CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Computación

Elección de estrategias ganadoras en el juego de béisbol aplicando el Equilibrio de Nash

Tesis que presenta

Arturo Yee Rendón

Para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias en Computación

Director de la Tesis: **José Matías Alvarado Mentado**

México, D.F. Agosto 2010

Los abajo firmantes, integrantes del jurado de examen de grado que sustentara el Sr. Arturo Yee Rendón, declaramos que hemos revisado la tesis titulada:

ELECCIÓN DE ESTRATEGIAS GANADORAS EN EL JUEGO DE BÉISBOL APLICANDO EL EQUILIBRIO DE NASH

Y consideramos que cumple los requisitos para obtener el Grado de Maestría en Ciencias en Computación, firmamos la presente en la Ciudad de México, D.F., el mes de Julio de 2010.

Atentamente

Dr. José Matías Alvarado Mentado ------------------------------

Dr. Sergio Víctor Chapa Vergara ------------------------------

Dr. Luis Gerardo de la Fraga ------------------------------

Dra. Sonia G. Mendoza Chapa ------------------------------

Agradecimientos

Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología
CVU: 261089

Agradezco al Dr. José Matías Alvarado Mentado por su apoyo y orientación en este trabajo de tesis

A mis lectores, Dra. Sonia Guadalupe Mendoza Chapa, Dr. Luis Gerardo de la Fraga y Dr. Sergio Víctor Chapa Vergara por su valiosa aportación a mi trabajo

A mis padres:

Manuel Yee González
y
Manuela Rendón Sánchez

A mis hermanos:

Cristo Manuel Yee Rendón

Ana Julia Yee Rendón

Zumey Yee Rendón

Bruce Yee Rendón

A mi esposa:

María Irene Torres Silvas

Por todo su cariño y amor que me ha brindado.

Resumen

El Equilibrio de Nash (EN) es un concepto fundamental en Teoría de Juegos para formalizar la cooperación entre los jugadores de un equipo con el objetivo de ganar el partido en disputa. Para ganar en equipo, se requiere tanto el diseño de estrategias colectivas como combinación positiva de las estrategias individuales. El EN permite caracterizar las estrategias colectivas tales que a ningún jugador, individualmente, le resulte atractivo actuar de manera diferente a lo que la estrategia colectiva indica. El EN es un concepto fundamental para formalizar la coordinación de los jugadores, de tal manera que cada uno de ellos actúe para potenciar el beneficio del equipo y además dejar cerrada la posibilidad de que algunos de los jugadores tuviera la opción de actuar de otra manera, individualizada, sino quiere ir en perjuicio de si mismo.

En este trabajo se aplica el EN para identificar estrategias ganadoras en el juego de béisbol, tanto en momentos en que el equipo juega a la ofensiva como a la defensiva. El objetivo es identificar las situaciones y condiciones durante el desarrollo de un juego, tal que resulte conveniente aplicar el modelo de EN para identificar las estrategias ganadoras del equipo.

En juegos de múltiples jugadores, el análisis de estrategias es de alto grado de complejidad, razón por la cual se hace relevante computarizar eficientemente el cálculo del EN para realizar tales análisis de estrategias en estos tipos de juegos.

Este trabajo se enfocó en el análisis y el estudio de las estrategias del juegos de béisbol, estas estrategias fueron analizadas a través del EN, el cual permitió realizar razonamiento estratégico a fin de encontrar las mejores estrategias colectivas para ser aplicadas durante el partido. A partir de los resultados de este trabajo, se comprobó que el EN es uno de los conceptos más importantes en Teoría de Juegos para el análisis de juegos no cooperativos.

Abstract

Nash Equilibrium (NE) is a central concept in Game Theory, essential to formalize cooperation among players on a team with the goal to win the game in dispute. Winning as a team requires the design of collective strategies as a positive combination of individual strategies. The NE allows to characterize the collective strategy such that any player, individually, is attracted to act differently from what the collective strategy indicates. The NE is a fundamental concept to formalize the coordination of players, so that each one acts to enhance the benefit of the team and it closes leaving the possibility that players have the option to act otherwise, individually, but wants adversely to affect itself.

This works applies the NE to identify winning strategies in the game of *baseball*, in both cases, when the team plays offensively and defensively. The objective is to identify situations and conditions during the course of a game, such that it is appropriated to apply the NE model to identify winning strategies of the team.

In multiplayer games, strategy analysis presents a high degree of complexity, as it becomes relevant, to efficiently compute the NE for such analysis of strategies in these games.

This work focused on the analysis and the study of the strategies of baseball games, these strategies were analyzed by the EN, which allowed for strategic thinking to find the best collective strategies to be implemented during the game. From the results of this work, we found that the NE is one of the most important concepts in Game Theory to analyze non-cooperative games.

Índice general

Índice Figuras

Índice Tablas

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se define el problema a resolver, se explica cuál es nuestra motivación para la realización de esta tesis así como el objetivo de la misma.

La Teoría de Juegos es una rama de la matemática con aplicaciones a la economía, sociología, biología y psicología, que analiza las interacciones entre individuos que toman decisiones en un marco de incentivos formalizados (juegos). En un juego, varios jugadores buscan maximizar su utilidad eligiendo determinadas estrategias. La utilidad final obtenida por cada jugador depende de las estrategias escogidas por el resto de los jugadores.

La Teoría de Juegos es una herramienta que ayuda a analizar problemas de optimización interactiva. Ésta tiene muchas aplicaciones en las ciencias sociales. La mayoría de las situaciones estudiadas por la teoría de juegos implican conflictos de intereses, estrategias y trampas. De particular interés son las situaciones en las que se puede obtener un resultado mejor cuando los individuos cooperan entre sí, que cuando los individuos intentan maximizar sólo su utilidad. La Teoría de Juegos fue ideada en primer lugar por John von Neumann. Luego refinada por John Nash y A.W. Tucker [26].

Esta tesis de maestría se inscribe en el dominio de Inteligencia Artificial particularmente en sistemas basados en conocimientos y Teoría de Juegos.

1.1. Planteamiento del problema

¿Cómo modelar el Equilibrio de Nash en el juego de béisbol?

Particularmente al interior del equipo:

- a la defensiva.
- a la ofensiva.

En la Figura 1.1 se muestra el béisbol como un juego de múltiples jugadores, en donde se aplica el Equilibrio de Nash para determinar las estrategias ganadoras que deban ser utilizadas durante el encuentro. Como se mostrará en el caso de estudio de la tesis, el modelado del Equilibrio de Nash en el juego de béisbol es de gran relevancia para la toma de decisiones por ejemplo, las estrategias que se deban utilizarse durante el partido.

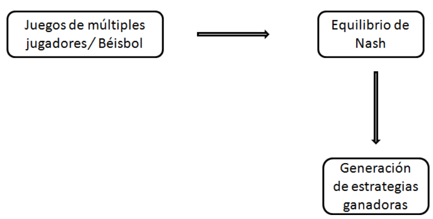

Figura 1.1 Planteamiento del problema

1.2. Motivación

En juegos de múltiples jugadores, el análisis de estrategias es de alto grado de complejidad, razón por la cual se hace relevante computarizar eficientemente el Equilibrio de Nash, para realizar tales análisis de estrategias en este tipo de juegos.

Es interesante observar, analizar y comprender las situaciones antes de tomar una decisión. El juego de béisbol brinda las situaciones ideales para definir diversas estrategias, que conlleven a sacar el mayor beneficio, en este caso ganar el partido.

El juego de béisbol es considerado uno de los juegos de equipo más populares alrededor del mundo. Esto es debido a las diversas estrategias que emplea cada equipo para lograr ganar; las estrategias son tomadas durante el partido, observando todos los momentos del juego así como la situación actual del equipo. El poco análisis formal del juego del béisbol, nos hace notar que es un campo nuevo de estudio, no solo porque es un deporte muy popular, sino por la forma en la cual las estrategias son determinadas dependiendo de la situación del partido. La toma de decisiones en juegos de equipos como los de esta índole son decisivos para lograr los resultados que se esperan.

1.3. Objetivos

El objetivo general de este trabajo de tesis es identificar las situaciones y condiciones durante el desarrollo de un juego de béisbol, tal que para el éxito del equipo, resulte conveniente aplicar el modelo del Equilibrio de Nash en la estrategia del equipo, cuando juega a la ofensiva así como cuando juega a la defensiva.

Los objetivos específicos son:

- Diseñar e implementar un simulador del juego de béisbol.
- Diseñar e implementar un programa de cómputo para encontrar perfiles de estrategias en juegos de múltiples jugadores, que cumplan el concepto del Equilibrio de Nash en un juego de béisbol.
- Establecer un conjunto de estrategias para el juego de béisbol en base a estudios previos y realizar análisis estratégico utilizando el Equilibrio de Nash.

- Realizar simulaciones de partidos de béisbol, en donde no haya un mecanismo de análisis de estrategias, aplicar las jugadas de sacrificio como estrategia ganadora, y por ultimo, aplicar un análisis de perfiles de estrategias conforme el Equilibrio de Nash.

El número de jugadores de un equipo de béisbol es 9; en la Figura 1.2 se muestra que S_i son las estrategias del jugador $\boldsymbol{i}$, con $1 \leq \boldsymbol{i} \leq 9$. Las estrategias de cada jugador deben ser la mejor respuesta a las estrategias de los demás jugadores, en conjunto, a fin de encontrar un perfil que satisfaga el Equilibrio de Nash.

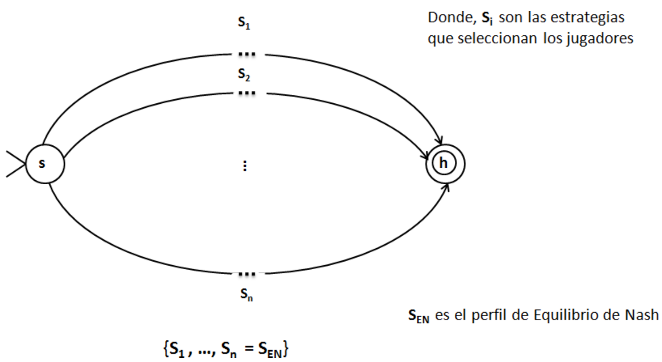

Figura 1.2 Bosquejo general del Equilibrio de Nash

1.4. Arquitectura general del proyecto

En la Figura 1.3 se muestra la arquitectura de nuestro trabajo de tesis, en la cual se puede observar los componentes más importantes que dan sustento al proyecto.

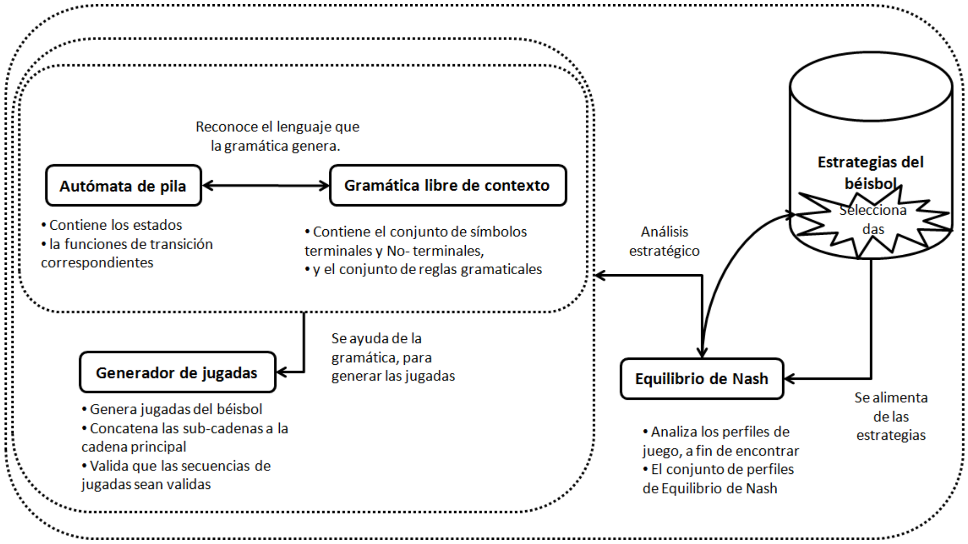

Figura 1.3 Esquema general del proyecto

El resto de esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 2 se hace referencia a la Teoría de Juegos, así como a la definición de los conceptos básicos y una clasificación de los tipos de juegos. En el capítulo 3 se detalla el análisis y diseño formal del juego de béisbol. En particular, se hace una breve descripción del juego, se muestra la gramática libre de contexto, se describe el autómata de pila, se puntualiza el generador de jugadas, se mencionan las jugadas clásicas del béisbol y se describen los principales trabajos acerca del análisis cualitativo de las estrategias del béisbol.

En el capítulo 4 se describe el Equilibrio de Nash, se muestra los antecedentes, se brinda la formalización del concepto de Equilibrio de Nash, se muestra el estado del arte, se analizan los autómatas y se describen los algoritmos para el análisis de perfiles utilizando el Equilibrio de Nash. En el capítulo 5 se analizan las matrices de rentabilidad y se detalla el análisis cuantitativo de las estrategias del beisbol. En el capítulo 6 se dan a conocer los experimentos realizados así como los resultados obtenidos. En el capítulo 7 se realiza una discusión de resultados y de trabajos relacionados. Por último, en el capitulo 8 se presentan las conclusiones de este trabajo de investigación, así como algunas ideas de trabajo futuro.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Teoría de Juegos

La Teoría de Juegos es un área de la Matemática Aplicada que utiliza modelos matemáticos para estudiar las interacciones en las estructuras formalizadas de incentivos, los llamados juegos, para llevar a cabo procesos de decisión [23] [24] [25].

Inicialmente la Teoría de Juegos tuvo sus principales aplicaciones en economía, pero actualmente es aplicada a un gran número de áreas, tales como informática, política, biología y filosofía, entre otras. La Teoría de Juegos experimentó un crecimiento sustancial y se formalizó por primera vez a partir de los trabajos de John von Neumann y Oskar Morgenstern [26], antes y durante la Guerra Fría, debido sobre todo a su aplicación en estrategias militares.

La primera discusión conocida de la Teoría de Juegos aparece en una carta escrita por James Waldegrave en 1713. En esta carta, Waldegrave aplica una solución *minimax* de estrategias mixtas a una versión para dos personas del juego de cartas llamado *le Her*. Sin embargo, no se publicó un análisis formal de la Teoría de Juegos en general hasta la publicación de *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, de Antoine Agustin Cournot en 1836 [27]. En este trabajo, Cournot considera un duopolio y presenta una solución que es una versión reducida del Equilibrio de Nash.

En 1950, aparecieron las primeras discusiones del dilema del prisionero. Alrededor de esta época, John Nash [10] desarrolló una definición de una estrategia óptima para juegos de múltiples jugadores donde el óptimo, conocido como Equilibrio de Nash, no se había definido previamente.

Este equilibrio es suficientemente general como para permitir el análisis de juegos no cooperativos y cooperativos. La Teoría de Juegos experimentó una notable actividad en esta época, desarrollando los conceptos de bases: el juego de forma extensiva, el juego ficticio, los juegos repetitivos, etc.

En 1965, Reinhard Selten [23]introdujo su concepto de solución de los equilibrios perfectos del sub-juego, que más adelante refinó el Equilibrio de Nash. En 1967, John Harsanyi desarrolló los conceptos de la información completa y de los juegos bayesianos. Él, junto con John Nash y Reinhard Selten ganaron el Premio Nobel de Economía en 1994.

En la década de 1970 la Teoría de Juegos se aplicó extensamente a la biología, en gran parte como resultado del trabajo de John Maynard Smith [24] y su concepto de estrategia evolutiva estable.

2.2. Conceptos básicos

Un **juego** se define como un curso de eventos, el cual consiste de una sucesión de acciones por parte de los jugadores. Para que el juego sea susceptible de análisis matemático, también debe tenerse un sistema de reglas establecidas sin ambigüedad, así como el resultado del juego.

La **Toma de Decisiones** es una ciencia aplicada que ha adquirido notable importancia y ha sido el tema básico de la Investigación de Operaciones [29]. Desde hace algunos años se ha incorporado las técnicas de la Inteligencia Artificial (IA) en su análisis. La IA conlleva el análisis formal y la simulación computacional de comportamiento de los individuos en los juegos; la documentación es a partir de estadísticas y datos verificables. Los resultados experimentales son documentados de la misma forma para sustentar las conclusiones. La toma de decisiones es el proceso de seleccionar un curso de acción entre diferentes alternativas; es la médula de la planeación [28].

Las **estrategias** son aquellos conjuntos de acciones, que son tomadas con el objetivo de obtener algún beneficio [19] [20] [21]. Para un jugador, las estrategias son definidas como el conjunto de reglas que determinan sus acciones para todas las situaciones que se presenten en el juego.

El **perfil de estrategias** es un conjunto de estrategias para cada jugador que especifica completamente todas las acciones en un juego. Un perfil de estrategia debe incluir solamente una estrategia por cada jugador [35].

La **desviación en perfil de estrategia** se realiza de la siguiente manera: se fija algún perfil y para cada jugador, se va cambiando cada estrategia de éste, fijando las estrategias de los demás. Si se encuentra que algún jugador obtiene mayor beneficio al desviar su estrategia, el perfil fijado es descartado por ser un perfil dominado.

Un **perfil dominado** es aquel en el que dada una desviación de cualquier jugador, el valor de beneficio de la desviación es mayor que el perfil fijado.

Un **juego en forma normal** está definido como $G = (S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n)$, donde:

- n es el número de jugadores $\{1, \ldots, n\}$.
- S_{ij} es el conjunto de j estrategias del jugador i.
- $\{S_1, \ldots, S_n\}$ es el conjunto de estrategias de cada jugador.
- $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es el conjunto de funciones de beneficio (*payoff*) de cada jugador.

La **función de rentabilidad** (*payoff*) es la que permite calcular el beneficio que se obtiene por cada perfil de estrategia posible en el juego. Recibe como parámetros un perfil de estrategias y retorna una cantidad numérica que representa la motivación de cada jugador.

Los **juegos de múltiples jugadores** son aquellos en donde participan dos o más jugadores; cada jugador tiene un conjunto de estrategias que utiliza durante el juego. Los jugadores pueden ser oponentes individuales, estar agrupados en equipos o formar un solo equipo. Si existe la cooperación entre los jugadores, entonces el juego es más complejo.

Una manera de caracterizar el Equilibrio de Nash es mediante el argumento de que si la Teoría de Juegos ofrece una solución única a un determinado problema, esta solución debe ser un Equilibrio de Nash. Supongamos que la Teoría de Juegos hace una única predicción sobre las estrategias elegidas por los jugadores. Para que esta predicción sea correcta es necesario que cada jugador esté dispuesto a elegir la estrategia predicha por la teoría. Por ello, la estrategia predicha de cada jugador debe ser la mejor respuesta de cada uno a las estrategias predichas de los otros jugadores. Tal predicción puede denominarse estratégicamente estable (*self-enforcing)* puesto que ningún jugador va a querer desviarse de la estrategia predicha para él; llamaremos a tal predicción Equilibrio de Nash [2].

2.3. Tipos de juegos

Los juegos pueden clasificarse de acuerdo a los métodos que son aplicados para resolverlos. Bajo esta perspectiva se propone la siguiente clasificación:

Los **juegos de suma cero** describen una situación en la que las ganancias o pérdidas de un participante se equilibran con exactitud con las pérdidas o ganancias de los otros participantes. En otras palabras, se dice que un juego es de suma cero, si la suma de las recompensas es cero. En este tipo de juego, las metas que persiguen los jugadores son totalmente opuestas, por ejemplo: El *poker*, el go, el ajedrez y el juego del oso (ver algunos ejemplos en la Tabla 2.1).

Los juegos de estrategia son aquellos en los que factores como la inteligencia, las habilidades técnicas y la planificación pueden hacer predominar o impulsar hacia la victoria al jugador que las aplica, por ejemplo: Las damas, el *backgammon*, el dominó, el ajedrez y el go (ver algunos ejemplos en la Tabla 2.1).

Los **juegos cooperativos** son aquellos tipos de juegos en los que dos o más jugadores no compiten, sino que se esfuerzan por conseguir el mismo objetivo y por lo tanto ganan o pierden como un equipo. La teoría de los juegos cooperativos da justificaciones de contratos plausibles. La plausibilidad de un contrato está muy relacionada con la estabilidad, por ejemplo: El juego de contar, el béisbol y el futbol americano (ver algunos ejemplos en la Tabla 2.1).

Los **juegos simultáneos** son juegos en los que los jugadores se mueven simultáneamente o en los que éstos desconocen los movimientos anteriores de otros jugadores.

Los **juegos secuenciales (**o **dinámicos)** son juegos en los que los jugadores tienen algún conocimiento de las acciones previas. Este conocimiento no necesariamente tiene que ser perfecto, sólo debe consistir en alguna información. Por ejemplo, un jugador puede conocer que el oponente no realizó una acción determinada, pero tal vez sin saber cuál de las otras acciones disponibles eligió, por ejemplo: El solitario (ver algunos ejemplos en la Tabla 2.1).

Los **juegos de información perfecta** son aquellos en el que cada participante, al hacer una jugada, conoce los resultados de todas las jugadas hechas previamente, sean éstas personales o aleatorias, por ejemplo: El go, el ajedrez y el dominó (ver algunos ejemplos en la Tabla 2.1).

Los **juegos simétricos** son juegos en donde las recompensas por jugar una estrategia particular dependen solamente de las otras estrategias empleadas, no de quién las juegue. Si se puede intercambiar las identidades de los jugadores sin cambiar las recompensas, el juego es simétrico. La simetría puede aparecer en diferentes formas. Los juegos ordinariamente simétricos son juegos simétricos respecto a la estructura ordinal de las recompensas. Un juego es cuantitativamente simétrico si y sólo si es simétrico respecto a las recompensas exactas, por ejemplo: El juego de la gallina y la caza del ciervo (ver algunos ejemplos en la Tabla 2.1).

Los **juegos asimétricos** más estudiados son los juegos donde no hay conjuntos de estrategias idénticas para ambos jugadores, por ejemplo: El juego del *ultimatum* y el juego del dictador (ver algunos ejemplos en la Tabla 2.1).

Tipos de Juegos	**Ejemplos**
Los juegos de suma cero	El *poker*, el go, el ajedrez y el juego del oso.
Los juegos de estrategia	Las damas, el *backgammon*, el dominó, el ajedrez y el go.
Los juegos cooperativos	El juego de contar, el béisbol y el futbol americano.
Los juegos simultáneos	Los juegos de azar y el piedra papel o tijera.
Los juegos secuenciales	El solitario.
Los juegos de información perfecta	El go, el ajedrez y el dominó.
Los juegos simétricos	El juego de la gallina y la caza del ciervo.
Los juegos asimétricos	El juego del *ultimatum* y el juego del dictador.

Tabla 2.1 Ejemplos de juegos

El **juego *ultimatum*** es un juego experimental de economía en el cual dos partes interactúan de manera anónima y sólo una vez, por lo que la reciprocidad no es un problema. El primer jugador propone al segundo cómo dividir una determinada suma de dinero. Si éste último rechaza la oferta, nadie obtiene nada. En cambio, sí la acepta, el primer jugador obtiene lo que propuso y el segundo lo restante.

El **juego del dictador** es un juego muy simple de economía experimental, similar al juego del *ultimatum*. El primer jugador es el que propone y determina la asignación entre los dos jugadores de alguna dotación. El que responde en este caso simplemente recibe la cantidad de la dotación que no se ha asignado a sí mismo el que propone. El papel del que responde es totalmente pasivo (no toma decisiones en el juego).

El **juego de la gallina** es aquel en el que cada uno de los dos jugadores conduce un vehículo en dirección al del contrario y el primero que se desvía de la trayectoria del choque pierde; el perdedor es humillado por comportarse como una gallina.

La **caza del ciervo** es un juego que describe un conflicto entre seguridad y cooperación social, en donde dos individuos van a cazar. Cada uno elige cazar un ciervo o una liebre, cada jugador debe elegir una acción sin conocer la del otro. Si un individuo caza un ciervo, debe cooperar con su compañero para tener éxito. Un jugador individual puede cazar una liebre por sí mismo, pero una liebre vale menos que un ciervo. Esta situación se considera una analogía importante de la cooperación social.

El **dominó** es un juego de mesa, jugado por cuatro jugadores, comúnmente en parejas; cada pareja juega de manera cooperativa ayudándose entre ambos a formar un buen juego, suponiendo las fichas que el compañero pudiera tener, en base a las acciones que haya tomado. El objetivo del juego es alcanzar una determinada puntuación previamente fijada, jugando para ello en rondas. La pareja que gana una ronda, suma los puntos de las fichas de sus adversarios. La primera pareja que alcanza la puntuación, fijada al principio de la partida, gana.

El **fútbol americano** es jugado por equipos de once jugadores a la ofensiva y once a la defensiva. El equipo atacante intenta llevar el balón hacia la zona de anotación rival y así anotar puntos. La defensa tiene que evitar que esto ocurra y tratar de impedir el avance del equipo rival hacia la zona de anotación. Al finalizar cuatro tiempos de quince minutos, el equipo con mayor puntaje es el ganador. Este tipo de juego es de coordinación en donde los jugadores escogen las estrategias por un proceso de toma de decisiones consensuadas. Los jugadores toman un comportamiento cooperativo, pues el juego es una competición entre coaliciones de jugadores más que entre jugadores individuales.

El **béisbol** es un juego de equipo de múltiples jugadores, en donde la principal herramienta para su éxito es encontrar las estrategias más adecuadas, que conlleven a ganar el encuentro. El juego de béisbol se caracteriza por ser un juego dual, es decir, cooperativo y no-cooperativo. Esto es debido a que los integrantes del equipo están incentivados a comportarse de manera individual, pero a su vez deben cooperar en beneficio del equipo. En la presente tesis, el caso de estudio es el juego de béisbol debido a que brindan las situaciones ideales para definir diversas estrategias, que pueden ser simuladas de manera eficiente a través de un programa de cómputo, a fin de observar, estudiar y comprender el comportamiento del equipo bajo esas estrategias.

El ***poker*** es un juego de cartas jugado por 8, 9 o hasta 10 jugadores por mesa. El jugador con la jugada de mayor valor gana. También es posible ganar si el resto de los jugadores se retira de la jugada. Actualmente uno de los simuladores de *poker* más populares es el *World Class Poker With TJ Cloutier* [40].

El ***backgammon*** es un juego de tablero jugado por dos jugadores en rondas o partidas. Este juego es sencillo con profundos elementos estratégicos. El objetivo del juego consiste en liberar las fichas antes que el oponente. En 1995, G. Tesauro [41]diseño *TD-Gammon.* Este programa tiene un aprendizaje exitoso mientras juega, ya que va aprendiendo las estrategias durante el juego. *TD-Gammon* emplea el método de diferencia temporal para entrenar una red neuronal.

El **go** es un juego de mesa estratégico para dos jugadores. El juego se realiza por dos jugadores que alternativamente colocan piedras blancas y negras sobre las intersecciones libres de una cuadrícula de 19 x19 líneas. El objetivo del juego es controlar una porción más grande del tablero que el oponente. Una piedra o grupo de piedras se captura y se retira del juego, si no tiene intersecciones vacías adyacentes, esto es sí se encuentra completamente rodeada de piedras del color contrario.

Capítulo 3

Modelado formal del béisbol

3.1. Descripción

El béisbol es un deporte de conjunto jugado entre dos equipos de 9 jugadores cada uno. Es considerado uno de los deportes más populares alrededor del mundo, éste se juega en un extenso campo de césped.

El objetivo del juego es golpear una pelota con un bate, desplazándola a través del campo y correr por el campo interno de tierra (*infield*), buscando alcanzar la mayor cantidad de bases posibles hasta dar la vuelta a la base desde donde se bateó (*home*) y lograr anotar la carrera; mientras que los jugadores defensivos buscan la pelota bateada para eliminar al jugador que bateó o a otros corredores, antes de que éstos lleguen primero a alguna de las bases o consigan anotar la carrera.

El equipo que anote más carreras, al finalizar los nueve episodios llamados *innings* que dura el encuentro, es el que resulta ganador. Si al término de los nueve *innings* regulares persiste un marcador igualado en carreras, el encuentro se extiende cuanto sea necesario para que haya un ganador. Según las reglas básicas del juego no existe el empate, el cual solo es permitido en ligas amateurs e infantiles para limitar el desgaste de los jugadores [17].

El juego de béisbol es un juego estratégico, porque la toma de decisiones es el elemento principal para encontrar el conjunto de estrategias que permitan ganar el juego [17] [18].

3.2. Gramática libre de contexto

Un análisis completo se llevó a cabo para identificar las jugadas básicas que se realizan en el béisbol. Estas jugadas se ordenaron y se ponderaron con base en su frecuencia de ocurrencia, es decir, con base en la frecuencia en que estas jugadas ocurren en la vida real; algunas jugadas ocurren con mayor frecuencia que otras, por ejemplo: los *strikes* ocurren con mayor frecuencia que los *home runs*, las bolas ocurren con mayor frecuencia que los doble *plays*. En la Figura 3.1 se muestra el conjunto de jugadas (abreviadas) ordenadas con base en la ocurrencia de éstas y en la Tabla 3.1 se describen sin abreviar cada jugada.

$$s^i \geq b^i \geq f^i \geq co^i \geq o^i \geq p^i \geq ce \geq hi^i \geq a1^i \geq a2^i \geq d^i \geq dp^i \geq a3^i \geq a4^i \geq ca^i \geq r^i \geq$$
$$fs^i \geq h^i \geq tb^i \geq bp^i \geq bg^i \geq w^i \geq tp^i \geq t^i \geq bo^i$$

Figura 3.1 Jugadas ordenadas

Una vez que se obtuvo el conjunto de las jugadas básicas, se procedió al desarrollo de una gramática libre de contexto, que genere un lenguaje formal que describa el juego de béisbol. El lenguaje es reconocido por el correspondiente autómata de pila determinista. Así el juego de béisbol es modelado formalmente mediante una máquina de estados finito.

La gramática libre de contexto contiene los elementos terminales y no terminales, así como las reglas que definen los movimientos correctos que se construyen a partir de esos elementos. En esta sección del trabajo, el análisis fue complejo, debido a que se desarrollaron reglas, tales que éstas produjeran una secuencia correcta de jugadas y a su vez que las jugadas compuestas fueran adecuadas.

El lenguaje libre de contexto para el juego de béisbol está formado por los siguientes elementos:

- *V* es el alfabeto
- $\sum$,el conjunto de terminales, es un subconjunto de *V*
- *R* (el conjunto de reglas) es un conjunto finito de $(V - \sum) \times V^*$
- *B* (el símbolo inicial) es un elemento de $V - \sum$
- Los miembros de $V - \sum$ son llamados *no terminales*.

En la Tabla 3.1 se muestra el conjunto de elementos terminales que son las jugadas sencillas y las jugadas que dependen de otras, que se realizan en el juego de béisbol especificando que jugador la realiza.

Jugadas sencillas

b^i: bola
bo^i: *bolk*
bg^i: base por golpe
bp^i: base por bolas
d^i: doblete
f^i: *foul*
dp^i: doble *play*
fs^i: *fly* de sacrificio
co^i: contacto de pelota
h^i: *homerun*
hi^i: *hit* (imparable)
r^i: robo de base
s^i: *strike*
t^i: triple
tb^i: toque de bola
tp^i: triple *play*
w^i: *wild pitch*

Jugadas dependientes de otras

$a1^i$: movimiento a base 1
$a2^i$: movimiento a base 2
$a3^i$: movimiento a base 3
$a4^i$: movimiento a *home*
ce: cambio de equipo
o^i : *out*

p^i: ponchado

Tabla 3.1 Listado de los símbolos terminales en ∑

En la Tabla 3.2 se muestra el conjunto de elementos no terminales, éstos representan los diferentes tipos de frase o cláusulas en las oraciones.

A:	Acción que se realiza por el contacto de pelota
B:	Batear
B3:	Batear con tres *outs*
M:	Movimiento
MH:	Movimiento de *home run*
MR:	Movimiento por robo de base
MG:	Movimiento por base por golpe o base por bolas
MD	Movimiento por doblete
MT	Movimiento por triplete
R:	Robo
T:	Transición

Tabla 3.2 Listado de los símbolos no terminales

En la Tabla 3.3 se muestra el conjunto de las reglas gramaticales

B -> b^i B	Batear puede generar bola y volver batear
B -> bp^i MG B	Batear generar base por bolas, realizar movimiento y volver a batear (condicionada a cuatro bolas antes)
B -> s^i B	Batear puede generar un *strike* y volver a batear
B -> p^i B	Batear puede generar ponche y volver a batear (condicionada a tres *strikes*)
B -> p^i B3	Batear puede generar ponche y volver a batear con tres *out* (condicionada tres *strike* y dos *outs* antes)
B -> f^i B	Batear puede generar un *foul* y volver a batear
B -> d^i MD B	Batear puede generar un doblete y movimiento volver a batear
B -> t^i MT B	Batear puede generar un triplete, movimiento y volver a batear
B -> dp^i o^j o^i B	Batear puede generar un doble *play*, volver a batear (condicionada, si hay mas de un hombre en base y esta ya no se puede generar)
B -> dp^i o^j o^i B3	Batear puede generar un doble *play*, cambio de equipo, (condicionada, si hay mas de un hombre en base y si hay un *out* antes, ya no se puede generar)
B -> tp^i o^k o^j o^i B3	Batear puede generar un triple *play* y cambio de equipo
B -> co^i A	Batear puede generar contacto y acción

A -> hi^{i} M B	Acción puede generar un *hit*, movimiento y volver a batear
A-> o^{i} B	Acción puede generar un *out*, volver a batear
A-> o^{i} B3	Acción puede generar un *out*, cambio de equipo (condicionada, si hay dos *outs* antes)
B -> h^{i} MH B	Batear puede generar un *home run*, movimiento y volver a batear
B -> tb^{i} M B	Batear puede generar un toque de bola, movimiento y volver a batear
B -> tb^{i} M o^{i} B	Batear puede generar un toque de bola, movimiento, *out* y volver a batear
B -> tb^{i} M o^{i} B3	Batear puede generar un toque de bola, movimiento, *out* a batear y cambio de equipo (condicionada si hay dos *outs* antes)
B -> w^{i} M B	Batear puede generar un *wild pitch*, movimiento y volver a batear
B -> bg^{i} MG B	Batear puede generar un base por golpe, movimiento y volver a batear
B-> bo^{i} M B	Batear puede generar un *bolk*, movimiento y volver a batear
B -> fs^{i} M o^{i} B	Batear puede generar un *fly* de sacrificio, movimiento, *out* y volver a batear
B -> fs^{i} M o^{i} B3	Batear puede generar un *fly* de sacrificio, movimiento, *out* y cambio de equipo (condicionada a dos outs antes aunque esto nunca sucede)

Robo de base

B -> R	Batear puede generar un robo de base (si es el caso)
R -> r^{j} MR o^{j} B	Robar puede generar un r, movimiento, *out* y volver a batear
R -> r^{j} MR o^{j} B3	Robar puede generar un r, movimiento, *out* y cambio de juego
R -> r^{j} MR T	Robar puede generar un r, movimiento, transición
T-> B	Transición regresa el estado al bateado
B3-> ce B	Batear con tres *out*, es cambio de equipo

Movimiento de robo

MR -> $a2^{j}$ |$a3^{j}$|$a4^{j}$

Movimiento a home run

MH -> $a1^{i}$ $a2^{i}$ $a3^{i}$ $a4^{i}$	Movimiento de *home run* sin hombre en base
MH -> $a2^{j}$ $a1^{i}$ $a3^{j}$ $a2^{i}$ $a4^{j}$ $a3^{i}$ $a4^{i}$	Movimiento de home run con hombre en 1^{era} base
MH -> $a3^{k}$ $a2^{j}$ $a1^{i}$ $a4^{k}$ $a3^{j}$ $a2^{i}$ $a4^{j}$ $a3^{i}$ $a4^{i}$	Movimiento de *home run* con hombre en 2^{da} y 1^{era} base
MH -> $a4^{k}$ $a2^{j}$ $a1^{i}$ $a3^{j}$ $a2^{i}$ $a4^{j}$ $a3^{i}$ $a4^{i}$	Movimiento de home run con hombre en 3^{era} y 1^{era} base
MH -> $a3^{j}$ $a1^{i}$ $a4^{j}$ $a2^{i}$ a3i $a4^{i}$	Movimiento de *home run* con hombre en 2^{da} base
MH -> $a4^{k}$ $a3^{j}$ $a1^{i}$ $a4^{j}$ $a2^{i}$ $a3^{i}$ $a4^{i}$	Movimiento de *home run* con hombre en 3^{era} y 2^{da} base

MH -> $a4^j$ $a1^i$ $a2^i$ a3i $a4^i$	Movimiento de *home run* con hombre en 3^{era} base
MH -> $a4^l$ $a3^k$ $a2^j$ $a1^i$ $a4^k$ $a3^j$ $a2^i$ $a4^j$ $a3^i$ $a4^i$	Movimiento de *home run* con hombre en 3^{era}, 2^{da} y 1^{era} base
Movimiento en base	
M -> $a1^i$	Movimiento sin hombre en base
M -> $a2^j$ $a1^i$	Movimiento con hombre en 1^{era} base
M -> $a3^k$ $a2^j$ $a1^i$	Movimiento con hombre en 2^{da} y 1^{era} base
M -> $a4^k$ $a2^j$ $a1^i$	Movimiento con hombre en 3^{era} y 1^{era} base
M -> $a3^j$ $a1^i$	Movimiento con hombre en 2^{da} base
M -> $a4^k$ $a3^j$ $a1^i$	Movimiento con hombre en 3^{era} y 2^{da} base
M -> $a4^i$ $a1^i$	Movimiento con hombre en 3^{era} base
M -> $a4^l$ $a3^k$ $a2^j$ $a1^i$	Movimiento con hombre en 3^{era}, 2^{da} y 1^{era} base
Movimiento por golpe o bola	
MG -> $a1^i$	Movimiento sin hombre en base
MG -> $a2^j$ $a1^i$	Movimiento con hombre en 1^{era} base
MG -> $a3^k$ $a2^j$ $a1^i$	Movimiento con hombre en 2^{da} y 1^{era} base
MG -> $a4^l$ $a3^k$ $a2^j$ $a1^i$	Movimiento con hombre en 3^{era}, 2^{da} y 1^{era} base
Movimiento de doblete	
MD -> $a1^i$ $a2^i$	Movimiento sin hombre en base
MD -> $a2^j$ $a1^i$ $a3^j$ $a2^i$ a,	Movimiento con hombre en 1^{era} base
MD -> $a3^k$ $a2^j$ $a1^i$ $a4^k$ $a3^j$ $a2^i$	Movimiento con hombre en 2^{da} y 1^{era} base
MD -> $a4^k$ $a2^j$ $a1^i$ $a3^j$ $a2^i$	Movimiento con hombre en 3^{era} y 1^{era} base
MD -> $a3^j$ $a1^i$ $a4^j$ $a2^i$	Movimiento con hombre en 2^{da} base
MD -> $a4^k$ $a3^j$ $a1^i$ $a4^j$ $a2^i$	Movimiento con hombre en 3^{era} y 2^{da} base
MD -> $a4^j$ $a1^i$ $a2^i$	Movimiento con hombre en 3^{era} base
MD -> $a4^l$ $a3^k$ $a2^j$ $a1^i$ $a4^k$ $a3^j$ $a2^i$	Movimiento con hombre en 3^{era}, 2^{da} y 1^{era} base
Movimiento de triplete	
MT -> $a1^i$ $a2^i$ $a3^i$	Movimiento sin hombre en base
MT -> $a2^j$ $a1^i$ $a3^j$ $a2^i$ $a4^j$ $a3^i$	Movimiento con hombre en 1^{era} base
MT -> $a3^k$ $a2^j$ $a1^i$ $a4^k$ $a3^j$ $a2^i$ $a4^j$ $a3^i$	Movimiento con hombre en 2^{da} y 1^{era} base
MT -> $a4^k$ $a2^j$ $a1^i$ $a3^j$ $a2^i$ $a4^j$ $a3^i$	Movimiento con hombre en 3^{era} y 1^{era} base
MT -> $a3^j$ $a1^i$ $a4^j$ $a2^i$ a3i	Movimiento con hombre en 2^{da} base
MT -> $a4^k$ $a3^j$ $a1^i$ $a4^j$ $a2^i$ $a3^i$	Movimiento con hombre en 3^{era} y 2^{da} base
MT -> $a4^j$ $a1^i$ $a2^i$ a3i	Movimiento con hombre en 3^{era} base
MT -> $a4^l$ $a3^k$ $a2^j$ $a1^i$ $a4^k$ $a3^j$ $a2^i$ $a4^j$ $a3^i$	Movimiento con hombre en 3^{era}, 2^{da} y 1^{era} base

$$i \neq j, i \neq k, i \neq l, j \neq k, j \neq l, k \neq l$$

Tabla 3.3 Reglas gramaticales

3.3. Autómata de pila

Los autómatas de estado finito son modelos matemáticos que reciben cadenas como entradas y al procesarlas determinan si esas cadenas pertenecen al lenguaje que el autómata reconoce [36]. Un autómata o máquina de estados finitos es un modelo abstracto con una memoria interna limitada, que contiene un número finito de estados, transiciones y un conjunto de acciones; éste se utiliza para reconocer los lenguajes regulares. Un autómata de pila es un autómata de estados finitos que pueden hacer uso de una pila, éste utiliza la pila para decidir qué transición se va llevar a cabo; éste se utiliza para reconocer lenguajes libres de contexto. La máquina de *Turing* es un dispositivo teórico general que manipula símbolos contenidos en una tira de cinta; éste se utiliza para reconoce los lenguajes recursivos enumerables [37].

Como se muestra en la sección 3.2, para generar un leguaje para el béisbol se necesita una gramática libre de contexto. De ahí que un autómata de pila es capaz de reconocer éste lenguaje, ya que necesita tener el control del número de *strikes*, bolas, *foules* y *outs* para decidir la transición correspondiente a realizar y utilizar una pila para cada una de las jugadas involucrados. El autómata de pila para el béisbol se modela conforme a la estructura del campo de juego; esto quiere decir que las bases 1^{era}, 2^{da}, 3^{era}, *home* y base especial son los estados del autómata; las transiciones entre los estados están dadas por los movimientos que los jugadores pueden realizar. En la Figura 3.2 se muestra el autómata para el juego de béisbol.

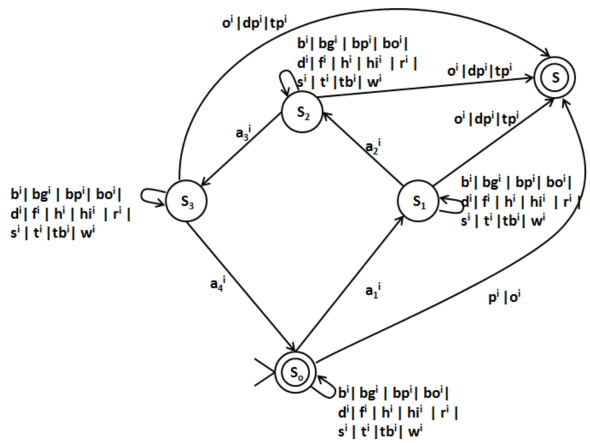

Figura 3.2 Autómata de béisbol

El autómata de pila es una tupla ($\sum$, S', Γ, s_0, δ, H) que consiste de:

- $\sum$ es el alfabeto de entrada (elementos terminales).
- S' es el conjunto de estados $\{s, s_0, s_1, s_2$ y $s_3\}$.
- $\Gamma = \{F', B', O'$ y $ST\}$ es el alfabeto de los símbolos de la pila.
- $\delta = S' \times \sum \rightarrow S'$ es la función de transición.
- s_0 es el estado inicial y
- $H = \{s_0, s\}$ es el conjunto de estados de parada.

El autómata de pila cuenta con diferentes pilas, una pila para: 1) el número de strike *ST*, 2) el número de foules *F*, 3) el número bolas *B*, 4) el número de *outs* *O* y 5) para las bases a_1, a_2 y a_3. Los cinco estados son s, s_o, s_1, s_2 y s_3 donde s y s_0 son estados de parada. El autómata analiza las cadenas que describen las secuencias de jugadas, así como los jugadores que las realizan.

En el estado s las jugadas terminan debido a los *outs*. Para transitar entre los demás estados s_1, s_2 y s_3 se debe realizar una acción, en la cual el jugador sea capaz de llegar al siguiente estado. En la Tabla 3.4 se muestra las transiciones entre los estados. Hay que destacar de que se debe utilizar una pila para realizar ciertos movimientos hacia los estados, apilando y des-apilando símbolos en la pila correspondiente.

(s$_0$,f,nil) : (s$_0$,F’)	(s$_2$,f,nil) : (s$_2$,F’)
(s$_0$,s,nil) : (s$_0$,ST’)	(s$_2$,s,nil) : (s$_2$,ST’)
(s$_0$,b,nil) : (s$_0$,B’)	(s$_2$,b,nil) : (s$_2$,B’)
(s$_0$,bp,nil) : (s$_0$,nil)	(s$_2$,bp,nil) : (s$_2$,nil)
(s$_0$,bg,nil) : (s$_0$,nil)	(s$_2$,bg,nil) : (s$_2$,nil)
(s$_0$,bo,nil) : (s$_0$,nil)	(s$_2$,bo,nil) : (s$_2$,nil)
(s$_0$,d,nil) : (s$_0$,nil)	(s$_2$,d,nil) : (s$_2$,nil)
(s$_0$,hi,nil) : (s$_0$,nil)	(s$_2$,hi,nil) : (s$_2$,nil)
(s$_0$,h,nil) : (s$_0$,nil)	(s$_2$,h,nil) : (s$_2$,nil)
(s$_0$,fs,nil) : (s$_0$,nil)	(s$_2$,fs,nil) : (s$_2$,nil)
(s$_0$,t,nil) : (s$_0$,nil)	(s$_2$,t,nil) : (s$_2$,nil)
(s$_0$,tb,nil) : (s$_0$,nil)	(s$_2$,tb,nil) : (s$_2$,nil)
(s$_0$,w,nil) : (s$_0$,nil)	(s$_2$,w,nil) : (s$_2$,nil)
(s$_0$,a1,{F ST B}):(s$_1$,a$_1$)	(s$_2$,r,nil) : (s$_2$,nil)
(s$_0$,p,{F ST B}): (s,O’)	(s$_2$,a3,{F ST B a$_2$}) : (s$_3$,a$_3$)
(s$_0$,o,{F ST B}): (s,O’)	
	(s$_2$,o,{F ST B}) : (s,O’)
(s$_1$,f,nil) : (s$_1$,F’)	(s$_2$,dp,{F ST B}) : (s,O’)
(s$_1$,s,nil) : (s$_1$,ST’)	(s$_2$,tp,{F ST B}) : (s,O’)
(s$_1$,b,nil) : (s$_1$,B’)	
(s$_1$,bp,nil) : (s$_1$,nil)	(s$_3$,f,nil) : (s$_3$,F’)
(s$_1$,bg,nil) : (s$_1$,nil)	(s$_3$,s,nil) : (s$_3$,ST’)
(s$_1$,bo,nil) : (s$_1$,nil)	(s$_3$,b,nil) : (s$_3$,B’)
(s$_1$,d,nil) : (s$_1$,nil)	(s$_3$,bp,nil) : (s$_3$,nil)
(s$_1$,hi,nil) : (s$_1$,nil)	(s$_3$,bg,nil) : (s$_3$,nil)
(s$_1$,h,nil) : (s$_1$,nil)	(s$_3$,bo,nil) : (s$_3$,nil)
(s$_1$,fs,nil) : (s$_1$,nil)	(s$_3$,d,nil) : (s$_3$,nil)
(s$_1$,t,nil) : (s$_1$,nil)	(s$_3$,hi,nil) : (s$_3$,nil)
(s$_1$,tb,nil) : (s^1,nil)	(s$_3$,h,nil) : (s$_3$,nil)
(s$_1$,w,nil) : (s^1,nil)	(s$_3$,fs,nil) : (s$_3$,nil)
(s$_1$,r,nil) : (s^1,a$_2$)	(s$_3$,t,nil) : (s$_3$,nil)
(s$_1$,a2,{F ST B a$_1$}): (s$_2$,A2)	(s$_3$,tb,nil) : (s$_3$,nil)
	(s$_3$,w,nil) : (s$_3$,nil)
(s$_1$,o,{F ST B}) : (s,O’)	(s$_3$,r,nil) : (s$_0$,nil)
(s$_1$,dp,{F ST B}): (s,O’)	(s$_3$,a4,{F ST B a$_3$}) : (s$_0$,nil)
(s$_1$,tp,{F ST B}): (s,O’)	
	(s$_3$,o,{F ST B}) : (s,O)
	(s$_3$,dp,{F ST B}) : (s,O)
	(s$_3$,tp,{F ST B}) : (s,O)

Tabla 3.4 Tabla de transición

Con base en las observaciones acerca de cómo suministrar las cadenas al autómata, se optó por desarrollar un generador de jugadas aleatorias del béisbol, para hacer más fácil la simulación de todo un partido.

3.4. Generador de jugadas

El principal objetivo de la implementación de un generador de jugadas es la construcción de cadenas que simulen todo un juego de béisbol, donde las cadenas deben tener una secuencia correcta de jugadas, es decir, las jugadas deben generarse de acuerdo con su frecuencia de ocurrencia y la secuencia debe ser coherente con la realidad. Un generador de jugadas es útil porque genera cadenas validas del béisbol de forma aleatoria, rápida y fácil, las cuales son suministradas al autómata de béisbol.

El generador crea jugadas del béisbol y verifica que:

- Sean jugadas válidas del béisbol.
- Sean realizadas con base en su frecuencia de ocurrencia y
- Que la secuencia de jugadas que se derivan de éstas sean correctas.

Las explicaciones de cómo se desarrolló el generador de jugadas son las siguientes: se generan números de forma aleatoria y a cada número se le asocia una jugada del béisbol. En la Figura 3.3 se muestra el esquema general de generación de jugadas de béisbol. Los números que se generan están acotados al número de jugadas, es decir sólo se generan 0 a *m*, donde *m* es el número de jugadas sencillas, las cuales se pueden ver en la Tabla 3.1, ya que las jugadas dependientes se forman a través de las jugadas sencillas.

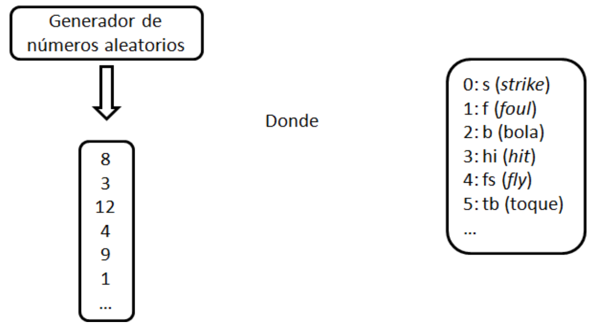

Figura 3.3 Esquema de generación de jugadas del béisbol

A cada jugada se le aplica la función probabilística *flip*, la cual devuelve solo cero o uno con una probabilidad p dada. Si p = 0.5, ésta regresará de igual manera un verdadero (*1*) o un falso (*0*), la función se alimenta de la generación de números aleatorios *gaussianos* con media cero y desviación estándar *sigma*. Dicha función probabilística recibe como parámetros la probabilidad de la jugada, a partir de la cual decide si la jugada se realiza. Cabe mencionar que las jugadas no son equi-probables. En la Figura 3.4 se muestra el esquema general de la función probabilística.

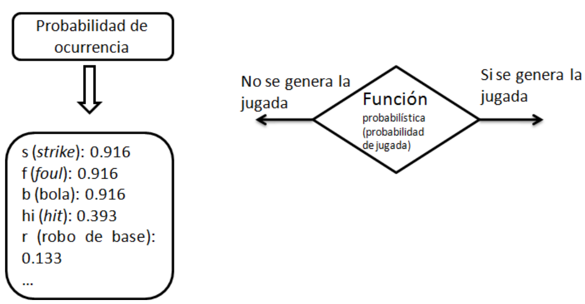

Figura 3.4 Esquema de la función probabilística

El generador de jugadas cuenta con un módulo de generación de cadenas y validación de éstas es decir después de pasar por el proceso de la generación de jugada a través de los números aleatorios y de la función probabilística, se debe crear la cadena con dicha jugada que se generó.

La forma en que se realizan es la siguiente: en el extremo derecho de una cadena, vacía (ε) al inicio, se concatenan las jugadas a realizar; cada nueva jugada se concatena indicando, asimismo, el jugador que la realiza. Existen jugadas que son dependientes de otras, las cuales pueden generarse si y sólo si hay una determinada secuencia de jugadas anteriores. En la Figura 3.5 se muestra la creación de las cadenas del béisbol, a través de las jugadas que se realizan.

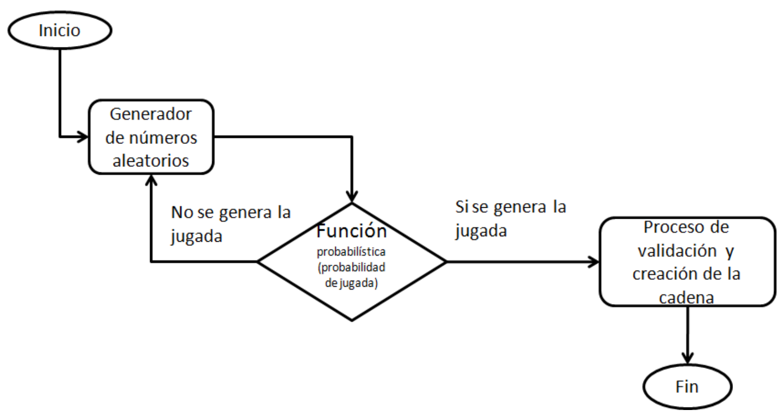

Figura 3.5 Esquema general de la generación y construcción de cadenas

En la Tabla 3.5 se muestra el algoritmo para la creación de las cadenas que simulan todo el partido de béisbol.

Algoritmo de generación de jugadas:

Paso 1: Se generan números de forma aleatoria en el rango {0,…, m}, donde m es la cantidad de jugadas simples en el béisbol; a cada número se le asocia una jugada.

Paso 2: Una vez obtenida la jugada a realizar, se utiliza una función probabilística para decidir si se acepta la jugada o no, dependiendo de la probabilidad de ocurrencia de ésta, si es si ir al Paso 3 y si es no ir al Paso 1.

Paso 3: Se crea la cadena con la jugada a realizar, incluyendo en

---

	la concatenación, la secuencia de acciones a consecuencia de la jugada.
Paso 4:	Validación de la cadena como secuencia válida del béisbol.
Paso 5:	Si el proceso de simulación de todo el partido de béisbol ha terminado pasar al Paso 6, de otra forma al paso 1.
Paso 6:	Fin de la simulación, se obtiene una cadena que simuló todo el partido.

Tabla 3.5 Algoritmo del generador de jugadas

3.5. Jugadas de sacrificio

Las jugadas de sacrificio son jugadas que se realizan en el béisbol como parte de una estrategia ganadora [17] [22] cuyas características son:

- Estrategia “conservadora” para ganar gradualmente.
- Estrategia para aumentar la probabilidad de éxito del equipo.
- Las realizan típicamente jugadores con baja calificación.
- Representa aparentemente pérdida para el equipo “mínimo local” pero
- Conlleva un “máximo global”, es decir, el éxito del equipo al final del juego en disputa.

Las jugadas de sacrificio son jugadas tales que comparadas con respecto a otras y en ciertas circunstancias aumentan las probabilidades de éxito en el juego. El objetivo de utilizarlas es:

1. Garantizar ganar el juego de manera gradual.
2. Asegurar posiciones intermedias, las cuales a lo largo del encuentro y/o en conjuntos garantizan la acumulación de puntos a favor.

3. Vistas localmente parecen pérdidas, pero en conjunto le favorecen al equipo.

Para identificar cuándo conviene aplicar las jugadas de sacrificio para obtener buenos resultados, se incorporaron al simulador las estrategias basadas en jugadas de sacrificio. Del análisis empírico del comportamiento se obtuvieron conclusiones propias acerca de cuándo es conveniente aplicarlas, dependiendo de momentos y circunstancias del encuentro. Las circunstancias se describen enseguida:

- El equipo va ganando escasamente.
- El equipo va ganando ampliamente.
- El equipo va perdiendo con margen escaso.
- El equipo va perdiendo con margen amplio.
- Siempre utilizando las jugadas de sacrificio (sin tomar en cuenta el marcador).

Los momentos del partido se describen enseguida:

- En las primeras entradas (1^{era} – 3^{era}).
- En las entradas intermedias (4^{ta} – 6^{ta}).
- En las entradas finales (7^{ma} – 9^{na},…).

3.6. Jugadas clásicas del béisbol

El béisbol teóricamente es un juego de infinitos cálculos, probabilidades y variables, aunque también de intuición. Por ello no se justifican las alineaciones inamovibles.

Dentro de la literatura especializada se encuentra estrategias [30][31] que son aplicadas al juego de béisbol, las cuales pueden dividirse en aplicables a la defensiva o a la ofensiva.

Estrategias a la ofensiva:

- Orden de bateo.
- Corredores emergentes.
- Diferentes tipos de toque de bola, tales como: toques de sacrificio, toque y corre (*bunt and run*) y *Squeeze Bunt.*
- Robo de base.
- *Fly* de sacrifico.
- Golpear y correr (*hit and run*).
- *Home run*.
- *Hit*.
- Correr las bases (*baserunning*).
- Dobletes.

A la ofensiva, la principal estrategia consiste en la designación del orden de bateo. Antes del partido cada equipo arma una lista en la que cada uno de los 9 jugadores tiene un puesto pre-establecido para batear. Lo más habitual es poner a los mejores primero, pues tendrán más oportunidades de batear, que los que estén al final de la lista, pero con una salvedad: en los primeros dos lugares se suele preferir poner a gente rápida de piernas que no sean tan buena bateando, para intentar lograr que ellos simplemente se metan en las bases y que los mejores bateadores (el 3ro y el 4to) los remolquen hasta *home* con un *home run* o algún buen batazo que les de tiempo de avanzar lo suficiente.

Algunos aspectos que se deben considerar cuando el equipo está a la defensiva son, por ejemplo, cuando el equipo tiene uno o más corredores en base. Algunas estrategias que se pueden realizar son:

- Robo de base para adelantar al corredor más avanzado.
- Conectar de *hit* para adelantar a los corredores.

Si hay menos de dos *outs*, una tercera estrategia posible sería:

- Jugada de sacrificio para avanzar a los corredores, aunque esto implique un *out*.

Estrategias a la defensiva:

- Base por bolas (intencional).
- Doble matanza (doble *play*).
- Picheo (tratar de realizar menos lanzamientos).
- Colocación estratégica de los jugadores.

Supongamos que tenemos la situación siguiente: hay corredores en segunda y tercera base y un jugador peligroso está al bateo; las estrategias serían:

1. Dar intencionalmente la base por bolas.
2. Tratar de realizar un doble *play* a la siguiente jugada.

En el caso siguiente se muestra cuando el equipo a la ofensiva tiene corredores en primera y tercera o en primera, segunda, tercera y sin *outs*. El equipo a la ofensiva tiene como posibles estrategias:

1. Acerca a los defensivos y si el bateador realiza un contacto con la pelota, lanzar la pelota a *home* para poner fuera al jugador más avanzado o prevenir la carrera.
2. Intentar realizar una doble matanza (doble *play*).

Mientras que el equipo a la ofensiva está tratando de anotar carreras, el equipo a la defensiva está intentando sacar los *outs*. La defensiva debe tratar de predecir las siguientes jugadas que el equipo a la ofensiva van a realizar, para contrarrestar usualmente tratando de ponerlo fuera de balance a través de los *outs*.

3.7. Análisis cualitativo de las estrategias del béisbol

Todd William [30] realizó un análisis cualitativo de las estrategias en el béisbol en tres principales factores: **entradas**, **marcadores** y **número de *outs***, proponiendo las siguientes alternativas de actuación:

- **Las entradas del partido**

Uno de los factores importantes a considerar son las *entradas.* Jugar de manera agresiva o conservadora, a menudo depende de si el partido se encuentra en las primeras entradas, últimas entradas o en las entradas intermedias.

En las primeras entradas, el principal objetivo es conseguir la delantera jugando de manera agresiva; no se recomienda desperdiciar los *outs* con toques de sacrificio.

Las entradas intermedias a menudo determinan el carácter del juego: sí el juego es muy agresivo, su estrategia deberá reflejar eso, pero se recomienda jugar de manera conservadora.

En las entradas finales del partido presenta dos circunstancias, las estrategias a la ofensiva serán el resultado de la puntuación; se juega de forma conservadora si se está perdiendo para poder conservar los *outs* y jugar de forma agresiva si se está adelante en el marcador.

Cuando el equipo está adelante en el marcador en las últimas entradas, se recomienda jugar de manera agresiva.

- **Situación en el marcador**

Cuando el equipo está adelante en el marcador, se debe jugar de manera más agresiva, de manera que la diferencia entre los marcadores sea mayor: se puede arriesgarse más en las bases.

Cuando el equipo está detrás en el marcador, se debe jugar de forma más conservadora tratando de mantener el número de *outs*, con el objetivo de adelantar a los corredores más avanzados si es el caso, realizando jugadas que aseguren poco a poco anotar carreras.

Cuando el marcador está empatado o con una carrera de diferencia, se debe ajustar su estrategia a la forma del juego, como se muestra a continuación: si se trata de un juego de puntuación baja, probablemente los jugadores tendrán que jugar más agresivamente para impulsar una carrera o dos; si el juego es muy agresivo, se recomienda jugar de manera conservadora, tratando de mantener los *outs* para realizar entradas grandes.

- **El número de *outs***

Sin *outs*, el equipo debe jugar de forma conservadora, si la diferencia en el marcador es poca, ya que los jugadores tienen la posibilidad de anotar varias carreras.

Con un *out*, el equipo debe jugar de manera agresiva tratando de alcanzar al menos una carrera; con dos *outs*, la posibilidad de que el equipo obtenga varias carreras se reduce de manera significativa.

George Lindsey [31] con base en un estudio estadístico de las estrategias del béisbol, definió ciertas estrategias más convenientes de ser aplicadas con base en las: *entradas, marcadores y número de outs,* proponiendo cuando es conveniente aplicar las jugadas de sacrificio y el robo de bases:

- **Las jugadas de sacrificio:** este tipo de jugada es utilizada cuando hay menos de dos *outs* y un jugador en tercera base. Típicamente son utilizadas en las últimas entradas del partido.
- **Robo de bases:** la principal característica de este tipo de jugada es que es utilizada cuando se tiene uno o más jugadores en base para tratar de avanzarlos, evitando así jugadas que ponen en riego al equipo.

Las estrategias a la defensiva no presentan una distinción así como las estrategias a la ofensiva, pero lo más conveniente es tratar de conseguir los *outs*, de manera que no se tenga que realizar demasiados lanzamientos y tratar de contrarrestar las jugadas del equipo contrario.

Capítulo 4

Equilibrio de Nash

En este capítulo se define el concepto formal e informal del Equilibrio de Nash, antecedentes, ejemplos, trabajos relacionados y nuestra propuesta de análisis de perfiles de estrategias explicando los autómatas correspondientes que modelan el Equilibrio de Nash y el algoritmo del Equilibrio de Nash.

4.1. Antecedentes

El Equilibrio de Nash es un concepto ampliamente utilizado en Teoría de Juegos para encontrar perfiles de estrategia que sean solución a juegos de dos o más jugadores, tomando en cuenta que los perfiles deben ser la mejor estrategia de cada jugador condicionada con las estrategias de los demás.

En la vida real es frecuente que durante el desarrollo de un juego colectivo algún jugador esté incentivado individualmente para defraudar al otro o los otros, incluso tras haberse comprometido a colaborar. Éste es el punto clave del dilema, pero curiosamente ambos jugadores obtendrían un resultado mejor si colaboran. A continuación se dan ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 1: *El dilema del prisionero* [24]en su enunciación clásica describe la situación en que la policía arresta a dos sospechosos sin pruebas suficientes para inculparlos de un delito. Tras separarlos, se visita a cada uno y se les ofrece el mismo trato: si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años y el primero será liberado. Simétricamente, si uno calla y el cómplice confiesa, el primero recibirá esa pena y será el cómplice quien salga libre. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a seis años. Si ambos lo niegan, todo lo que la policía podrán hacer será encerrarlos durante seis meses por un cargo menor. Lo anterior puede resumirse como se ilustra en la Tabla 4.1.

	Prisionero # 2		
Prisionero #1		**Callar**	**Confesar**
	Callar	6 meses ambos	El prisionero # 2 es liberado, el prisionero # 1 recibe 10 años
	Confesar	El prisionero # 1 es liberado, el prisionero # 2 recibe 10 años	6 años ambos

Tabla 4.1 Actuación de los prisioneros

Para el dilema del prisionero y siguiendo la definición, vamos a encontrar el Equilibrio de Nash. Para ello se debe enumerar todos los perfiles de estrategias posibles y ver si fijado un perfil de estrategias para un jugador, las otras estrategias maximizan los pagos del otro jugador. En la Tabla 4.2 se muestra la matriz de rentabilidad para los jugadores.

	Prisionero # 2		
Prisionero #1		**Callar**	**Confesar**
	Callar	2, 2	0,3
	Confesar	3, 0	1 ,1

Tabla 4.2 Rentabilidad del dilema del prisionero

El Dilema del Prisionero presenta cuatro perfiles como posibles soluciones de Equilibrio de Nash del juego: *(callar, callar), (callar, confesar), (confesar, callar)* y *(confesar, confesar).* Comenzaremos analizando el perfil *(callar, callar)* y supongamos que es un Equilibrio de Nash. Si el prisionero #1 prevé que el prisionero #2 jugará *callar* ¿Le convendría al prisionero #1 seguir pensando en jugar *callar?* La respuesta es no. Debido a que fijada la estrategia *callar* del prisionero #2, el prisionero #1 preferirá desviarse de la estrategia indicada para él en el perfil propuesto como solución puesto que con la estrategia *confesar* obtiene un pago superior u_1 (*confesar, callar)* =3 > 2= u_1 *(callar, callar).* Este argumento también es aplicable al prisionero #2 (por simetría del juego), llegando a la conclusión que el perfil (*callar, callar)* no es un Equilibrio de Nash debido a que cualquier prisionero, puede desviar su estrategia y obtener un mayor beneficio.

Supongamos que se propone como solución de Equilibrio de Nash el perfil *(confesar, callar*). En este caso, si el prisionero #2 supiera que el prisionero #1 iba a jugar *confesar*, a él le convendría jugar la estrategia *confesar* pues con ello maximiza su utilidad en este caso particular u_2 *(confesar, confesar*)= 1 > 0= u_2 *(confesar, callar).* Por tanto, el perfil *(confesar, callar)* tampoco es un Equilibrio de Nash.

El caso *(callar, confesar)* es análogo al anterior intercambiando la posición de los prisioneros. Finalmente, nos queda el caso *(confesar, confesar).* Éste si es un perfil de Equilibrio de Nash, ya que ningún de los prisioneros tiene el incentivo para desviarse de forma unilateral de la estrategia que se propone. Si alguno de los prisioneros decidiera seguir la estrategia *callar* en solitario, perdería utilidad en relación al perfil *(confesar, confesar),* puesto que u_1 (*callar, confesara*)= 0 < 1= u_1 (*confesar, confesar*) y u_2 (*confesar, callar*)= 0 < 1= u_2 (*confesar, confesar*). En Tabla 4.3 se muestra las desviaciones deseadas para cada jugador.

	Prisionero # 2		
Prisionero #1		**Callar**	**Confesar**
	Callar	2, 2 →	0,3
	Confesar	↓ 3, 0 →	↓ 1 ,1

Tabla 4.3 Desviaciones del dilema del prisionero

Se puede observar y con el análisis anterior, se deduce que el perfil (*confesar, confesar*) es un perfil de Equilibrio de Nash, debido a que fijado este perfil, ningún prisionero tiene el incentivo de desviarse de su estrategia.

Ejemplo 2: *La batalla de sexos:* Este ejemplo muestra que en un juego puede haber múltiples Equilibrios de Nash. En la exposición tradicional del juego, un hombre y una mujer están tratando de decidir que harán esta noche; este análisis no toma en cuenta el sexo de los participantes. En lugares de trabajo separados, Pat y Chris deben elegir entre ir a la ópera o a un combate de boxeo. Ambos preferirían pasar la noche juntos, pero Pat preferiría pasar la noche juntos en el boxeo, mientras que Chris preferiría estar juntos en la ópera. En la Tabla 4.4 se representa la matriz de rentabilidad para la guerra de sexos. Ambos, *(ópera, ópera)* y *(boxeo, boxeo)* son Equilibrios de Nash.

		Pat	
		Ópera	**Boxeo**
Chris	**Ópera**	2, 1	0, 0
	Boxeo	0, 0	1, 2

Tabla 4.4 Guerra de sexos

Se ha argumentado antes que si la Teoría de Juegos ofrece una única solución a un juego, ésta debe ser un Equilibrio de Nash. También se ha argumentado que si se llega a un acuerdo sobre como comportarse en un juego, las estrategias establecidas en el acuerdo deben ser un Equilibrio de Nash. En algunos juegos con múltiples soluciones que sean de Equilibrio de Nash una puede ser la solución más atractiva. Así, la existencia de múltiples soluciones de Equilibrio de Nash ofrece alternativas para elegir la que mejor resuelva un problema. Sin embargo, en la batalla de sexos, *(ópera, ópera)* y *(boxeo, boxeo)* parecen ser igualmente atractivos.

4.2. Formalización

En el juego en forma normal de n jugadores, $G = \{S_1, \ldots, Sn; u_1, \ldots, u_n\}$, las estrategias $s_1^*, \ldots, s_n^*$, forman un Equilibrio de Nash si, para cada jugador i, s_i^* es la mejor respuesta del jugador i (o al menos una de ellas) a las estrategias de los otros n_{-1} jugadores, $s_1^*, \ldots, s_i^*{}_{-1}$, $s_i^*{}_{+1}, \ldots, s_n^*$.

$$u_i\,(s_1^*, \ldots, s_i^*{}_{-1}, \mathbf{s_i^*}, s_i^*{}_{+1}, \ldots, s_n^*) \geq u_i\,(s_1^*, \ldots, s_i^*{}_{-1}, \mathbf{s_i}, s_i^*{}_{+1}, \ldots, s_n^*).$$

Para cada posible estrategia s_i, *en* S_i; esto es, s_i es una solución que maximice la función de rentabilidad.

$$\max_{s_i \in S_i} u_i\,(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*).$$

Para relacionar esta definición con su fundamentación anterior, supongamos que la Teoría de Juegos ofrece las estrategias $(s_1', \ldots, s_n')$ como la solución al juego en forma normal $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$. Decir que $(s_1', \ldots, s_n')$ no constituyen un Equilibrio de Nash de G es equivalente a decir que existe algún jugador $\boldsymbol{i}$ tal que $\boldsymbol{s_i'}$ no es la mejor respuesta a $(s_1', \ldots, s_i'{}_{-1}, s_i'{}_{+1}, \ldots, s_n')$. Esto es, existe algún $\boldsymbol{s_i''}$ en $\boldsymbol{S_i}$ tal que:

$$u_i\,(s_1', \ldots, s_i'{}_{-1}, \mathbf{s_i'}, s_i'{}_{+1}, \ldots, s_n') < u_i\,(s_1', \ldots, s_i'{}_{-1}, \mathbf{s_i''}, s_i'{}_{+1}, \ldots, s_n').$$

Así, si la secuencia de estrategias $(s_1', \ldots, s_n')$ se propone como solución pero estas estrategias no constituyen un Equilibrio de Nash, debido a que al menos un jugador tendrá un incentivo para desviarse de su estrategia.

Se tiene la siguiente situación con el Equilibrio de Nash al incorporar la idea de convenio: si surge un acuerdo sobre como comportarse en un determinado juego, las estrategias fijadas por el convenio deben formar un Equilibrio de Nash; si no, habrá al menos un jugador que no se regirá por el convenio [2].

En el juego , $G=\{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, decimos que el perfil de estrategias puras $(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*)$ es un Equilibrio de Nash si para cada jugador ***i***, $u_i (s_1^*, \ldots, s_i^*_{-1}, \boldsymbol{s_i^*}, s_i^*_{+1}, \ldots, s_n^*) \geq u_i (s_1^*, \ldots, s_i^*_{-1}, \boldsymbol{s_i}, s_i^*_{+1}, \ldots, s_n^*)$. Para todo $\boldsymbol{s_i}$ de $\boldsymbol{S_i}$. Es decir, para cada jugador ***i***, $\boldsymbol{s_i^*}$ es una solución del problema $Max\ u_i (s_1^*, \ldots, s_i^*_{-1}, s_i, s_i^*_{+1}, \ldots, s_n^*)$ donde s_i es la variable de decisión y pertenece a S_i o, dicho de otro modo, para cada jugador ***i***, s_i^* es una respuesta óptima a S^*_{-i}. donde S^*_{-i} son las estrategias óptimas del resto de los jugadores.

De esta definición se deduce que un Equilibrio de Nash es un perfil de estrategias, tal que ningún jugador desearía desviarse unilateralmente, es decir, cada jugador obtiene el mayor beneficio con la estrategia establecida, dadas las estrategias del resto de los jugadores. Un Equilibrio de Nash está formado por estrategias que son óptimas para cada jugador dadas las estrategias del resto de los jugadores.

Esto no significa que en un Equilibrio de Nash, cada jugador está alcanzando el mejor resultado posible, sino el mejor resultado condicionado por el hecho de que los demás jugadores jueguen las estrategias indicadas para ellos en dicho perfil [3].

El Equilibrio de Nash es el concepto central más frecuentemente utilizado en el análisis de juegos de dos o más jugadores, para caracterizar las mejores estrategias colectivas, tales que a ningún jugador, le resulte atractivo actuar de manera diferente a lo que la estrategia colectiva indica. Un Equilibrio de Nash induce una situación estratégicamente estable debido a los resultados perjudiciales que los participantes prevén por alguna desviación unilateral. Naturalmente, en la evolución de tales posibles desviaciones, cada jugador ha de tener en cuenta las estrategias del resto de los jugadores y, en particular, las acciones que estas estrategias inducirían en respuesta a cada una de sus propias acciones. El jugador ha de tener en cuenta, en otras palabras, las amenazas incorporadas en las estrategias de sus oponentes para responder óptimamente a ellas [1].

Consideremos *(S, f)* como un juego de *n* jugadores donde S_i es el conjunto de estrategias del jugador *i*, $S= \{S_1 \times S_2... \times S_n\}$ es el conjunto de perfiles de estrategias y $f= (f_1(x),..., f_n(x))$ es la función de rentabilidad. Consideremos x_{-i} es el perfil de estrategias de todos los jugadores a excepción del jugador *i*, cuando cada jugador $i \in \{1,..., n\}$ escoge una estrategia x_i resultante del conjunto de perfiles de estrategias $x = (x_1,..., x_n)$ entonces el jugador *i* obtiene una rentabilidad dada por $f_i(x)$. Hay que notar que la rentabilidad depende del perfil de estrategias escogidas, es decir, en las estrategias escogidas por el jugador *i* tanto como en las estrategias escogidas por los demás jugadores. Un perfil de estrategia $x^* \in S$ es un Equilibrio de Nash si ninguna desviación unilateral en la estrategia de algún jugador es provechosa para él [8]:

$$\forall_i, x_i \in S_i, x_i \neq x_i^* : f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i, x_{-i}^*)$$

4.3. Estado del arte

El Equilibrio de Nash como condición necesaria y suficiente para que un perfil de estrategias sea la solución de un juego, es decir, una predicción válida sobre el comportamiento de jugadores racionales [3]. A pesar de que el Equilibrio de Nash es el concepto más importante en Teoría de Juegos, notablemente ha sido poco estudiado el problema de computarizar el Equilibrio de Nash en un juego de forma normal.

Se conoce que cualquier juego de forma normal garantiza tener al menos un Equilibrio de Nash [10].

El algoritmo más comúnmente utilizado para encontrar el Equilibrio de Nash en juegos de dos jugadores es el algoritmo de Lemke-Howson [11], el cual es un caso especial del método de

Lemke [12] para resolver problemas de complementariedad lineal. El algoritmo de Lemke-Howson es un algoritmo de *pivoting* complementario. En donde una selección arbitraría de alguna acción para el primer jugador es determinada por el primer pivote; después, cada sucesivo pivote es determinado únicamente por el estado actual del algoritmo, hasta que el equilibrio es encontrado. Así, cada acción para el primer jugador puede ser pensada de definir una ruta del punto de inicio al Equilibrio de Nash. En la implementación de Lemke-Howson en Gambit [13] la primera acción del primer jugador es seleccionada.

Para juegos de *n* jugadores, hasta hace poco tiempo, la *subdivisión simplicial* [14] y sus variantes eran el estado del arte. Este método aproxima a un punto fijo de una función, la cual es definida en un *simplotope* (es un producto de elementos o figuras contenida dentro de un espacio euclidiano de un número especificado). La aproximación es alcanzada triangulando el *simplotope* con un acoplamiento de granularidad dada y atravesando la triangulación a lo largo de una trayectoria fija.

Más recientemente, Govindan y Wilson en 2003 introdujeron una continuación de la *subdivisión simplicial* para el Equilibrio de Nash en un juego de *n* jugadores. El trabajo fue, primero perturbando un juego que tuviera un equilibrio conocido y segundo remontando las perturbaciones a la solución del juego original. La estructura del teorema de Kohlberg y Mertens en 1986, garantiza que es posible trazar el juego y una solución simultáneamente. Este método fue implementado por Blum, quien también lo extendió para resolver juegos de gráficas y diagramas de influencia de multi-agentes [15].

El método propuesto por Ryan Porter [16] está inspirado fuertemente en el procedimiento descrito por Dickhaut y Kaplan en 1991 para encontrar todos los Equilibrios de Nash. El programa enumera todos los posibles pares de soporte para juegos de dos jugadores. Para cada par de soportes, se comprueba si existe un Equilibrio de Nash consistente con ese par. Un método de enumeración similar fue sugerido por Mangasarian en 1964, basado en enumeración de vértices de un *polytope*.

Con el incremento de confianza en la Teoría de Juegos como una fundación para subastas y comercio electrónico. Los algoritmos que se han venido desarrollando para juegos de múltiples jugadores son de gran interés práctico y teórico. La complejidad computacional para encontrar el Equilibrio de Nash para juegos de bimatriz es un problema abierto. En el artículo de Michael L. Littman [5] tratan un problema estrechamente relacionado con el de encontrar el Equilibrio de Nash en juegos de bimatriz de rentabilidad promedio y presenta un algoritmo de tiempo polinómico. El método se basa en el teorema de *folk* de Teoría de Juegos y muestra cómo un conjunto de estrategias de estado finito se puede encontrar de manera eficiente.

Un juego de repetición bimatriz es jugado por dos jugadores 1 y 2, en donde cada jugador tiene su propio conjunto de acciones de tamaño n^1 *y* n^2 respectivamente. El juego es por rondas, con dos jugadores tomando decisiones de manera simultánea en cada ronda. Si el jugador 1 escoge la acción $1 \leq i^1 \leq n^1$ y el jugador 2 escoge $1 \leq i^2 \leq n^2$, ellos reciben una rentabilidad de $P^1_{i^1 i^2}$ y $P^2_{i^2 i^1}$ respectivamente. En juegos de repetición, los jugadores seleccionan sus acciones, posiblemente de manera estocástica, vía una estrategia del historial de sus interacciones. El objetivo de cada jugador en juegos de repetición es adoptar una estrategia que maximice su media de rentabilidad esperada. Un par de estrategias es un Equilibrio de Nash si para cada estrategia, cada una es optimizada con respecto a las demás, de manera que ningún jugador puede mejorar su rentabilidad promedio cambiando de manera unilateral su estrategia.

El artículo de Michael L. Littman [5] considera el problema siguiente: dado un juego especificado por las matrices de rentabilidad P^1 y P^2, debe retornar un par de estrategias que constituyan un Equilibrio de Nash para un juego de repetición bimatriz de rentabilidad promedio. Para especificar el problema del equilibrio computacional, se debe concretar acerca de la representación de entrada y salida. La representación de entrada está relativamente dada por (p, q) $\in$ {(1, 2), (2, 1)}, la función P^p es una matriz de $n^p \times n^q$, por lo tanto el tiempo computacional del algoritmo debe ser polinomial.

Es bien conocido que los juegos de bimatriz tienen al menos un Equilibrio de Nash. Sin embargo, las estrategias de un juego de repetición pueden ser infinitamente grandes, entonces es necesario usar una representación finita para las estrategias cuando se computariza el Equilibrio de Nash. Se consideran dos formas de representación de las estrategias, una por las *máquinas de estado finito y counting-node extension*, en la cual las acciones pueden ser repetidas un número de veces específico. Ambas representan estrategias de estado finito, pero *counting-node extension* puede dar lugar a representaciones más pequeñas de forma exponencial.

Una máquina de estado finito de estrategias para el jugador p en contra de un oponente q está etiquetada mediante un grafo directo. Un nodo del grafo está diseñado para ser nodo de partida. Cada nodo del grafo está etiquetado con la probabilidad de distribución sobre cada acción tomada por p. Los arcos salientes son etiquetados por las acciones de q. No hay dos arcos en un simple nodo que comparten la misma etiqueta; en particular las transiciones no están influenciadas por las propias acciones de los jugadores. Un arco de salida para cada nodo está etiquetado con * para diseñar un arco por defecto, tomados si alguna de las acciones del jugador q no concuerda con alguna de las otras etiquetas. El tamaño de la máquina de estado finito de las estrategias está dado por la suma de los nodos y los arcos del grafo.

En la Figura 4.1 se muestra un ejemplo de una máquina de estado finito de estrategias para un juego de (2 x 2) acciones:

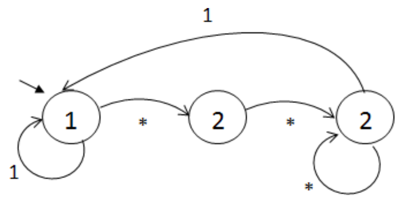

Figura 4.1 Máquina de estado finito para dos estrategias

El jugador *p* comienza en el nodo de la izquierda y selecciona la acción 1. Entonces si el oponente *q* selecciona la acción 1, *p* retorna al nodo de la izquierda; para continuar escoge la acción 1, sin embargo en cualquier otra acción escogida por *q*, una transición es realizada para el nodo del medio, donde la acción 2 es escogida. Siguiendo esto, cualquier opción de *q* resulta en una transición para el nodo de la derecha, en la cual la acción 2 continuará a ser escogida hasta que *q* escoge la acción 1. En este punto, *p* retorna al nodo izquierdo otra vez.

La estrategia expresada en la figura anterior es la del dilema del prisionero, la acción 1 es cooperativa y la acción 2 es no cooperativa. Las máquinas de estados finitos proveen un simple y gran lenguaje para expresar estrategias, algunas estrategias básicas llegan a ser engorrosa para ser escritas en la maquina de estados finitos.

Aunque existen procesos de aprendizaje para los que la distribución empírica de juego se acerca al Equilibrio de Nash, es una cuestión abierta si los propios jugadores pueden aprender a jugar las estrategias de equilibrio, sin asumir que tienen un conocimiento previo de las estrategias de sus oponentes y/o rentabilidad. En el artículo de Dean P. Foster [6] se exponen clases de hipótesis estadísticas de procedimientos de prueba para resolver el siguiente problema. Considere un juego de forma normal G, que se repite infinitas veces en cada momento, los jugadores tienen hipótesis acerca de las estrategias de sus oponentes. Ellos suelen probar sus hipótesis en contra de las recientes acciones de los oponentes, de manera que cuando una hipótesis falla la prueba, se adopta una nueva. El juego es casi racional en el sentido de que en cada momento las estrategias de los jugadores son mejores respuestas a sus creencias. Se demuestran que al menos 1-$\in$ del tiempo *t* estas estrategias constituyen la prueba de hipótesis, de hecho las estrategias están cerca de ser un sub-juego perfecto para largos periodos de tiempo.

En el artículo de Takashi Maeda [7] se consideran los juegos de matrices difusas, es decir, juegos de dos personas de suma cero con rentabilidad difusa. Basado en el orden máximo difuso, para estos juegos se definen tres tipos de conceptos de estrategias de equilibrio *minimax* y sus propiedades. En primer lugar, se demuestra que estas estrategias de equilibrio se caracterizan como estrategias de Equilibrio de Nash de una familia de juegos de matrices bi-paramétrica con funciones de rentabilidad *crisp* (*crisp payoffs)*. En segundo lugar, se investigan las propiedades de los valores de los juegos de matrices difusas por medio de medidas de posibilidad y necesidad. Además, se muestra un ejemplo numérico para ilustrar la utilidad de este enfoque.

4.4. Autómatas de estado finito

A continuación se muestran los autómatas de estado finito, para el modelado del Equilibrio de Nash. Para modelar las estrategias de los jugadores se debe definir los siguientes aspectos:

- El superíndice i indica las acciones que son realizadas por el jugador i.
- Sea s_x^i cualquier estrategia del jugador i, tal que $s_x^i \in S^i$, donde S^i es el conjunto de estrategias del jugador i.
- Las estrategias del jugador i son compuestas por un conjunto de acciones, $s_x^i = \{a_1^i, a_2^i, \ldots, a_n^i\}$, donde $a_x^i \in \sum^i$.

En la Figura 4.2 se muestra el autómata que modela el conjunto de estrategias del jugador *i*, donde:

- $\sum = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es el conjunto de los símbolos del alfabeto.
- $S = \{s, s_0, s_1, .., s_m, h_0, .., h_n\}$ es el conjunto de estados.
- s = es el estado inicial.
- $\delta = E \ x \sum \rightarrow E$ es la función de transición.
- F = $\{h_0, .., h_n\}$ es el conjunto de estados terminales.

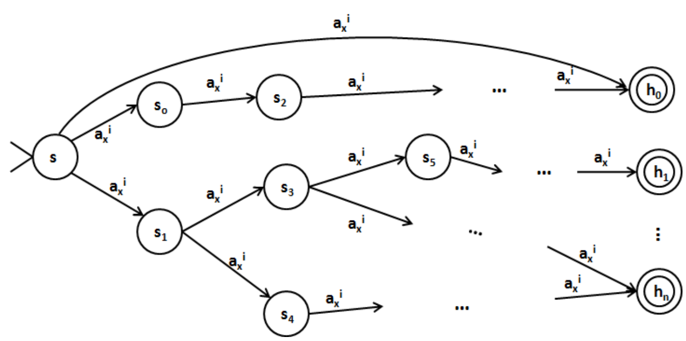

Figura 4.2 Autómata para las estrategias de cada jugador *i*

Para el modelado del Equilibrio de Nash, se deben tomar en cuenta el conjunto de estrategias de todos los participantes, para así, determinar todos aquellos perfiles que forman parte del Equilibrio de Nash. En la Figura 4.3 se muestra el autómata para el Equilibrio de Nash, donde

- $\sum = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \epsilon, \Theta\}$ es el conjunto de los símbolos del alfabeto.
- E = $\{s, s_0, s_1, .., s_n, h\}$ es el conjunto de estados.
- s = es el estado inicial.
- $\delta = E \ x \sum \rightarrow E$ es la función de transición.
- $H = \{h\}$ es el conjunto de estados terminales.

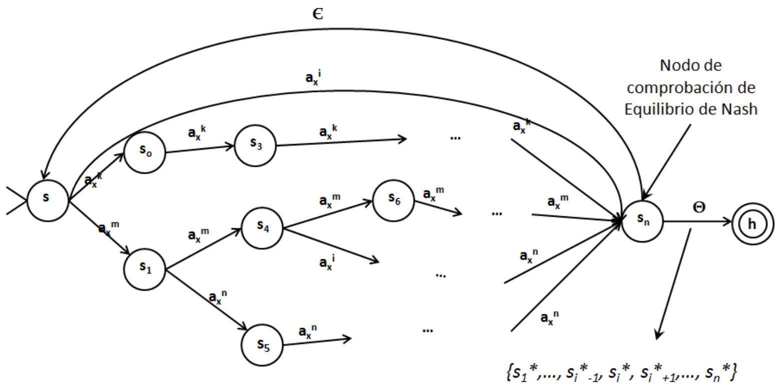

Figura 4.3 Autómata de Equilibrio de Nash

4.5. Algoritmo del Equilibrio de Nash y análisis de perfiles

Para un juego de forma normal de *n* jugadores existen diversos perfiles de estrategias, los cuales determinan la forma en que los jugadores actúan durante el juego.

Los perfiles de estrategias de un juego de forma normal, que cumplan el concepto de Equilibrio de Nash son los más convenientes de aplicar; en los juegos no cooperativos el Equilibrio de Nash viene a fortalecer la cooperación entre los jugadores, en el sentido que encuentra aquellos perfiles de estrategia, que los jugadores estén dispuestos a aplicarlos.

Para computarizar el Equilibrio de Nash se deben determinar los siguientes aspectos:

- El número de jugadores.
- El número de estrategias de los jugadores.
- El número de perfiles del juego.
- La rentabilidad de cada jugador por cada perfil de estrategia del juego.

Una vez teniendo los aspectos anteriores, se debe analizar cada perfil del juego a fin de ir descartando los perfiles, donde alguna desviaciones en las estrategias de cualquier jugador, éstos obtenga mayor beneficio por la desviación que por el perfil que se está analizando.

En la Tabla 4.5 se muestra el algoritmo básico para encontrar los perfiles de estrategias que sean Equilibrio de Nash en un juego de forma normal de *n* jugadores.

Algoritmo:

Paso 1: Proporcionar el número de jugadores, número de estrategias, el número de perfiles, la rentabilidad de cada jugador por cada perfil del juego (Matriz de rentabilidad de cada jugador).

Paso 2: Para cada perfil, se realizan las desviaciones en las estrategias de cada jugador, si alguna desviación es mejor que la estrategia que se está analizando, la estrategia es descartada.

Paso 3: Los perfiles que no hayan sido descartado, son aquellos que cumplen el Equilibrio de Nash, se muestran como las mejores opciones de actuación

Tabla 4.5 Algoritmo de Equilibrio de Nash

El algoritmo anterior obtiene los perfiles de estrategias que cumplen el concepto de Equilibrio de Nash de algún juego de forma normal. Estos perfiles pueden ser utilizados como forma de actuar por los jugadores dentro del juego, ya que son perfiles idóneos, es decir, los jugadores están dispuestos a aplicar esas estrategias debido a que son la mejor respuesta a las estrategias de los demás jugadores.

Una explicación más detallada de cómo computarizar el Equilibrio de Nash en juegos de forma normal para *n* jugadores es la siguiente. Los parámetros previamente indicados (el número de jugadores, el número de estrategias, el número de perfiles, la rentabilidad de cada jugador por cada perfil del juego) sirven como las bases para realizar el análisis de los perfiles de estrategias del juego. Teniendo los perfiles de estrategia del juego se debe realizar todas las desviaciones que cada jugador pudiera realizar, fijado un perfil a analizar.

Un perfil de estrategias es un conjunto de estrategias en donde cada jugador aporta una estrategia para formar tal perfil. En un juego de forma normal para *n* jugadores existen varios perfiles pero no todos cumplen con el concepto de Equilibrio de Nash.

Para realizar el análisis de perfiles, se fija un perfil de estrategias y para cada jugador se realizan las desviaciones correspondientes; seleccionando cada una de sus estrategias fijando las estrategias de los demás jugadores y si se encuentra que en alguna de las desviaciones, la rentabilidad que se obtiene es mejor para algún jugador, el perfil analizado es descartado, por ser un perfil dominado. A continuación en la Figura 4.4 se muestra un esquema de cómo realizar las desviaciones para el jugador *i* dado un perfil de estrategias, cabe de mencionar, que las desviaciones deben realizarse para los *n* jugadores.

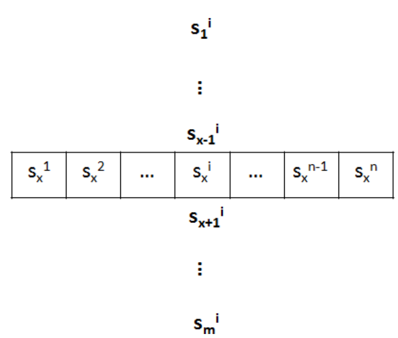

Figura 4.4 Desviaciones en las estrategias del jugador *i*

En un juego de forma normal para *n* jugadores, puede existir un conjunto de perfiles de Equilibrio de Nash. Estos perfiles son aquellos en que las desviaciones que realizan los jugadores, la rentabilidad que obtienen son menores o iguales, es decir, en esos perfiles los jugadores obtiene el mejor beneficio.

Capítulo 5

Matrices de rentabilidad

En este capítulo se introducen un análisis para la construcción de las matrices de rentabilidad. El principal objetivo de las matrices de rentabilidad es conocer el valor de ganancia que el jugador va a obtener, dependiendo del perfil de estrategia a analizar.

5.1. Análisis cuantitativo de estrategias

Existen estudios acerca de cuáles son las estrategias más adecuadas de aplicar dependiendo de algunos factores en el juego [30] [31]. Nuestro trabajo propone cuatro factores importantes que son: **las entradas del partido**, **la situación en el marcador**, **el número de *outs*** y **la posición en base**. De allí que se proponen diferentes matrices de rentabilidad con respecto a los factores mencionados. En la Figura 5.1 se muestran los cuatros factores importantes para el desarrollo de las matrices de rentabilidad en el juego de béisbol.

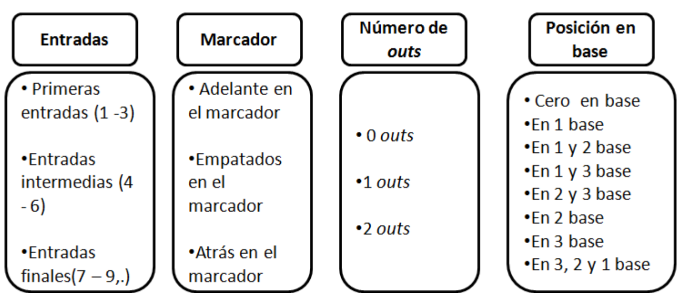

Figura 5.1 Factores importantes en el béisbol

5.2. Construcción de las matrices

Con base en la recolección de información se realizaron 216 archivos de configuración, en donde cada uno puede tener de uno hasta cuatro matrices de rentabilidad, esto es debido a que se analizan los cuatro factores importantes en el juego de béisbol. Algunas matrices de rentabilidad de ejemplo se muestran en: Tabla 5.1, Tabla 5.2 y Tabla 5.3 en diferentes circunstancias del partido. La representación de las matrices, para encontrar el Equilibrio de Nash se especifica en el punto 5.3.

	1	2	3	
Hit and run	0	1	1	
Hit	3	4	4	
Home run	2	3	3	
Doblete	3	3	4	
Fly de Sacrificio	0	1	1	
Toque de bola	0	1	1	
Robo de base	0	0	0	
Wait to bater	0	0	0	
Adelante – Primeras -0 outs 0 en base				

Tabla 5.1 Matriz de rentabilidad 1

	4	5	6	
Hit and run	1	1	2	
Hit	2	2	3	
Home run	1	1	2	
Doblete	1	1	2	
Fly de Sacrificio	2	2	3	
Toque de bola	1	1	2	
Robo de base	1	1	1	
Wait to bater	2	2	2	
Adelante – intermedias -0 outs Hombre en 3 y 2				

Tabla 5.2 Matriz de rentabilidad 2

	4	5	6	
Hit and run	1	1	1	
Hit	2	2	2	
Home run	1	1	1	
Doblete	1	1	1	
Fly de Sacrificio	2	2	2	
Toque de bola	1	1	1	
Robo de base	1	1	1	
Wait to bater	2	2	2	
Atrás – intermedias -0 outs Hombre 3 y 1				

Tabla 5.3 Matriz de rentabilidad 3

Dependiendo de las estrategias más adecuadas a aplicarse en ciertos momentos del partido, las matrices de rentabilidad tendrán diferentes valores de beneficio; es decir, puesto que existen estrategias diferentes, el valor de rentabilidad cambia según la estrategia elegida.

5.3. Perfiles de juego

La representación de las matrices de rentabilidad está dada mediante los perfiles de juego, es decir, para un juego donde existan dos jugadores con tres estrategias cada uno, el conjunto de perfiles se darán de la siguiente manera. En la Figura 5.2 se muestra cómo obtener el conjunto de perfiles, en un juego de dos jugadores con tres estrategias por cada jugador.

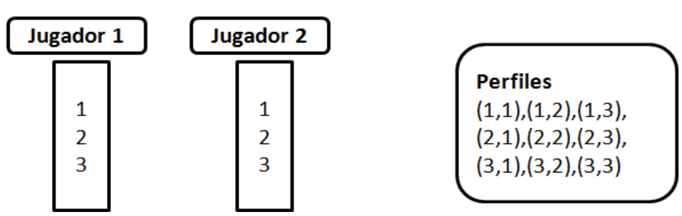

Figura 5.2 Perfiles para dos jugadores

El juego de béisbol se caracteriza porque el número de jugadores cambia conforme a la situación del partido, es decir, en diferentes momentos del juego habrá un número de jugadores que estén directamente involucrados.

La matriz de rentabilidad para n jugadores se representa de la siguiente manera: sea la matriz de rentabilidad M^i del jugador i, la entrada de la matriz es el conjunto de perfiles que el juego pueda tener asociado a cada perfil el valor de rentabilidad. $((s^1, ..., s^i, ... s^n), r_z)$, donde:

- $s^1, ..., s^i, ... s^n$ es un perfil del juego y
- r_z es el valor de rentabilidad asociado a ese perfil.

A continuación, se ejemplifica mediante un juego de dos jugadores y cada uno cuenta con tres estrategias. En la Figura 5.3 se muestra la representación de una matriz de rentabilidad para algún jugador, donde se relaciona cada perfil de estrategia con un valor de rentabilidad. Cabe mencionar que se debe tener una matriz de rentabilidad por cada jugador.

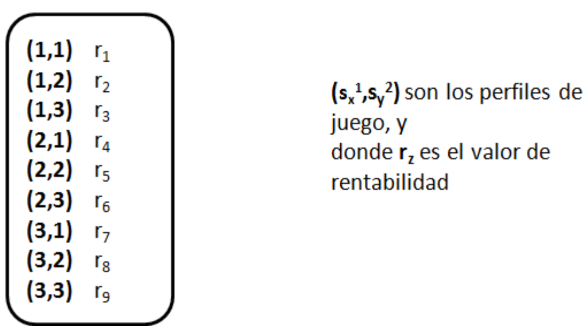

Figura 5.3 Representación de matriz de rentabilidad

Capítulo 6

Pruebas y análisis de resultados

En este capítulo se describen las diferentes pruebas realizadas y el análisis de los resultados obtenidos, usando jugadas de sacrificio como estrategias ganadoras y la incorporación del Equilibrio de Nash como mecanismo para el análisis estratégico.

6.1. Resultados de aplicar jugadas de sacrificio

Los resultados y observaciones de aplicar las jugadas de sacrificio se muestran a continuación, dividido en las secciones de momentos y circunstancias en donde fueron aplicadas estas jugadas.

Siempre usando jugadas de sacrificio:

Cuando el equipo siempre utiliza las jugadas de sacrificio, esto no mostró una clara distinción del porque el equipo pierde o gana el partido, es decir, es difícil determinar las razones y conclusiones del porque ocurre esto cuando en todo momento se aplican estas jugadas.

El equipo va ganando escasamente:

- En las entradas iníciales (1 a la 3) al aplicar las jugadas de sacrificio en estas condiciones del partido, se obtuvo que las ganancias fueron pocas, no siendo un factor significativo para ganar el partido.
- En las entradas intermedias (4 a la 6) al aplicar las jugadas de sacrificio bajo estas circunstancias, no se obtuvieron ganancias notables, pero en general se pueden utilizar para ir conservando la diferencia en el marcador.
- En las entradas finales (7 a la 9 o más) se observó un buen comportamiento al aplicar las jugadas de sacrificio asegurando la ventaja en el marcador, ganando el partido.

El equipo va ganando ampliamente:

- En las entradas iniciales (1 a la 3) en este caso los resultados no fueron buenos, puesto que la ventaja obtenida se fue perdiendo muy rápidamente utilizando solamente jugadas de sacrificio como estrategia al inicio del encuentro.
- En las entradas intermedias (4 a la 6) en estas circunstancias, las jugadas de sacrificio no influyeron tanto en el partido, aunque no es muy recomendable utilizarlas, cuando se está ganando ampliamente, debido a que la diferencia en marcador se va reduciendo.
- En las entradas finales (7 a la 9 o más) en este caso se observó un buen comportamiento, al utilizar jugadas de sacrificio para asegurar la ventaja en las últimas entradas.

El equipo va perdiendo escasamente:

- En las entradas iniciales (1 a la 3) al utilizar jugadas de sacrificio en estas condiciones generó lo siguiente:
    1. Que la diferencia en el marcador disminuya o logre rebasarlo.
    2. Todo lo contrario del primer punto, que el marcador del equipo contrario aumente y en consecuencia ir perdiendo con un margen más amplio.
- En las entradas intermedias (4 a la 6) en este caso se obtuvo poca ganancia, sin embargo pueden ser utilizadas para ir acortando las diferencia en el marcado pensando en las entradas finales. Pero es mejor buscar otras opciones de jugadas que beneficien más al equipo.

- En las entradas finales (7 a la 9 o más) en estas circunstancias, se observó un buen comportamiento al aplicar las jugadas de sacrificio, haciendo en muchas ocasiones llegar a empatar el juego o ganar.

El equipo va perdiendo ampliamente:

- En las entradas iniciales (1 a la 3) bajo estas circunstancias se obtuvieron malos resultados, las ganancias obtenidas por estas jugadas no repercuten de manera significativa en el marcador.
- En las entradas intermedias (4 a la 6) en estas circunstancias se observó que con estas jugadas no se obtienen ganancias significativas para ir disminuyendo las diferencias en el marcador.
- En las entradas finales (7 a la 9 o más) en este caso, se observó, un mal comportamiento: la diferencia se reduce pero no considerablemente y se pierde con márgen amplio.

En la Tabla 6.1 se muestran de manera numérica los resultados obtenidos de aplicar las jugadas de sacrifico en los momentos descritos con anterioridad, con 100 corridas de ejemplo para cada caso.

Entradas	**Ganando por poca diferencia**	**Ganando por diferencia amplia**	**Perdiendo por poca diferencia**	**Perdiendo por diferencia amplia**
	Gan./Jugados	Gan./Jugados	Gan./Jugados	Gan./Jugados
1-3	58/100	70/100	56/100	28/100
4-6	67/100	65/100	61/100	31/100
7-9,…	86/100	89/100	81/100	38/100

Tabla 6.1 Tabla de resultados

De los resultados de la Tabla 6.1, acerca de aplicar las jugadas de sacrificio se identifico las mejores circunstancias y momentos, los cuales se muestran a continuación: **Cuando el equipo se encuentra en las ultimas entradas** y **la diferencias entre el marcador es poca**; esto asegura que:

- El equipo que está ganando, mantenga y consiga la victoria.
- Y si el equipo está perdiendo, pueda conseguir el mejor resultado posible, es decir, consiga la victoria o reduzca la diferencia en el marcador.

De las conclusiones, se destaca la necesidad de encontrar una forma de determinar, cuáles son las estrategias más adecuadas para ser aplicadas al juego de béisbol, tomando en cuenta el número de jugadores que interviene, así como el conjunto de estrategias que ellos puedan aportar, encontrando estrategias en conjunto que permitan alcanzar el mayor beneficio.

6.2. Equilibrio de Nash aplicado a las estrategias del béisbol

En esta sección se muestran los resultados de incorporar el Equilibrio de Nash al simulador, para encontrar las mejores estrategias de béisbol, dependiendo de los factores mencionados en el Capitulo 5. El análisis es el siguiente:

- Treinta corridas en donde ningún equipo utiliza el Equilibrio de Nash.
- Treinta corridas en donde el equipo 1 usa el Equilibrio de Nash y el equipo 2 no, separando en dos tablas en donde cada equipo resulta el ganador respectivamente.
- Treinta corridas en donde ambos equipos utiliza el Equilibrio de Nash.

En la Tabla 6.2 se muestran las corridas correspondientes en donde ningún equipo usa el Equilibrio de Nash, dando como resultado que no hay diferencia entre los equipos, es decir, ambos equipos gana casi la misma cantidad de partidos. En la Figura 6.1 se muestran la grafica de resultados correspondientes en donde los equipos no utilizan el Equilibrio de Nash.

#	**Marcador**	**Entrada**	**Costo de carrera T1 - Costo de carrera T2**		**Ganador**
1	2 - 1	9	11.1	10.45	Equipo 1
2	2 - 7	9	6.08	6.59	Equipo 2
3	6 - 5	9	6.37	8.98	Equipo 1
4	3 - 4	11	6.66	7.98	Equipo 2
5	1 - 10	9	2.58	6.79	Equipo 2
6	0 - 6	9	0	7.68	Equipo 2
7	2 - 4	9	18.83	3.95	Equipo 2
8	11 -0	9	5.26	0	Equipo 1
9	4 - 2	9	12.52	8.49	Equipo 1
10	7 - 3	9	7.98	8.53	Equipo 1
11	11 - 1	9	6.83	9.29	Equipo 1
12	2 - 1	9	9.56	2.08	Equipo 1
13	2 - 4	9	17.16	7.13	Equipo 2
14	1 - 3	9	6.66	4.49	Equipo 2
15	5 - 4	9	7.02	14.36	Equipo 1
16	4 - 2	9	8.81	5.62	Equipo 1
17	4 - 5	9	11.70	6.09	Equipo 2
18	9 - 2	9	7.13	7.24	Equipo 1
19	0 - 6	9	0	7.77	Equipo 2
20	1 - 2	9	8.04	14.01	Equipo 2
21	3 - 12	9	9.42	7.29	Equipo 2
22	5 - 6	9	5.19	5.90	Equipo 2
23	1 - 7	9	10.12	4.96	Equipo 2
24	4 - 3	9	10.87	5.49	Equipo 1
25	2 - 1	9	8.24	2.08	Equipo 1
26	3 - 2	9	17.59	9.14	Equipo 1
27	1 - 5	9	2.58	5.70	Equipo 2
28	1 - 8	9	17.62	6.09	Equipo 2
29	2 - 3	9	7.99	9.69	Equipo 2
30	5 - 0	9	8.05	0	Equipo 1

Tabla 6.2 Treinta corridas en donde ningún equipo utiliza el EN

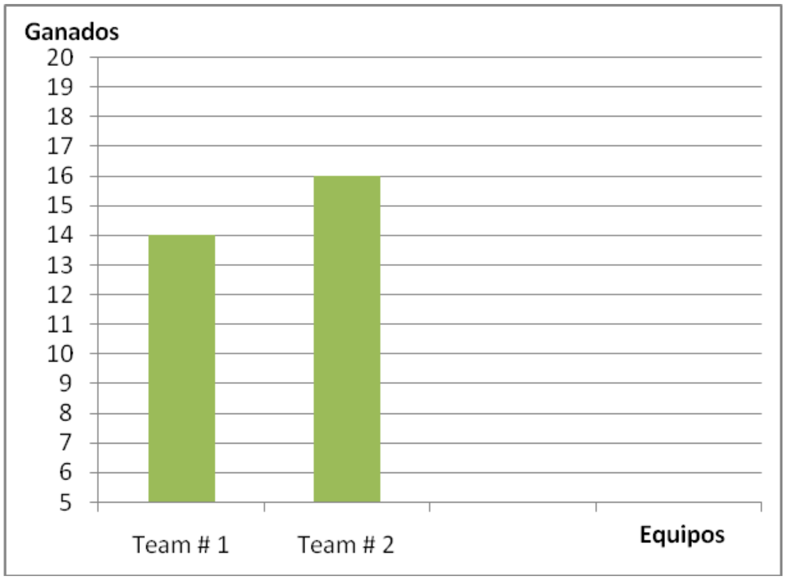

Figura 6.1 Resultados de las treinta corridas

Los resultados que se muestran a continuación son los correspondientes cuando el equipo 1 utiliza el Equilibrio de Nash en sus estrategias y el equipo 2 no lo utiliza. En la Tabla 6.3 se muestran las corridas correspondientes cuando equipo 1 es el ganador, usando el Equilibrio de Nash. En la Tabla 6.4 se muestran las corridas en donde el equipo 2 es el ganador y no utiliza el Equilibrio de Nash. El resultado de aplicar el Equilibrio de Nash es muy significativo, es decir, el equipo 1 gana veintiséis veces y el equipo 2 solo gana cuatro veces. En la Figura 6.2 se muestran la grafica de resultados en donde un equipo utiliza el Equilibrio de Nash y el otro no.

#	Marcador	Entrada	Costo de carrera T1 - Costo de carrera T2		Ganador
1	14 - 8	9	7.81	4.75	Equipo 1
3	8 - 5	9	8.73	5.23	Equipo 1
4	12 - 5	9	7.75	4.25	Equipo 1
5	8 - 6	9	7.48	8.9	Equipo 1
6	15 - 1	9	8.19	9.70	Equipo 1
7	13 - 3	9	7.01	6.43	Equipo 1
8	5 - 3	9	13.76	7.71	Equipo 1
9	12 - 4	9	8.43	6.23	Equipo 1
10	4 - 3	9	5.91	8.87	Equipo 1
11	5 - 3	9	5.06	9.06	Equipo 1
13	7 - 4	9	8.31	10.56	Equipo 1
14	11 - 2	9	10.05	5.68	Equipo 1

15	7 - 1	9	8.10	15.95	Equipo 1
16	13 - 0	9	6.56	0	Equipo 1
18	11 - 5	9	8.15	6.84	Equipo 1
19	8 - 2	9	2.89	11.47	Equipo 1
20	14 - 5	9	6.54	9.31	Equipo 1
21	7 - 1	9	8.31	8.54	Equipo 1
22	8 - 3	9	7.12	8.08	Equipo 1
23	15 - 2	9	8.91	3.85	Equipo 1
24	7 - 3	9	7.32	8.47	Equipo 1
25	10 - 2	9	7.87	6.79	Equipo 1
27	10 - 4	9	5.73	12.98	Equipo 1
28	8 - 3	9	6.01	6.74	Equipo 1
29	9 - 4	9	5.94	6.3	Equipo 1
30	9 - 6	9	7.77	4.61	Equipo 1

Tabla 6.3 Corridas donde el equipo 1 es el ganador

#	**Marcador**	**Entrada**	**Costo de carrera T1 - Costo de carrera T2**		**Ganador**
2	4 - 6	9	8.73	5.23	Equipo 2
12	3 - 4	10	7.46	3.96	Equipo 2
17	5 - 6	9	11.83	7.92	Equipo 2
26	7 - 8	9	8.26	8.43	Equipo 2

Tabla 6.4 Corridas donde el equipo 2 es el ganador

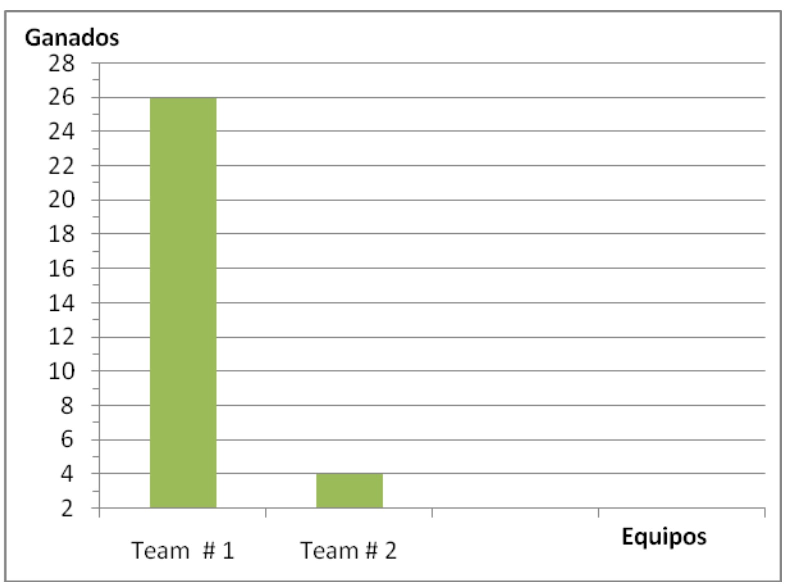

Figura 6.2 Resultados cuando un equipo utiliza el EN y el otro no

En la Tabla 6.5 se muestran el resultado correspondiente a treinta corridas en donde ambos equipos usan el Equilibrio de Nash en sus estrategias. Teniendo como resultados que ambos equipos ganan la misma cantidad de encuentros, es decir, al aplicar el Equilibrio de Nash ambos identifican las mejores estrategias colectivas. En la Figura 6.3 se muestran la grafica de resultados de las treinta corridas en donde ambos equipos utilizan el Equilibrio de Nash.

#	Marcador	Entrada	Costo de carrera T1 - Costo de carrera T2		Ganador
1	8 - 13	9	7.41	4.58	Equipo 2
2	15 - 8	9	7.6	10.02	Equipo 1
3	9 - 7	9	6.87	5.73	Equipo1
4	10 - 11	9	5.22	8.39	Equipo 2
5	6 - 9	9	7.53	6.16	Equipo 2
6	8 - 6	9	7.8	4.94	Equipo 1
7	9 - 10	10	6.33	8.84	Equipo 1
8	7 - 5	9	7.59	6.05	Equipo 1
9	4 - 3	9	4.75	12.69	Equipo 1
10	1 - 3	9	7.43	13.74	Equipo 2
11	2 - 3	9	11.1	7.47	Equipo 2
12	9 - 8	9	8.24	6.47	Equipo 1
13	1 - 8	9	7.20	6.29	Equipo 2
14	3 - 9	9	3.8	7.15	Equipo 2
15	4 - 5	9	10.52	6.62	Equipo 2
16	8 - 4	9	4.40	5.76	Equipo 1
17	9 - 2	9	12.59	4.96	Equipo 1
18	11 -5	9	6.82	13.30	Equipo 1
19	7 - 14	9	7.46	7.65	Equipo 2
20	5 - 12	9	8.28	5.23	Equipo 2
21	5 - 8	9	7.39	5.77	Equipo 2
22	12 -13	9	6.92	4.62	Equipo 2
23	12 - 6	9	6.42	7.79	Equipo 1
24	3 - 2	9	14.78	7.6	Equipo 1
25	5 - 7	9	11.22	10.69	Equipo 2
26	9 - 10	9	5.55	7.60	Equipo 2
27	19 - 5	9	6.13	8.73	Equipo 1
28	11 - 9	9	6.34	6.89	Equipo 1
29	15 - 10	9	6.26	4.9	Equipo 1
30	6 - 11	9	7.44	6.38	Equipo 2

Tabla 6.5 Ambos equipos utilizan el EN

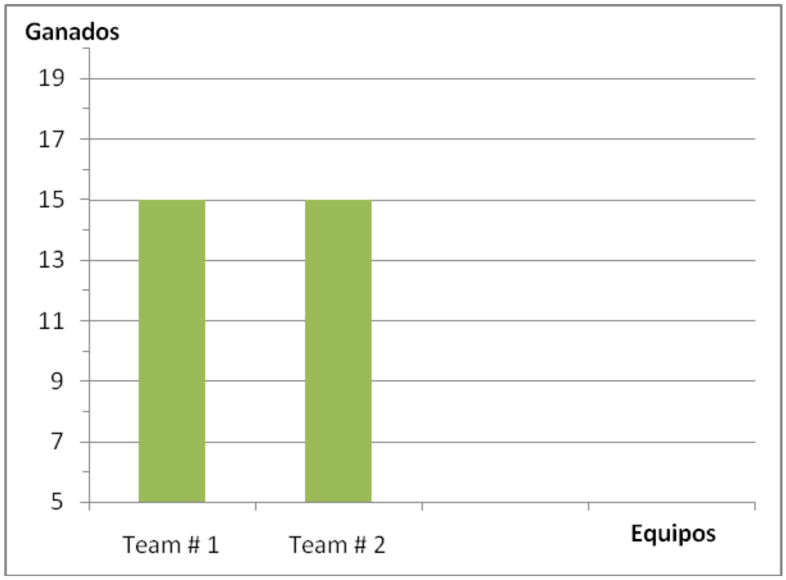

Figura 6.3 Resultados en donde ambos equipos utiliza el EN

Capítulo 7

Discusión de resultados y trabajos relacionados

En este capítulo se realiza una discusión de los resultados de utilizar las jugadas de sacrificio como estrategias ganadoras y el uso del Equilibrio de Nash para encontrar las mejores estrategias de manera colectiva que permitan obtener el mejor beneficio para el equipo.

7.1. Explicaciones y comentarios de las simulaciones

- Se recomienda aplicar las jugadas de sacrificio como estrategias en ciertos momentos y circunstancias del encuentro; se identificó cuales son esos momentos y circunstancias en donde las jugadas de sacrificio son la mejores estrategias para ser aplicadas y son cuando el equipo se encuentra en las últimas entradas y la diferencia en el marcador es poca, como Todd William dice en su análisis de las estrategias del béisbol [30] y en los resultados obtenidos por George R. Lindey [31] en su estudio estadístico de las estrategias del béisbol.
- Cuando ningún equipo utiliza el Equilibrio de Nash, no hay una diferencia clara entre ambos, es decir, ambos aplican estrategias pero sin realizar un análisis estratégico exhaustivo para identificar las estrategias más convenientes.
- Cuando el equipo 1 utiliza el Equilibrio de Nash y el equipo 2 no. Existe una clara diferencias entre los equipos. Cuando el equipo realiza un análisis estratégico a través del Equilibrio de Nash encuentra las mejores estrategias colectivas para aplicarlas y ganar el encuentro. Los resultados mostraron una gran diferencia a favor del equipo que utiliza el análisis de Equilibrio de Nash en sus estrategias.

- Cuando ambos equipos utilizan el Equilibrio de Nash, ellos encuentran las estrategias más apropiadas de aplicar. Los resultados muestran que ambos equipos obtienen la misma cantidad de victorias.

7.2. Análisis de costo de carreras usando el Equilibrio de Nash

Al aplicar el Equilibrio de Nash, se quiere encontrar las mejores estrategias colectivas que brinden la oportunidad de ganar el encuentro, cada carrera tiene un costo, el cual es la suma de las jugadas que se realizan para obtener dicha carrera. Las carreras que se obtuvieron a través del Equilibrio de Nash tiene un costo normal, es decir, las carreras obtenidas aplicando el Equilibrio de Nash tienen costos similares a las otras carreras donde no se aplica éste.

7.3. Trabajos relacionados

En el trabajo de R. J. Lipton et al. [32] prueban la existencia de ε-Equilibrio de Nash en las estrategias con soporte logarítmico en el número de las estrategias puras. A su vez muestran que los beneficios de todos los jugadores en cualquier Equilibrio de Nash puede ser ε-aproximado por la rentabilidad de los jugadores como los del ε-Equilibrio de Nash. En su trabajo, ellos consideran un juego de dos personas G, donde por simplicidad el número de estrategias para cada jugador es n. Ellos llaman a los dos jugadores como el jugador renglón, jugador columna y denotan sus matrices de rentabilidad como R, C respectivamente. Una estrategia mixta para un jugador es la distribución de probabilidad sobre el conjunto de sus estrategias y se representan a través del vector $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, donde $x_i \geq 0$ y $\sum x_i = 1$. Definen que:

Un par de estrategias x^*, y^* es un punto de Equilibrio de Nash si:

i. Para toda estrategia x del jugador renglón, $(x, Ry^*) \leq (x^*, Ry^*)$ y

ii. Para toda estrategia y del jugador columna, $(x^*, Cy^*) \leq (x^*, Cy^*)$.

Similarmente se puede definir el ε-Equilibrio, para todo ε > 0, un par de estrategias mixtas x', y' son llamadas un ε-Equilibrio de Nash si:

i. Para toda estrategia x del jugador renglón, $(x, Ry') \leq (x^*, Ry') + \varepsilon$ y

ii. Para toda estrategia y del jugador columna, $(x, Cy') \leq (x^*, Cy') + \varepsilon$.

Definen un teorema que para cualquier Equilibrio de Nash x^*, y^* y para cualquier ε > 0, existe, para $k \geq \frac{12 \ln n}{\varepsilon^2}$, un par de k-Estrategias uniformes x', y', tal que:

1. x', y' es un ε-Equilibrio.
2. $|(x', Ry') \leq (x^*, Ry^*)| < \varepsilon$.
3. $|(x', Cy') \leq (x^*, Cy^*)| < \varepsilon$.

La prueba está basada en un método de probabilidad. Dado un ε > 0, se fija $k \geq 12 \ln n/\varepsilon^2$. Forman un multi-conjunto A por un muestreo de k veces del conjunto de estrategias puras del jugador renglón, independientemente de forma aleatoria conforme a la distribución de x^*. Similarmente forma un multi-conjunto B por el muestreo de k veces de las estrategias puras del jugador columna independientemente de forma aleatoria conforme a la distribución de y^*.

En el trabajo de C. H. Papadimitriou et al. [33] realizan un estudio sistemático de algoritmos que involucran la búsqueda de equilibrios en juegos de múltiples jugadores. Desarrollaron un marco general para obtener algoritmos en tiempo polinómico para optimizar equilibrios correlacionados y muestran cómo puede ser aplicado a juegos simétricos, juegos gráficos y juegos congestionados. En su trabajo definen el equilibrio correlacionado, sea $G = (\{S_i\}, \{u_i\})$ sean un juego de n personas. Sea q la probabilidad de la distribución en $S_i \times^{\cdots} \times S_n$. La distribución q es un equilibrio correlacionado si para cada jugador i y cada par de estrategias l, l' en S_i,

$$\sum_{s:s_i=l} q(s)u_i(s) \geq \sum_{s:s_i=l} q(s)u_i(s')$$

Ecuación 7.1 Equilibrio correlacionado

Donde s' es obtenida de s por reasignación de i's estrategias para hacer l'. Una interpretación de un equilibrio correlacionado es el siguiente: una autoridad confiable selecciona un perfil de estrategias s de forma aleatoria conforme a q y recomienda la estrategia s_i a cada jugador i. Cada jugador i asume solo conocer su estrategia recomendada y no las de los demás. El jugador i después compara la rentabilidad esperada de sus estrategias, asumiendo que los demás jugadores seguirán las estrategias recomendadas. De la Ecuación 7.1 la esperanza condicionada debería ser maximizada por las estrategias recomendadas. Si esto se cumple para todos los jugadores, entonces ningún jugador tiene la iniciativa de desviarse de las recomendaciones de una autoridad confiable.

S. Hérmon et al. [34] consideran juegos con $r \geq$ jugadores y un estudio de aproximar el Equilibrio de Nash en el sentido multiplicativo y aditivo, donde el número de estrategias puras de los jugadores es n. Se establece un límite inferior $\sqrt[r-1]{\frac{\ln n - 2\ln\ln n - \ln r}{\ln r}}$ en el tamaño de los perfiles de estrategias los cuales obtienen una ε-Aproximación, para $\varepsilon < \frac{r-1}{r}$ en el caso aditivo, y $\varepsilon < r$ -1 en el caso multiplicativo. Proponen los siguientes teoremas:

Para $r \in o(n)$ existe un juego de r-jugadores tal que ningún estrategia mixta x con tamaño (x) < $\sqrt[r-1]{\frac{\ln n - 2\ln\ln n - \ln r}{\ln r}}$ pueda a ser un equilibrio ε-aproximado aditivo para $\varepsilon < \frac{r-1}{r}$ o un equilibrio ε-aproximado multiplicativo para $\varepsilon < r$ -1.

Dado un algoritmo A que calcula en tiempo $q(r, n)$ un equilibrio ε-aproximando aditivo para juegos de r jugadores, existe un algoritmo A' que calcula en tiempo $q(r, n) + O(n^{r+1})$ un equilibrio $\frac{1}{2-\varepsilon}$-aproximado para juegos de (r +*1*) jugadores. Más aun, en el algoritmo A' el soporte de último jugador es de tamaño a lo más de 2 y el tamaño de soporte de los r-jugadores son respectivamente los mismo como el algoritmo A.

Nuestro estudio para el análisis y desarrollo del algoritmo de Equilibrio de Nash presenta la complejidad que es mencionada en los estudios [32] [33] [34] donde se menciona que aun si se encuentran los perfiles de estrategias que cumplan el concepto de Equilibrio de Nash eficientemente, serían muy complicados de implementar. El algoritmo que presentamos, analiza el conjunto de perfiles del juego y realiza las desviaciones correspondientes a dichos perfiles, a fin de descartar los perfiles que sean dominados para obtener el conjunto de perfiles que cumplan el concepto de Equilibrio de Nash. En su complejidad computacional sería en su peor caso de manera k^n donde k es el número de estrategias y n es el número de jugadores.

Con el análisis que realizamos en el Capítulo 4, somos capaces de encontrar los perfiles de estrategias que sean de Equilibrio de Nash de manera eficiente, es decir, sin que repercuta de manera negativa en nuestro estudio de análisis de estrategias para el juego de béisbol. Aunque en los trabajos [33] [34] buscan encontrar de manera eficiente una aproximación ε al Equilibrio de Nash, nosotros encontramos el conjunto de perfiles de estrategias que cumplan el Equilibrio de Nash, según el trabajo realizado por J. F. Nash [10] y a través de nuestro tratamiento de las estrategias con las representaciones de las matrices.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis se realizó un análisis para identificar los perfiles de estrategias que cumplen el Equilibrio de Nash en el juego del béisbol y para darle una solución se desarrollaron los siguientes puntos:

- Una gramática libre de contexto y un autómata para el béisbol; se mostró todo el análisis y diseño para la construcción del simulador de béisbol, el cual fue modelado a través de una gramática libre de contexto, que permite generar el lenguaje que describe el juego de béisbol y el autómata correspondiente que identifica las cadenas de dicho lenguaje.
- Un generador de jugadas del béisbol, el cual genera cadenas que representan todo un partido béisbol y crea las jugadas con base en su frecuencia de ocurrencia de éstas.
- Las incorporaciones de las jugadas de sacrificio como estrategias ganadoras; al ser incorporadas estas estrategias al simulador permitieron, identificar las situaciones más apropiadas para ser aplicadas.
- La implementación del algoritmo para el Equilibrio de Nash; se mostró el análisis y desarrollo del algoritmo básico para encontrar el conjunto de perfiles que cumplan el Equilibrio de Nash.
- La incorporación del Equilibrio de Nash al simulador de béisbol, para realizar el análisis de perfiles de estrategias a través del Equilibrio de Nash y así, encontrar las mejores estrategias colectivas para ser aplicadas.

- La formalización de las matrices de rentabilidad, las cuales facilitan realizar el análisis cuantitativo de las estrategias del béisbol, incorporando los parámetros siguientes: **entradas**, **marcadores**, **número de *outs*** y **posición en base.** Los perfiles de estrategia del juego y su valor de rentabilidad se incluyen en matrices, para cada uno de los *n* jugadores.
- La inclusión de la posición de los jugadores en el análisis es algo nuevo: de hecho, no se había realizado un estudio de manera cualitativa previamente.
- En particular, utilizado las matrices de rentabilidad se logra el análisis cuantitativo de estudios cualitativos previos [30] [31].

Los resultados obtenidos de las simulaciones son muy similares a los de la vida real, es decir los marcadores obtenidos son como los que se observan en juegos de la vida real; el número de entradas no rebasan el número típico de algún encuentro entre humanos. Se identificaron los momentos y circunstancias adecuadas para aplicar las jugadas de sacrificio; en la vida real este tipo de jugadas son usadas en las mismas condiciones que se dedujeron a través de las simulaciones realizadas.

Al aplicar el Equilibrio de Nash para encontrar las mejores estrategias colectivas se obtiene resultados, tales que el equipo que utiliza el Equilibrio de Nash de manera significativa gana más juegos, comparadas con el equipo que no lo utiliza; el análisis de perfiles de estrategias a través del Equilibrio de Nash permite determinar las estrategias más convenientes de ser aplicadas, con el objetivo de ganar el partido al identificar las mejores estrategias colectivas para fortalecer al equipo.

El desarrollo inicial y los resultados preliminares de esta tesis se presentarán en: *The 21st International Conference on Game Theory at Stony Brook University* [38]; el desarrollo completo, los resultados aplicando Equilibrio de Nash para la elección de estrategias y su aplicación a nivel de simulación se han reportado en un artículo actualmente en revisión en el *Journal Decision Support System* [39].

Trabajo futuro

Las líneas de trabajo a futuro identificadas son las siguientes:

- Realizar un análisis de complejidad más profundo de los algoritmos presentados.
- Un desarrollo matemático destacando las partes importantes del simulador de béisbol, así como el del análisis de perfiles de estrategias.
- Realizar extrapolaciones de resultados que se obtuvieron de aplicar el Equilibrio de Nash al juego de béisbol a otros ámbitos, para realizar análisis y obtener conclusiones del comportamiento del Equilibrio de Nash, en áreas como Economía y Sociología. El Equilibrio de Nash es aplicable al análisis de comportamientos donde intervienen varios actores. En economía: buscando equilibrios óptimos en las estrategias de las organización, para la obtención de bienes y servicios que beneficien, de manera equilibrada, a los individuos o a las entidades participantes en las actividades económicas; en la sociología: estudiando las diversas estrategias de las organizaciones para moderar el comportamiento de las personas en su entorno social.

Bibliografía

[1] F. Vega. *Economía y Juegos*, Antoni Bosh, 2000.

[2] R. Gibbons. *Un primer curso de teoría de juegos*. Antoni Bosh, 2003.

[3] J. Pérez, J. L. Jimeno, and E. Cerdá. *Teoría de Juegos*, Pearson, 2003.

[4] La enciclopedia libre Wikipedia. *Equilibrio de Nash*. http://es.wikipedia.org/wiki/Equilibrio_de_Nash.

[5] M. L. Littman and P. Stone. A Polynomial time Nash Equilibrium Algorithm for Repeated Games. *Decision Support System*, 39**:**55-66, 2005.

[6] D. P. Foster and P. Young. Learning, hypothesis testing, and Nash equilibrium. *Games and Economic Behavior*, 45(1):73-96, 2003.

[7] T. Maeda. On characterization of equilibrium strategy of two-person zero-sum games with fuzzy payoffs. *Fuzzy Sets and Systems*, 139(2)**:**283-296, 2003.

[8] H.S. Bierman and L. Fernandéz. *Game Theory with Economic Applications*. Addison Wesley, 1993.

[9] K. Chatterjee, R. Majumdar, and M. Jurdzinski. On Nash Equilibria in Stochastic Games. In *Computer Science Logic*, LNCS 3210, pages 26-40, 2004.

[10] J. F. Nash. Equilibrium points in n-person games. In *Proc. of the National Academy of Sciences of the United States of America*, volumen 36, pages 48–49, 1950.

[11] C. Lemke and J. Howson. Equilibrium points of bimatrix games. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 12(2):413–423, 1964.

[12] C. Lemke. Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. *Management Science*, 11(7)**:**681–689, 1965.

[13] R. McKelvey, A. McLennan, and T. Turocy. Gambit: Software tools for game theory. Available at http://econweb.tamu.edu/gambit/. 2004.

[14] A. Talman, G. Van der Laan, and L. van der Heyden. Simplicial variable dimension algorithms for solving the nonlinear complementarity problem on a product of unit simplices using a general labelling. *Mathematics of Operations Research*, 12(3):377-397, 1987.

[15] D. Koller and B. Milch. Multi-agent influence diagrams for representing and solving games. *Games and Economic Behavior*, 45(1):181-221, 2003.

[16] R. Porter, E. Nudelman, and Y. Shoham. Simple Search Methods for Finding a Nash Equilibrium. *Games and Economic Behavior*, 63(2):642-662, 2004.

[17] La enciclopedia libre Wikipedia. *Béisbol*, 2009, http://es.wikipedia.org/wiki/Béisbol.

[18] Monografías. *EL Bésibol* http://www.monografias.com/trabajos4/beisbol9/beisbol9.shtml.

[19] La enciclopedia libre Wikipedia. Estrategias, 2009, http://es.wikipedia.org/wiki/Estrategia.

[20] H. Mintzberg and J.B. Quinn. *El Proceso Estratégico, conceptos, contexto y casos*. Pearson, 1993.

[21] Monografías. *Estrategias de aprendizaje*, http://www.monografias.com/trabajos19/estrategias-aprendizaje/estrategias-aprendizaje.shtml.

[22] La enciclopedia libre Wikipedia. *Glosario de baseball*, http://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Glosario_de_béisbol

[23] La enciclopedia libre Wikipedia. *Teoría de juegos*, 2009, http://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_juegos

[24] H. Ginits. *Game Theory Evolving*. Princeton University Press, 2000.

[25] M. Osborne and A. Rubinstein. *A Course in Game Theory*. MIT Press, 1994.

[26] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Game and Economic Behavior*. *Princenton*, Princenton University Press, 1947.

[27] A. A. Cournot. Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. Dunod, Paris, 2001.

[28] La enciclopedia libre Wikipedia. *Toma de decisiones*, http://es.wikipedia.org/wiki/Toma_de_decisiones.

[29] R. J. Audley. *Decision making*. British Broadcasting Corporation, 1967.

[30] T. Williams. *Winning Strategies for Offense and Defense*, Baseball's Best, 2005.

[31] G. R. Lindsey. An Investigation of Strategies in Baseball, *Operations Research*, 11(4)**:**477-501, 1963.

[32] R. J. Lipton, E. Markakis, and A. Mehta. Playing large games using simple strategies, In *EC' 03 Proc. 4th ACM Conference on Electronic commerce*, pages 36-41, 2003.

[33] C. H. Papadimitriou and T. Roughgarden. Computing equilibria in multi-player games, In *SODA' 05 Proc. 16th annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 82-91, 2005.

[34] S. Hémon, M. Rougemont, and M. Santha. Approximate Nash Equilibria for Multi-player Games, In *CSL 04*, pages 267-278, 2008.

[35] The free encyclopedia Wikipedia. Strategy (Game Theory), http://en.wikipedia.org/wiki/Strategy_(game_theory).

[36] M. Sipser. Approximate Introduction to Theory of Computation 2da edition, Editorial Course Thechnology , 2005.

[37] Stanford Encyclopedia of Philosophy. Turing Machine, http://plato.stanford.edu/entries/turing-machine/.

[38] M. Alvarado and A. Yee. Baseball sacrifice play strategies: towards the Nash Equilibrium based strategies, In *The 21st International Conference on Game Theory at Stony Brook University*, 2010.

[39] M. Alvarado and A. Yee. Strategies choice in Baseball game by applying the Nash Equilibrium, *Decision Support System*, 2010 (***under review***).

[40] The free encyclopedia Wikipedia. *Porker*, http://en.wikipedia.org/wiki/Poker.

[41] G. Tesauro. Temporal Difference Learning and TD-Gammon. In *Communications of the ACM*, 38(3):58-68, 1995.