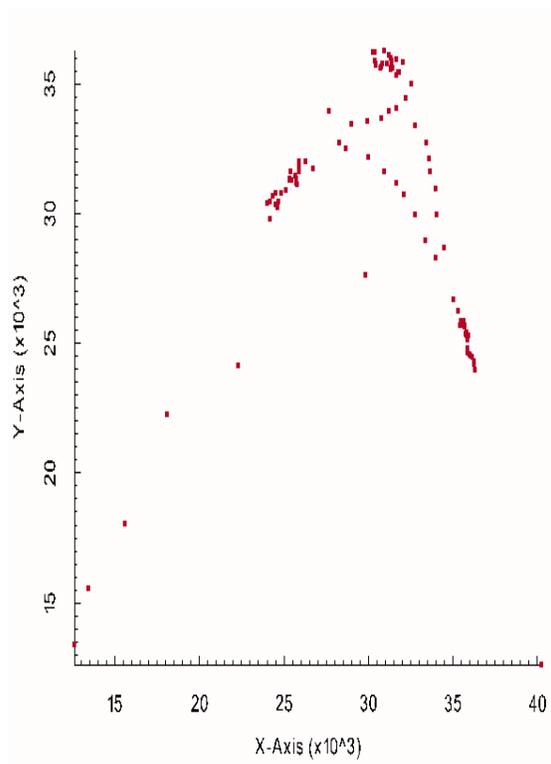
Figura 6.29: Funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) para la regla $R_{5,9}^{\mathcal{Y}^N}$ en 6 dimensiones con 100 evoluciones.



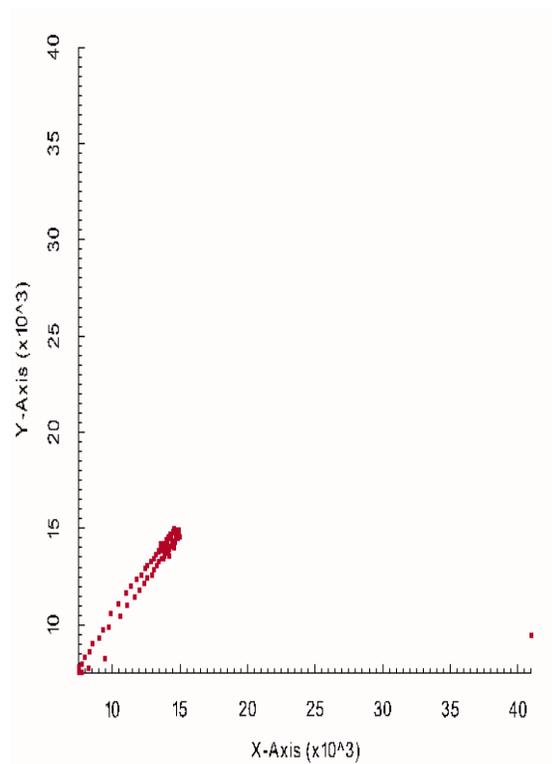
(a) Mapa de retorno densidad inicial de 25%



(b) Mapa de retorno densidad inicial de 50%



(c) Mapa de retorno densidad inicial de 75%



(d) Mapa de retorno densidad inicial de 95%

Figura 6.30: Mapas de retorno de la regla $R_{5,10}^N$ en 6 dimensiones para 100 evoluciones.

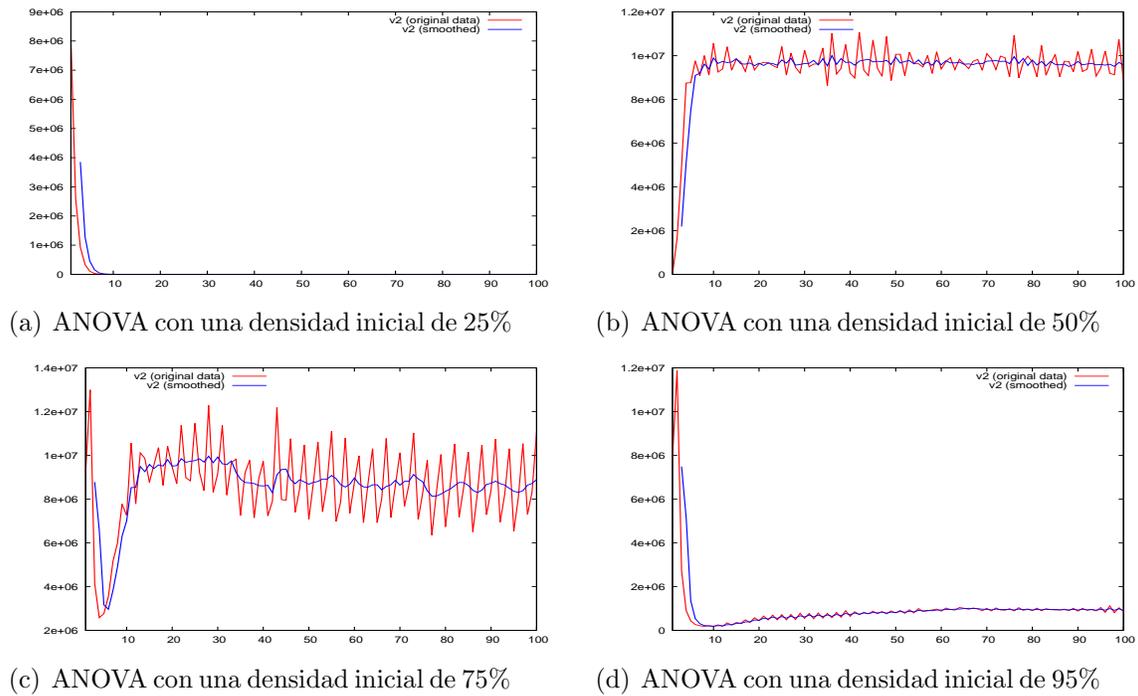


Figura 6.31: ANOVA para la regla $R_{5,10}^{yN}$ en 6 dimensiones con 100 evoluciones.

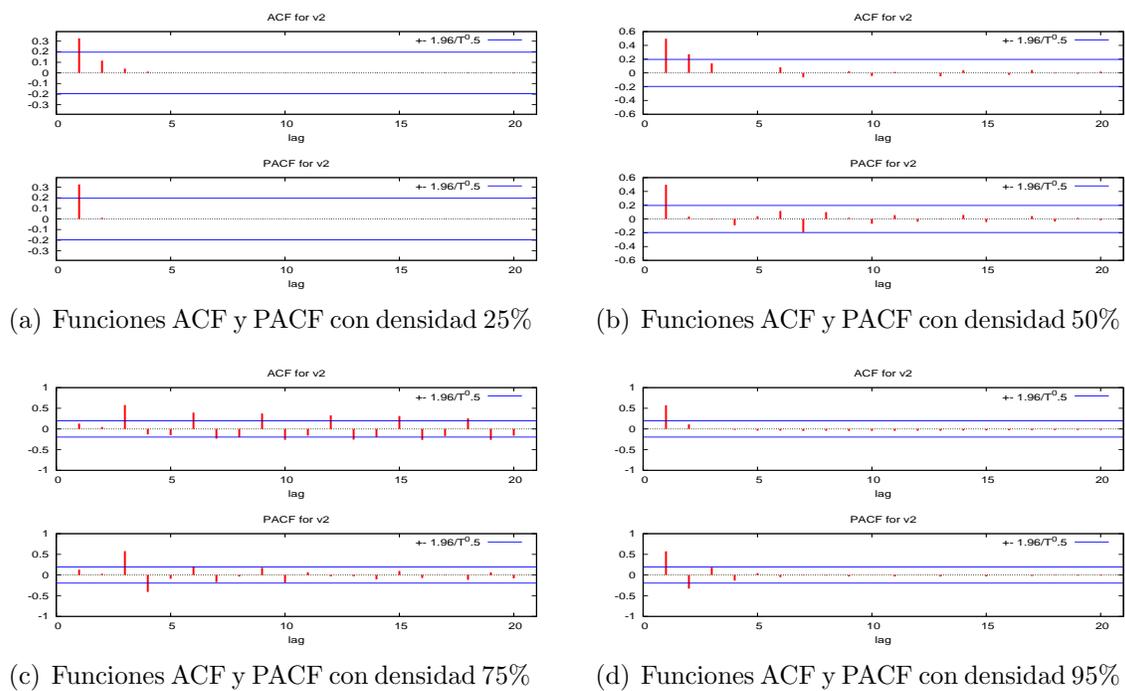
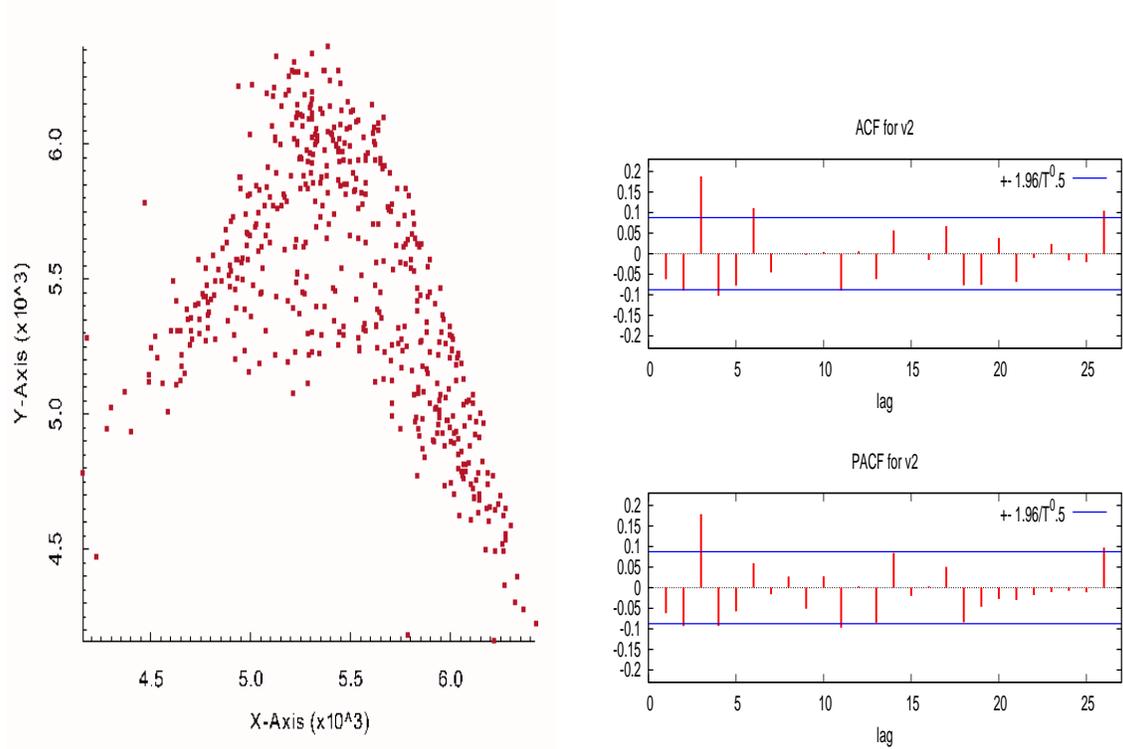
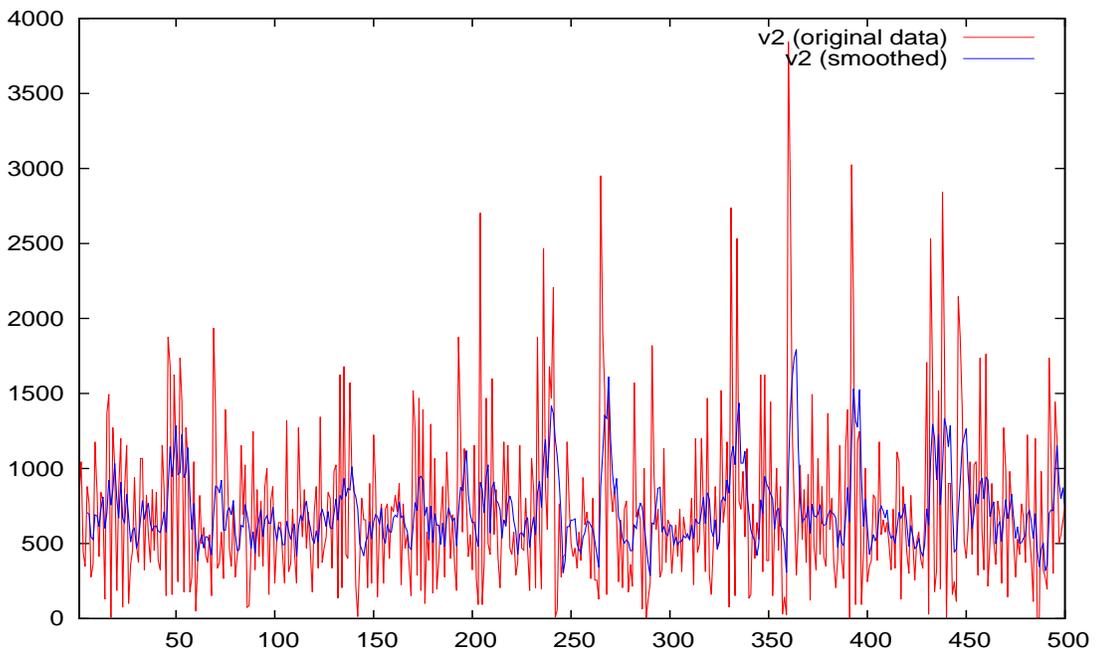


Figura 6.32: Funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) para la regla $R_{5,10}^{yN}$ en 6 dimensiones con 100 evoluciones.



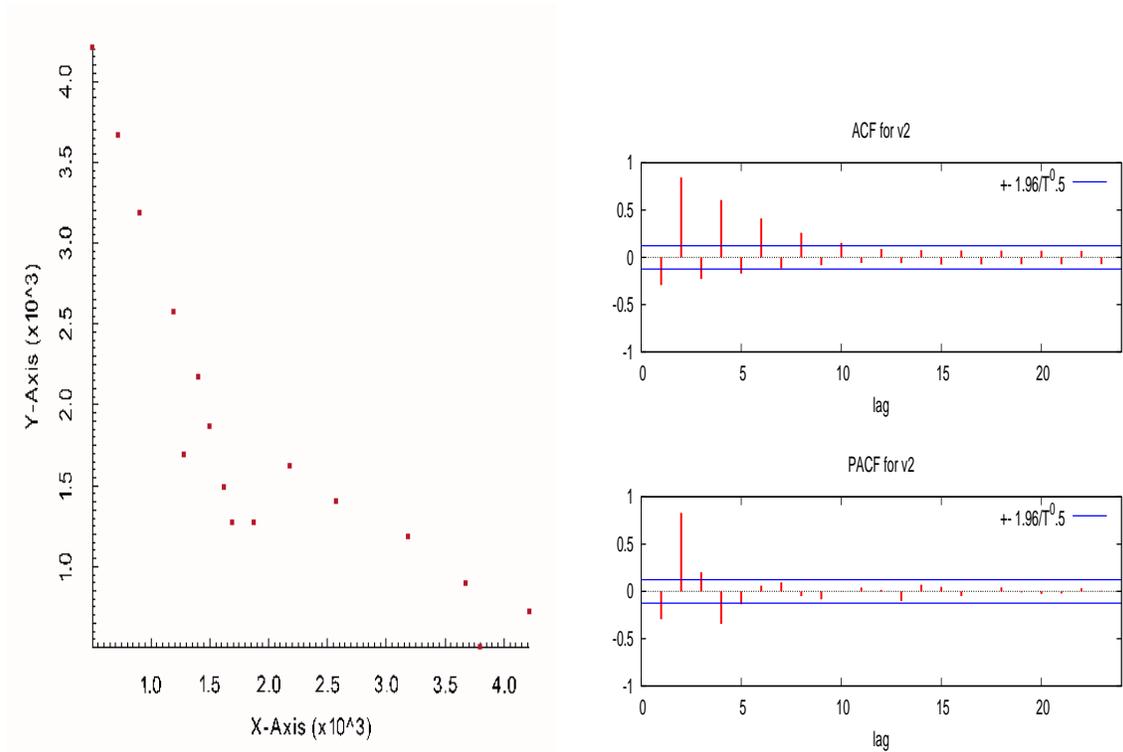
(a) Mapa de retorno con densidad de 75%

(b) Funciones ACF y PACF con densidad 75%



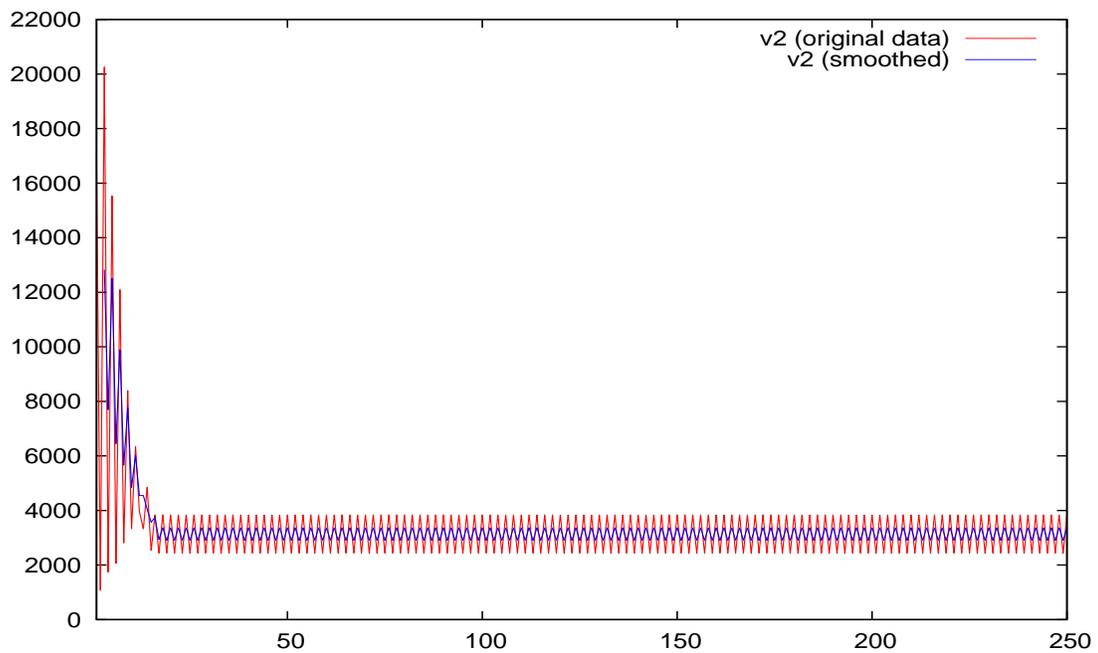
(c) Serie de tiempo de la varianza para una densidad de 75%

Figura 6.33: Resultados del experimento para 500 evoluciones con la regla $R_{5,9}^{\gamma,N}$ en la 5a dimensión.



(a) Mapa de retorno con densidad de 75%

(b) Funciones ACF y PACF con densidad 75%



(c) Serie de tiempo de la varianza para una densidad de 75%

Figura 6.34: Resultados para el experimento de densidad no distribuida para la regla 33 en la 3ª dimensión con 500 evoluciones y un espacio de evolución de 18^3 células.

Referencias

- [Atay, 2011] Atay, F. M. (2011). Synchronization and emergence in complex systems. *Pramana - Journal of Physics*, vol. 77, no. 5. 855863.
- [Barral *et al*, 1992] Barral, B., Chaté, H. & Manneville, P. (1992). Collective behaviors in a family of high-dimensional cellular automata. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 163, no. 4. 279285.
- [Bays, 2009] Bays, Carter (2009). *Cellular Automata in Triangular, Pentagonal and Hexagonal Tessellations*. Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Springer, New York. 892-900.
- [Berlekamp *et. al.*, 1982] Berlekamp, E. R., Conway, J. H. & Guy, R. K. (1982). Winning Ways for your Mathematical Plays, *Academic Press*, vol. 4, capítulo 25. 927-961.
- [Bull & Stone,2009] Bull, L. & Stone, C.(2009). Solving the Density Classification Task Using Cellular Automaton 184 with Memory. *Complex Systems*, vol. 18 no. 3. 329-344.
- [Cai, 2009] Cai, En. (2009). *Emergence in Collective Animal Behavior*. Emergent States of Matter. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [Couzin & Krause, 2003] Couzin, I. D. & Krause J. (2003). Self-Organization and Collective Behavior in Vertebrates. *Advances in the Study of Behavior*, vol. 32. 1-75.
- [Chaté & Manneville, 1991] Chaté, H. & Manneville, P. (1991). Evidence of Collective Behaviour in Cellular Automata. *Europhysics Letters* vol. 14, no. 5. 409-413.
- [Chaté & Manneville, 1992] Chaté, H. & Manneville, P. (1992). Collective Behaviors in Spatially Extended Systems in Local Interactions and Synchronous Updating. *Progress of Theoretical Physics* vol. 87, no. 1.
- [Codd, 1968] Codd, E. F. (1968). *Cellular automata*. Academic Press, New York.
- [Dorin, 1998] Dorin, A. (1998). *Physically Based, Self-Organizing Cellular Automata*. Multi-Agent Systems. Theories, Languages and Applications. Lecture Notes in Artificial Intelligence vol. 1544. 74-87.

-
- [Fast, 1968] Fast, J.D. (1968). *Entropy: The significance of the concept of entropy and its applications in science and technology*. McGraw-Hill, New York.
- [Gershenson & Heylighen, 2003] Gershenson C. & Heylighen F. (2003). When can we call a system self-organizing. *Advances in Artificial Life, 7th European Conference, ECAL 2003 LNAI vol. 2801*. 606-614.
- [Gómez, 2000] Gómez, S. (2000). *Comportamiento Colectivo no-Trivial en Autómatas Celulares*. Tesis de Maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.
- [Gómez, 2007] Gómez, S. (2007). *Comportamiento Colectivo no-Trivial en Autómatas Celulares*. Tesis de Doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.
- [Gutowitz, 1991] Gutowitz, H. (1991). *Cellular Automata, Theory and Experiment*, The MIT Press.
- [Gutowitz *et. al.*, 1987] Gutowitz, H. A., Victor, J. D. & Knight, B. W. (1987). Local Structure Theory for Cellular Automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 28, no. 1-2*. 18-48.
- [Gutowitz & Victor, 1987] Gutowitz, H. A. & Victor, J. D. (1987). Local Structure Theory in More Than One Dimension. *Complex Systems vol. 1, no. 1*. 57-68.
- [Hemmingsson, 1992] Hemmingsson, J. (1992). A totalistic three-dimensional cellular automaton with quasiperiodic behaviour. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 183, no. 3*. 255-261.
- [Hemmingsson *et. al.*, 1993] Hemmingsson, J., Sorensen A., Flyvbjø, H., Herrmann, H. J. (1993). What Synchronization?. *Europhysics Letters, vol. 23, no. 9*. 629-634.
- [Ilachinski, 2001] Ilachinski, A. (2001). *Cellular Automata: A Discrete Universe*. World Scientific Press, Singapore.
- [Jiménez-Morales, 1999] Jiménez-Morales, F. (1999). Evolving three-dimensional cellular automata to perform a quasiperiod-3 collective behavior task. *Physical Review E vol. 60 no. 4*. 4934-4940.
- [Langton *et. al.*, 1990] Langton, C., Packard, N. H. & Li, W. (1990). Transition Phenomena in Cellular Automata Rule Space. *Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 48, no. 1-3*. 77-99.
- [Langton, 1990] Langton, C. (1990). Computation at the edge of chaos: phase transitions and emergent computation. *Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 42, no. 1-3*. 12-37.
- [Ma, 1976] Ma, Shang-Keng. (1976). *Modern theory of Critical Phenomena*. W. A. Benjamin, Advanced Book Program, Massachusetts, Estados Unidos de America.

- [Mitchell *et. al.*, 1994] Mitchell, M., Crutchfield, J. P. & Hraber, P. T. (1994). Dynamics, Computation, and the “Edge of Chaos”: A Re-Examination. *Complexity: Metaphors, Models, and Reality. Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, Proceedings vol. 19.* 497-513.
- [McIntosh, 2009] McIntosh, H. V. (2009). *One Dimensional Cellular Automata.* Lu-
niver Press, United Kingdom.
- [Newman, 2011] Newman, M. E. J. (2011). Complex Systems: A Survey. *American Journal of Physics, vol. 79, no. 8.* 800-810.
- [Pikovsky & Kurths, 1993] Pikovsky, A. & Kurths, J. (1993). Do Globally Coupled Maps Really Violate the law of Large Numbers?. *Physical Review Letters, vol. 72, no. 11.* 1644-1646.
- [Sumpter, 2005] Sumpter, D. J. T. (2005). The principles of collective animal behaviour. *Philosophical Transactions B: Biological Sciences, vol. 361 no. 1465.* 5-22.
- [Sutner, 2009] Sutner, K.(2009). Classification of Cellular Automata. *Encyclopedia of Complexity and System Science, ed. R. A. Meyers, Springer 2009.* 755-768.
- [Toffoli & Margolus, 1987] Toffoli, T. & Margolus, N. (1987). *Cellular Automata Machines.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- [Uznov, 1993] Uznov, Dimo I. (1993). *Introduction to the theory of critical phenomena : mean field, fluctuations and renormalization.* World Scientific Press, Singapore.
- [von Neumann, 1966] von Neumann, J. (1966). *Theory of self-reproducing automata.* Urbana and London, University of Illinois.
- [Voorhees, 1996] Voorhees, B. (1996). *Computational analysis of one-dimensional cellular automata.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.
- [Voorhees, 1997] Voorhees, B. (1997). Some Parameters Characterizing Cellular Automata Rules. *Complex Systems, vol. 11.* 373385.
- [Wuensche & Lesser, 1992] Wuensche, A., & Lesser, M. J. (1992). *The Global Dynamics of Cellular Automata; An Atlas of Basin of Attraction Fields of One-Dimensional Cellular Automata.* Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity. Addison-Wesley.
- [Wuensche, 1996] Wuensche, A. (1996). *Attractor Basins of Discrete Networks. Implications on self-organisation and memory*(Tesis Doctoral). The University of Sussex, Brighton, United Kingdom.
- [Wuensche, 1998] Wuensche, A. (1998). Classifying Cellular Automata Automatically; Finding gliders, filtering, and relating space-time patterns, attractor basins, and the Z parameter. *Complexity, vol. 4.* 47-66.

- [Wolfram, 2002] Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Wolfram Media Inc., Champaign, Illinois, Estados Unidos de America.
- [Wolfram, 1983] Wolfram, S. (1983). Statistical Mechanics of Cellular Automata. *Reviews of Modern Physics* vol. 55, no. 3. 601-644.

Referencias electrónicas

- [Cottrell & Lucchetti, 2012] Cottrell, A. & Lucchetti, R. (2012). *Gnu Regression, Econometrics and Time-series Library (gretl)*. Consultado desde <http://gretl.sourceforge.net/>.
- [Kitware, 2011] Kitware, Sandia National Labs and CSimSoft. “Paraview application”, Consultado en noviembre de 2011 en: <http://www.paraview.org/>.
- [McIntosh, 1988] McIntosh, H. V. (1988). Linear Cellular Automata for NeXTSTEP. Consultado en febrero de 2012 de: <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/newweb/nxlcau.html>.
- [Rucker & Walker, 1994] Rucker, R. & Walker, J. (1994). Cellular Automata Lab (Cellab). Consultado en febrero de 2012 de: <http://www.fourmilab.ch/cellab/>
- [StatSoft, 2012] StatSoft, Electronic Statistics Textbook. (2012)*Introduction to ANOVA / MANOVA*. Consultado en Febrero de 2012 de: <http://www.statsoft.com/textbook/anova-manova/?button=1>.
- [Trevorrow & Rokicki] Trevorrow, A. & Rokicki, T. Golly, application for exploring Conway’s Game of Life and other cellular automata. Consultado en febrero de 2012 de: <http://golly.sourceforge.net/>.
- [Wuensche, 1996] Wuensche, A. (1996). Discrete Dynamics Lab (DDLab). Consultado en febrero de 2012 de: www.ddlab.org.
- [Yanovitzky & VanLear, 2008] Yanovitzky, I. & VanLear, A. (2008). *Time Series Analysis*. Consultado en Junio de 2012 de: http://www.sagepub.com/upm-data/23658_Chapter4.pdf.