CENTRO DE INVESTIGACION Y ESTUDIOS AVANZADOS

DEL

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA

SECCION DE COMPUTACION

"Métodos de Procesamiento de Incertidumbre en Sistemas Expertos"

Tesis que presenta el Lic. en Ciencias de La Informática José Hugo de la Rosa Sánchez para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS en la especialidad de INGENIERIA ELECTRICA. Trabajo dirigido por el Dr. Zdenek Zdráhal Horová.

México D. F., Abril de 1988.

AGRADECIMIENTOS:

Al Dr. Zdenek Zdráhal Horová, por toda la paciencia mostrada y los conocimientos impartidos durante el desarrollo de la presente tesis.

Al Dr. Guillermo Morales Luna y al M. en C. César Galindo Legaria por las observaciones y correciones realizadas en la misma.

A la Seccion de Computación del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

A mis padres, Salud Sánchez y José de la Rosa

A mis Hermanos: Blanca, Sandra, Luis y Guillermo

Y en especial a Mary, mi Esposa.

I N D I C E

CAPITULO I

INTRODUCCION

1.- Antecedentes.

Un sistema experto es un programa sofisticado que pretende resolver un tipo específico de problemas, utilizando para esto varias o cientos de reglas que relacionan varias o cientos de proposiciones. Las reglas representan el conocimiento (base de conocimientos) obtenido del experto humano y las proposiciones metas o preguntas.

La arquitectura de un sistema experto consiste fundamentalmente en una base de conocimientos y una maquina de inferencia (control). La base de conocimientos contiene el conocimiento del experto humano que puede ser representado de diversas formas. La máquina de inferencia (control) tiene un mecanismo que selecciona, interpreta y aplica las reglas de la base de conocimientos, creando una base de hechos o memoria de trabajo, que contiene los datos o información inferida hasta un momento determinado, en la presente tesis nos enfocaremos a sistemas expertos que representan la base de conocimientos con reglas de la siguiente forma:

SI suposición ENTONCES conclusión CON GRADO DE CERTEZA x.

en donde el GRADO DE CERTEZA establece la incertidumbre o el grado de creencia de que la "conclusión" es cierta.

La incertidumbre que se encuentra en las reglas, representa la imprecisión e inexactitud del conocimiento humano existente, tratado en diferentes formas; como valores de verdad (verdadero o falso) utilizados en Lógica, o valores comprendidos entre 0 y 1 en los métodos probabilísticos.

Cuando se trata de combinar la incertidumbre de dos o más reglas, representadas con pesos, se realiza la combinación en operaciones binarias, esto es tomar los pesos de las evidencias en parejas de pesos, en Lógica seria utilizando la función OR, pero en los métodos probabilísticos resulta mas complejo su calculo, debido a la utilización de procedimientos intermedios para calcularlos, esta es por lo tanto una de las funciones principales de los sistemas expertos, derivar pesos globales.

En el presente trabajo, se pretende que las Funciones de Combinación utilizadas por Hajek [85] para propagar incertidumbre como estructuras algebraicas, determinen a las funciones de combinación propias de los sistemas expertos PROSPECTOR y EMYCIN. Asumiendo que el conjunto de pesos coincide o está incluido en el intervalo de [-1,1], 1 significa "Ciertamente Verdadero", -1 significa "Ciertamente Falso", y cero significa "No Se". Enfocandonos a la realización de los siguientes puntos.

A) Verificar matemáticamente las Funciones de Combinación [Hajek 85], programar una máquina de inferencia con las funciones y realizar experimentos con las mismas.

B) Evaluar desde el punto de vista de sensibilidad las funciones de combinación.

2.- Definición del problema y su resolución.

Hajek describió una manera de como manejar la incertidumbre, aspecto explicado brevemente en el Capitulo III. Tomando este trabajo como base, mis objetivos en esta tesis fueron:

A) Mostrar que las funciones uno y dos definidas corresponden a las funciones propias de EMYCIN y PROSPECTOR como lo declara Hajek.

B) Construir un programa basado en el método de Hajek que calcula la incertidumbre global para calcularlo a traves de los isomorfismos de menos infinito a más infinito de Hajek.

C) El método de Hajek, nos lleva a conclusiones en que las operaciones calculadas por las funciones uno a siete son isomorficos, de esto se puede deducir incorrectamente que son equivalentes desde el punto de vista de cálculo de incertidumbre.

Zdráhal propone la sensibilidad como una manera de seleccionar la mejor.

El tercer objetivo fue calcular la sensibilidad, graficarla y hacer una primera selección elemental para eliminar algunas funciones.

Estos experimentos en la sensibilidad forman la tercera parte del trabajo.

CAPITULO II

PROCESAMIENTO DE INCERTIDUMBRE.

1.- MYCIN.

Fue desarrollado en la Universidad de Stanford a mediados de la decada de los setentas. Diseñado para ayudar a los médicos en el diagnostico y tratamiento de la meningitis (infecciones que envuelven la inflamación de las membranas que cubren el cerebro y la espina dorsal) e infecciones de bacteremia (infecciones que involucran bacterias en la sangre).

Mycin fue el primer sistema experto en procesar a nivel de un humano experto y proveer al usuario con una explicacion de su razonamiento.

Utiliza un esquema llamado factores de certeza (CF) para medir la confianza que merece una conclusión, dada una cierta evidencia. El factor de certeza es la diferencia de dos medidas:

$$CF(H,E) = MB(H,E) - MD(H,E)$$

donde CF(H,E) es el grado de certeza de la Hipótesis H dada la evidencia E.

$$MB(H,E) = \begin{cases} \dfrac{\max[P(H|E),P(H)] - P(H)]}{1 - P(H)} & \text{si } P(H) \neq 1 \\ 1 & \text{si } P(H) = 1 \end{cases}$$

y MD(H,E) es el grado de incredibilidad definido por:

$$MD(H,E) = \begin{cases} \dfrac{P(H) - \min[P(H|E),P(H)]}{1 - P(H)} & \text{si } P(H) \neq 0 \\ 1 & \text{si } P(H) = 0 \end{cases}$$

el cual se puede interpretar como el grado de suficiencia de E para ~H, ya que:

MD(H,E) = MB(~H,E)

CF toma valores entre -1 "Ciertamente Verdadero" y +1 "Ciertamente Falso", mientras que MB y MD varian entre 0 y 1.

2.- EMYCIN.

Fue derivado del sistema experto MYCIN. Despues de desarrollarse completamente MYCIN, se decidio remover el conocimiento médico específico de MYCIN. El resultante SHELL (o concha) consistió de una máquina de inferencia con encadenamiento hacia atras, un manejador de consultas y varias ayudas para adquirir conocimiento. Este SHELL, o herramienta, pudo entonces ser combinado con otras bases de conocimiento para crear nuevos sistemas expertos.

Emycin utiliza dos medidas: grado de creencia MB y grado de descreencia MD, ambas variando en [0,1]. El factor de certeza se define como la diferencia MB - MD y varia en [-1,1], no hay pesos apriori, o más bien , los pesos apriori se hacen cero. Las siguientes operaciones se utilizan para combinar dos contribuciones X, Y:

$$\text{combinar}(x,y) = \begin{cases} x + y - xy & \text{si } x,y > 0 \\ x + y + xy & \text{si } x,y < 0 \\ \dfrac{x + y}{1-\min(|x|,|y|)} & \text{si } xy < 0 \end{cases}$$

3.- PROSPECTOR.

Prospector se desarrollo a fines de los setentas, en el Insituto de Investigacion de Stanford (SRI). Diseñado para asistir a geólogos en la investigación de sitios de depósitos de minerales.

En general asocia probabilidades subjetivas a los hechos y caracteriza cada regla mediante un par de valores denominados (LS,LN) que corresponden al grado de suficiencia y grado de necesidad con que el antecedente implica la coclusión de la regla.

Basado en Teorias estadisticas, la información es propagada a traves de un arco que representa la regla de producción.

La probabilidad posterior de H dado E es calculada por la formula de Bayes

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)\ P(H)}{P(E)}$$

en donde E es la evidencia, H es la hipótesis y P(H) es la probabilidad a priori y similarmente

$$P(\bar{H}|E) = \frac{P(E|\bar{H})\ P(\bar{H})}{P(E)}$$

donde $\bar{H}$ es la negación de H.

dividiendo la primera ecuación por la segunda se obtiene:

la siguiente formula nos da los odds de H:

$$O(H|E) = \frac{P(H|E)}{P(\bar{H}|E)} = \frac{P(E|H)}{P(E|\bar{H})} * \frac{P(H)}{P(\bar{H})} = LNS * O(H)$$

Las ventajas a priori "priori odds" de H se definen como:

$$O(H) = \frac{P(H)}{P(\bar{H})}$$

Y las ventajas a posteriori "posteriori odds" como:

$$O(H|E) = \frac{P(H|E)}{P(\bar{H}|E)}$$

La razon de probabilidad de LNS como:

$$LNS = \frac{P(E|H)}{P(E|\bar{H})}$$

Y la formula de ventaja de probabilidad como:

$$O(H|E) = LNS * O(H)$$

Esta ecuación nos dice como actualizar o propagar las ventajas de H dada la observación de la evidencia E.

Si se tiene

$$P(H) = \frac{O(H)}{1 - O(H)}$$

la recomputación es clara.

Si la hipótesis H es soportada por varias evidencias E1, E2, ..., EN, se tiene

$$O(H/E1,E2,...,EN)= LNS1 * LNS2 * ... * LNSN * O(H)$$
$$O(H/\bar{E}1,\bar{E}2,...,\bar{E}N)= \overline{LNS}1 * \overline{LNS}2 * ... * \overline{LNS}N * O(H)$$

Despues de que la probabilidad P(H) es recalculada, el valor posterior es aceptado como una nueva pieza de información del espacio H.

CAPITULO III

PESOS GLOBALES Y CONCEPTOS ALGEBRAICOS:

Calcular evidencias multiples es realizado en diferentes formas, como en el caso de la combinación de pesos de los siguientes sistemas, ver capitulo anterior para mas detalle.

MYCIN calcula la combinación de multiples reglas de la siguiente manera, sabiendo que el factor de certeza CF varia en un intervalo de valores de (-1,1), mientras que MB y MD varian en 0 y 1.

$$CF(H,E1,E2) = MB(H,E1) - MD(H,E2) \qquad y$$

$$MB(H,E1,E2) = MB(H,E1) + MB(H,E2) - MB(H,E1) * MB(H,E2)$$

$$MD(H,E1,E2) = MD(H,E1) + MD(H,E2) - MD(H,E1) * MD(H,E2)$$

donde CF(H,E1,E2) es el grado de certeza de la Hipótesis H dadas las evidencias E1 y E2 y donde MD(H,E1,E2) es el grado de incredibilidad y MB(H,E1,E2) el de credibilidad, dadas las evidencias E1 y E2.

EMYCIN utiliza la siguiente ecuación para calcular la combinación de dos pesos en el conjunto de valores (-1,1).

$$X \oplus Y = X + Y + X * Y$$

En PROSPECTOR se utilizan odds en el conjunto de valores de (0,1) con la siguiente ecuación.

$$O(H|E1',E2') = L'1\ L'2\ O(H)$$

Por lo tanto uno de los problemas que se presentan es como calcular la combinación de los pesos de evidencias multiples, si trabajamos en cualquier intervalo.

Una manera natural de realizar la combinación de pesos se describirá a continuación, en donde se encontrará que se presentan propiedades que coinciden desde el punto de vista matematico con ciertas propiedades algebraicas.

1.- Calculo de pesos globales:

Calcular pesos globales de dos o mas evidencias en una manera natural es tomando parejas de pesos, es decir, si tenemos los pesos de las evidencias W1, W2 y W3, calcularemos primeramente W1 y W2, proporcionando un resultado que llamaremos W4, este resultado puede ser tomado como una nueva evidencia para ser utilizada con la siguiente evidencia W3, a continuación se toman las evidencias W3 y **W4** para calcularse, las cuales proporcionan el resultado global, este procedimiento puede ser seguido en el caso de mas evidencias. Esto nos obliga a trabajar con operaciones binarias.

Considerando que se puede trabajar prácticamente en cualquier intervalo de los reales o cualquiera de los métodos anteriores, tomaremos arbitrariamente el intervalo [-1,1] debido a la simetriá que existe entre los extremos y considerando que, 1 significa "Ciertamente Verdadero", -1 significa "Ciertamente

Falso", y cero significa "No Se", describiendo ademas ciertas propiedades que se presentan en la combinación de evidencias multiples.

La representación gráfica de como se calculan los pesos globales de dos o mas reglas en base a los pesos de sus evidencias en una manera natural se aprecia en la figura 1.

```
              |
              |     F(W1,W2) = W1 ⊕ W2
              |
          -----
          |   |
          |   |
          -----
         /     \
        /       \
       /         \
      W1          W2             WN
```

Figura 1.

El simbolo "⊕" es utilizado para representar una operación binaria.

La F(W1,W2) representa la función que realizará la operación "⊕" que es el calculo de los pesos.

La W1, W2, ..., WN, representan los pesos parciales de las evidencias que resultan de la combinación de las reglas del experto y datos del usuario.

ejemplo:

R1: SI la cubierta de la nube ES un cúmulo

ENTONCES hay evidencia de precipitación de .80

R2: SI la presión ES estable O aumenta

ENTONCES hay evidencia de precipitación de .60

Se tienen dos reglas con cierta incertidumbre de las dos evidencias. Ay que calcular el peso global de la H (Precipitación), tomando en cuenta las dos reglas.

Es natural a simple vista que se deben de cumplir con las siguientes propiedades, ver Hajek [85]:

1) Si tenemos una evidencia W1 porporcionada por un experto con peso de 1 "Ciertamente Verdadero" y una segunda evidencia W2 de otro experto con valor diferente de -1 "Ciertamente Falso", el resultado de la combinación de los pesos será 1 "Ciertamente Verdadero", debido a que el primer experto tiene la certeza en un cien por ciento de que la evidencia es verdadera prevaleciendo sobre la evidencia del segundo que no se encuentra seguro en un cien por ciento. Escribiendose de la siguiente manera:

$$\text{Si } W1 = 1 \text{ y } W2 \neq -1 \text{ entonces } W1 \oplus W2 = 1$$

2) Ahora, si se tienen una evidencia W1 con peso de 1 "Ciertamente Verdadero" y otra evidencia W2 con peso de -1 "Ciertamente Falso", se presenta una contradicción que deberá ser resuelta por los expertos, la contradicción es debido a que un experto se encuentra cien por ciento seguro de que sus evidencias proporcionan un peso de 1 "Ciertamente Verdadero" y otro experto se encuentra cien por ciento seguro de que sus evidencias proporcionan un peso de -1 "Ciertamente Falso", existiendo seguramente algun error o mala apreciación en los pesos de las

evidencias de alguno de los expertos, debiendo de resolver está contradicción ellos mismos. Escribiendose como:

Si $W1 = 1$ y $W2 = -1$ existe una contradicción y deberá ser resuelta por los expertos.

Todo lo visto anteriormente en 1) y 2) es en el caso de que W1, toma el valor de 1 "Ciertamente Verdadero" y W2 toma el valor de -1 "Ciertamente Falso".

3) A continuación se verán las propiedades que deben de presentarse en el intervalo abierto M:

$$M \text{ está contenido en } (-1,1) \quad y \quad W1,\ W2,\ W3 \in M$$

esto es que ninguna de las evidencias que se presenten, obtengan el valor de 1 "Ciertamente Verdadero" o -1 "Ciertamente Falso".

a) Sean W1 y W2 evidencias que se pretenden combinar. Es indistinto tomar primero la que sea para combinarlas. Esto es:

$$W1 \oplus W2 = W2 \oplus W1 \qquad \text{(conmutatividad)}$$

b) Si se presentan tres evidencias W1, W2 y W3 a combinar, se pueden agrupar en operaciones binarias, esto es, se pueden agrupar en forma indistinta en operaciones binarias para calcularse. Escribiéndose:

$$W1 \oplus (W2 \oplus W3) = (W1 \oplus W2) \oplus W3 \qquad \text{(asociatividad)}$$

c) Si en la combinación de dos evidencias se presenta una de ellas con peso 0 "No se", no se afecta nada y solo el otro peso es considerado, entonces 0 es semejante en adición al elemento nulo.

$$0 \oplus W1 = W1$$

d) Si se tiene una evidencia con peso W1 que significa por ejemplo 80 por ciento de certeza en algo y otra evidencia -W1 con 80 por ciento de certeza en lo contrario, al combinarse proporcionaran el resultado 0 "No se", la evidencia -W1 es considerada como la operación unaria de la inversa de W1, recordando que W1 no toma los valores de 1 ni de -1 de modo que:

$$W1 \oplus -W1 = 0$$

e) Sean tres evidencias W1, W2 y W3 que se pretenden combinar, en donde la evidencia con peso .40 en W1 es menor que la evidencia con peso .80 en W2 y la evidencia W3 podra contener cualquier peso en el intervalo abierto de (-1,1), entonces la combinación de las evidencias W1 y W2, es menor que la combinación de las evidencias W2 y W3. Escribiendose como:

$$W1 \leq W2 \Rightarrow W1 \oplus W3 \leq W2 \oplus W3$$

2.- Conceptos Algebraicos utilizados.

Se puede decir entonces que lo visto en la sección anterior corresponde matematicamente a lo siguiente:

Si G es un conjunto no vacio sobre el cual se ha definido una operación binaria $\oplus$ se llama grupo con respecto a esta operación, debido a que W1, W2, W3 $\in$ G y se verifican las propiedades de asociatividad, existencia del elemento neutro y existencia del simétrico en las propiedades correspondientes b), c) y d) de la sección anterior .

Debido a las propiedades que se muestran de conmutatividad a) y asociatividad b) de la sección anterior, se dice que el grupo es abeliano.

El grupo se dice que es ordenado abeliano por la propiedad e) de la sección anterior también.

Como ejemplos se describirán los grupos aditivo y multiplicativo a continuación, para posteriormente mostrar el que utilizaremos y que llamaremos grupo de pesos, ademas de algunas de sus relaciones sencillas.

El grupo multiplicativo se define en el intervalo de [0,+~] con la operación "*".

El grupo aditivo está definido en el intervalo [-~,+~] con la operación "+".

El grupo de pesos se encuentra definido en [-1,1] con la operación "⊕", la operación previa está definida solo con las propiedades anteriores, entonces existen mas grupos que pueden ser definidos en [-1,1].

Sea G un grupo que corresponde al intervalo que tomamos arbitrariamente en [-1,1]. Se dice que es <u>isomorfo</u> al grupo aditivo de los reales Z en [-~,+~], si para cada x ∈ [0,1], existe un <u>isomorfismo</u> de G a Z que mapea X a 1.

Sean G1 y G2 grupos con M1, M2 conjuntos y con operaciones $\oplus 1$ y $\oplus 2$ correspondientes. Y la función f que mapea a:

$$f: M1 \dashrightarrow M2 \quad y \quad X1, X2\ y\ X3 \in M1; \quad W1, W2\ y\ W3 \in M2$$

Si tenemos que

$$f(W1) = X1 \quad ,$$
$$f(W2) = X2 \quad y$$
$$f(W3) = X3$$

sabemos que existe una correspondencia entre

$$W1 \oplus 1\ W2 = W3 \quad con \quad f(W1) \oplus 2\ f(W2) = f(W3)$$

y si la operación es biyectiva, es decir, si

$$M1 \longleftrightarrow M2$$

en donde M1 se encuentra entre [0,1] y M2 en [-~,+~], se dice que G1 y G2 son isomorfos y a la función f se le llama isomorfismo.

ejemplo de isomorfo e isomorfismo:

Sea G1 un grupo con operación "+", con M1 = (-1,1) un conjunto de valores por ejemplo 2, 3 y 6 $\in$ M1. Y G2 un grupo con operación "*", con M2 = (0,+~) un conjunto de valores y W1, W2 y W3 $\in$ M2.

Si 2, 3, 6 $\in$ M2

y $2 * 3 = 6$

entonces $LN(2 * 3) = LN(2) + LN(3) = LN(6)$

donde LN(2), LN(3), LN(6) ∈ M1

se dice entonces que los grupos son isomorfos con la función LN como isomorfismo de aditivo a multiplicativo. Y se puede probar que hay varios isomorfismos entre los grupos G1 aditivo y G2 multiplicativo.

Entonces se puede probar también que hay isomorfismos entre cada pareja de los grupos aditivo, multiplicativo y el nuestro de pesos.

Para las definiciones formales de grupo, grupo ordenado, grupo ordenado abeliano e isomorfismo ver el ANEXO A.

Se definirá la operación ⊕ por medio de isomorfismos del grupo aditivo, en Hajek [85] se ofrecen siete isomorfismos que definen siete operaciones ⊕, ver tabla 1.

La lista de isomorfismos de la tabla 1. Da un mapeo uno a uno en [0,1) a [0,+~] se asume que la función se extiende hasta (-1,1) como una función odd F. (las formulas 2 y 4 definen ellas mismas funciones odd's en (-1,1), pero no las otras). La operación ⊕ general para combinar los pesos es:

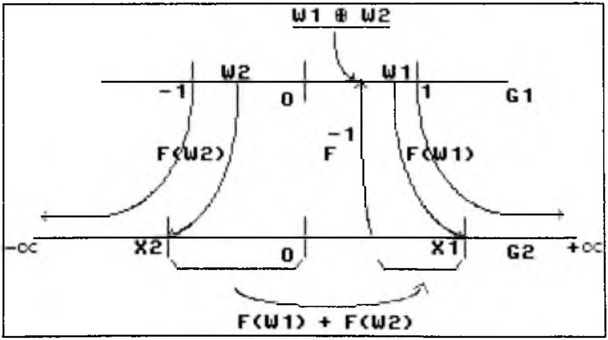
$$X \oplus Y = F^{-1}(F(X) + F(Y))$$

El isomorfismo 1 da el grupo de EMYCIN, el 2 el grupo de PROSPECTOR. F(X) y F(Y) significan el isomorfismo tomado de la tabla 1 y F^{-1} la inversa de la misma tabla.

Funciones de Combinacion		
No.	Isomorfismo	Inversa
1	$Z = \ln[1/(1-X)]$	$X = [\exp(Z)-1]/\exp(Z)$
2	$Z = \ln[(1+X)/(1-X)]$	$X = [\exp(Z)-1]/[\exp(Z)+1]$
3	$Z = X/(1-X)$	$X = Z/(1+Z)$
4	$Z = \tan(pi.X/2)$	$X = 2.\mathrm{atan}(Z)/pi$
5	$Z = [X/(1-X)]^2$	$X = \sqrt{Z}/(1+\sqrt{Z})$
6	$Z = \sqrt{[X/(1-X)]}$	$X = Z^2/(1+Z^2)$
7	$Z = (\ln[(1+X)/(1-X)])^2$	$X = (\exp(\sqrt{Z})-1)/[\exp(\sqrt{Z})+1]$

Tabla 1.

La representación gráfica del calculo de pesos globales de evidencias multiples entre el grupo de pesos descrito anteriormente en está sección y el grupo aditivo de los reales utilizando la operación general para combinar pesos, se presentará en la figura 2 con una breve descripción.



G1 es el grupo de pesos que se encuentra definido en el conjunto de valores (-1,1) con la operación binaria ⊕ y valores de evidencias W1, W2 proporcionadas por experto y usuario. G2 es el grupo aditivo de los reales en (-~,+~) con la operación + y con valores X1 y X2 mapeados con una función F(W1) y F(W2) (isomorfismo) de la Tabla 1, para ser operados X1 y X2 con el operador "+", el resultado proporcionado se mapeará de regreso al grupo de pesos G1 con la función F^{-1} (F(W1) + F(W2)) (inversa) correspondiente de la tabla 1, proporcionando el calculo del peso global.

CAPITULO VI

VERIFICACION DE RESULTADOS PARA PROSPECTOR Y EMYCIN

Se determinará que las formulas de pesos, son equivalentes a las probabilísticas y de odds correspondientes de los siguientes sistemas.

1 - PROSPECTOR.

PROSPECTOR usa probabilidades en un rango de [0,1]; si p es alguna probabilidad entonces

$$O = \frac{p}{(1 - p)}$$

es el correspondiente odds. El odos es multiplicado y el resultado es entonces transformado de regreso a probabilidad, o sea al intervalo [0,1]. Si se trabaja con [-1,1] en lugar de [0,1] se tiene

$$w = 2p - 1.$$

La función de combinación en pesos para PROSPECTOR es:

$$X \oplus Y = \frac{X + Y}{(1 + X\ Y)}$$

A) Para determinar odds a pesos se realizará la siguiente reevaluación de la formula de PROSPECTOR en terminos de pesos de [-1,1]:

$$O = \frac{P}{(1 - P)}$$

Teniendo que y se trabaja en un intervalo de [0,~]

$$O12 = L'1 * L'2 = O1 * O2;$$

sustituyendo la formula de conversión de odds

$$\frac{P12}{1 - P12} = \frac{P1}{1 - P1} \frac{P2}{1 - P2}$$

$$P12 (1 - P1) (1 - P2) = P1 P2 (1 - P12)$$

$$P12 (1 - P1 - P2 + P1 P2) = P1 P2 - P1 P2 P12$$

$$P12 (1 - P1 - P2 + P1 P2) + P12 P1 P2 = P1 P2$$

$$P12 (1 - P1 - P2 + 2 P1 P2) = P1 P2$$

esta es la fomula de PROSPECTOR en la escala de probabilidades, es decir del intervalo de [0,1]

$$P12 = \frac{P1 P2}{(1 - P1 - P2 + 2 P1 P2)}$$

$$\frac{W12 + 1}{2} = \frac{\frac{(W1 + 1) (W2 + 1)}{4}}{1 - \frac{W1 + 1}{2} - \frac{W2 + 1}{2} + \frac{2 (W1 + 1) (W2 + 2)}{4}}$$

$$W12 + 1 = \frac{1 + W1 + W2 + W1 W2}{(1 + W1 W2)}$$

Formula de combinación de incertidumbre de PROSPECTOR en las escala de pesos "W", intervalo de [-1,1]:

$$W12 = \frac{W1 + W2}{(1 + W1\ W2)}$$

B) Reevaluación de la formula general aplicando la función 2.

Utilizando la formula general:

$$X \oplus Y = F^{-1}(F(X) + F(Y))$$

$$= F^{-1}(F(W1) + F(W2))$$ y el isomorfismo 2

$$Z = LN \frac{1 + W}{1 - W}$$ y la inversa 2

$$F^{-1}(Z) = \frac{e^{Z} - 1}{e^{Z} + 1}$$ tomados de Hajek [85]

Desarrollando;

$$Z = F^{-1}(F(W1) + F(W2))$$

Tomando el isomorfismo

$$Z = LN \frac{1 + W1}{1 - W1} + LN \frac{1 + W2}{1 - W2} = LN \frac{(1 + W1)(1 + W2)}{(1 - W1)(1 - W2)}$$

tomando la inversa

$$F^{-1}(Z) = \frac{e^{Z} - 1}{e^{Z} + 1} = \frac{(1 - W1)(1 + W2) - (1 - W1)(1 - W2)}{(1 - W1)(1 + W2) + (1 - W1)(1 - W2)}$$

$$F^{-1}(Z) = \frac{W1 + W2}{1 + W1\ W2} \qquad \text{igual a entonces a pesos}$$

2.- EMYCIN.

Como EMYCIN trabaja en el intervalo de [-1,1] no será necesario realizar la primera parte como en PROSPECTOR.

Utiliza la función de combinación siguiente:

$$X \oplus Y = X + Y - X\ Y$$

A) Reevaluación de la formula general aplicando la función 1.

Se transformaran los valores de EMYCIN del intervalo de [0,+~] a [-1,1] de las funciones de combinación.

utilizando la formula general

$$X \oplus Y = F^{-1}(F(X) + F(Y)) \qquad \text{y el isomorfismo 1}$$

$$Z = LN \frac{1}{1 - W} \qquad \text{e inversa 1}$$

$$F^{-1}(Z) = \frac{e^{Z} - 1}{e^{Z}}$$ tomados de Hajek [85].

Desarrollando;

$$Z = F^{-1}(F(W1) + F(W2))$$

Tomando el isomorfismo

$$Z = LN \frac{1}{1 - W1} + LN \frac{1}{1 - W2} = LN \frac{1}{(1 - W1)(1 - W2)}$$

y la inversa

$$F^{-1}(Z) = \frac{e^{Z} - 1}{e^{Z}} = 1 - 1 + W2 + W1 - W1\ W2$$

se tiene

$$F^{-1}(Z) = W1 + W2 - W1\ W2;$$ la cual es igual a EMYCIN.

Se ha demostrado que las funciones de combinación utilizadas corresponden a las funciones propias de los sistemas PROSPECTOR y EMYCIN, ademas de ofrecerse otras en Hajek [85]. Esto significa que las siete funciones son identicas o semejantes y que pueden ser cambiadas por otras, ya que desde el punto de vista algebraico son iguales o equivalentes.

Para analizarlas y seleccionar la mejor función, hay que elegir otro punto de vista.

Un tipo que eligiremos para analizar su comportamiento, y como puediera ser cualquier otro, es el concepto de sensibilidad propuesto por Zdráhal. Porque como se verá en capitulos posteriores el concepto de sensibilidad resulta muy importante.

CAPITULO V

EXPERIMENTOS CON ISOMORFISMOS.

En el presente capitulo se describirán los experimentos con los isomorfismos presentados en la Tabla 1 mediante un programa de computación; describiendo primeramente en forma funcional el programa y posteriormente los resultados obtenidos de un experimento.

Se desarrollo una máquina de inferencia (en Turbo-Pascal) para una IBM-PC o compatible que funciona interactivamente para aceptar un conjunto arbitrario de reglas, contenidas en un archivo para realizar la propagación de incertidumbre en la red de inferencia mostrada en la pantalla, la propagación se realiza al seleccionar una de las siete funciónes de combinación de la tabla 1 del capitulo anterior, usando para el calculo del peso global los pesos a priori y los pesos de las reglas, el resultado global es puesto en un archivo que permite estudiar su compartamiento gráficamente al ser procesado por el paquete de programación LOTUS R2.

La máquina de inferencia, no verificará la existencia de ciclos en la red de inferencia (debido a que no es el objetivo de la presente tesis realizar esto), trabaja hasta con un máximo de cinco niveles de profundidad.

Al iniciar la operacion del programa, se cargan primeramente a memoria dos archivos de texto: uno conteniendo reglas y el otro nodos o metas, con las siguientes estructuras:

Nodos

<Tipo> <Número> <Texto> <Peso Inicial>

Reglas

<Número Sucesor> <Número Predecesor> <Peso Regla>

En el caso del archivo de nodos el <Tipo> nos define los nodos que pueden ser utilizados por la máquina de inferencia, tomando unicamente dos valores distintos; "M" que significa que el nodo es una meta y "O" que es de otro tipo. El <Número> que se le asigne deberá variar entre 1 y 99, el cual representa el número que le corresponde a ese nodo. El <Texto> es una descripción breve del nodo, sirve únicamente de referencia. El <Peso Inicial> es un valor decimal de dos posiciones entre cero y uno (incluidos el cero y uno), correspondiendo al peso inicial (o apriori) de los nodos hoja o terminales (este peso podrá ser modificado al iniciarse la ejecución del programa).

Para el archivo de reglas, el <Sucesor> y <Predecesor> son los números de nodo que hacen referencia respectivamente al número de nodo que se encuentra en el archivo de nodos; en donde el <Sucesor> es el nodo que apunta hacia el nodo <Predecesor> (el <Predecesor> puede ser el <Sucesor> de otra regla). Y el <Peso Regla> es un valor de las mismas características que el <Peso Inicial> del archivo de nodos asignado a la regla, esté no podrá ser variado durante la ejecución del programa.

Al ejecutar el programa MAQINF inmediatamente solicita el nombre de la base de conocimientos o archivo de reglas que se cargará en la sesión de experimentos, a continuación despliega en la pantalla la red de inferencia en forma de un arbol horizontal de izquierda a derecha con los pesos de cada regla abajo de la misma en fondo inverso y el peso inicial o apriori asignado al nodo terminal u hoja también en fondo inverso.

En esta parte, se puede modificar el peso inicial del nodo terminal u hoja seleccionando el nodo por medio de las teclas de movimiento del cursor, tecleando intro en el valor del nodo o nodos que se deseen variar y el nuevo valor deseado con las mismas características que los pesos de las reglas y los nodos.

Cuando ya se termino de modificar los valores de los nodos terminales u hojas, se presiona la tecla de ESC, proporcionando a continuación la tabla de isomorfismos en una ventana, para seleccionar el número del isomorfismo que calculará el peso global de la red de inferencia, calculando en base al isomorfismo seleccionado anteriormente el peso de cada regla paso a paso al presionar cualquier tecla.

A continuación se presenta la tabla 2 con los resultados obtenidos del experimento realizado con una base de conocimientos sencilla que representa una red de inferencia simétrica para determinar la propagación de incertidumbre por cada una de las funciones de combinación en los diferentes niveles.

La base de conocimientos contiene las reglas R1 y R2 con los pesos apriori y los nodos hoja o terminales W1 y W2 con los pesos que pueden ser modificados a continuación.

R1 y R2 con peso de uno

W1 = 0.1 y W2 = 0.25

los resultados obtenidos de la propagación de incertidumbre en base a los pesos proporcionados son:

FUNC.	ISOMORFISMOS		INVERSA
	W1	W2	RESULTADO
1	0.10536	0.28768	0.325
2	0.20067	0.51083	0.34146
3	0.11111	0.33333	0.30769
4	0.15838	0.41421	0.33106
5	0.01235	0.11111	0.26601
6	0.33333	0.57735	0.45336
7	0.04027	0.26094	0.26773

Tabla 2.

Como se podrá observar los resultados de las funciones 1, 2, 3 y 4 son semejantes entre si y los de 5 y 7 también entre ellos mismos, quedando la función 6 sola.

En el siguiente capitulo se describirá una manera de determinar el comportamiento de las funciones de combinación, para así realizar una selección mejor de las mismas.

CAPITULO VI

DEFINICION DE SENSIBILIDAD.

Cuando se combina el conocimiento de un experto (o grupo de expertos) y un usuario (o grupo de usuarios) para calcular alguna hipótesis en base a la experiencia obtenida de todo este grupo de personas, se presenta información imprecisa e incierta, ya que si suponemos la verificación de la hipótesis en base a valores asignados por el grupo de personas anterior con evidencias de un 80% de que son ciertas por una parte del grupo de personas y la otra parte un 75%, se proporciona cierta credibilidad de que la hipótesis sea verdadera con una certeza X1, está certeza X1 es calculada de acuerdo a alguna función de combinación; como la de los sistemas expertos MYCIN, EMYCIN o PROSPECTOR mostradas en capitulos anteriores. Pero cuando una de las partes anteriores varia muy levemente el valor de su creencia, digamos en un 2% más, la certeza X2 calculada ahora con este incremento presenta una variación con respecto a la certeza X1, está variación entre las certezas es a lo que consideraremos sensibilidad absoluta y a la razón que existe entre la variación de una de las certezas y el incremento en una de las evidencias lo llamaremos sensibilidad relativa.

La importancia de disponer de los conceptos de sensibilidad anteriores es que proporcionan la capacidad de determinar el comportamiento de cualquier función de combinación, de acuerdo a el porcentaje en que un incremento muy pequeño en una de las apreciaciones afecta el valor de certeza, considerando que si el porcentaje varia entre un más menos diez por ciento, puede proporcionar hipótesis con una mayor incertidumbre, ya sea a favor o en contra. Ademas hay que tomar en cuenta las variaciones que se presenten, debido a la forma natural de calcular los pesos globales para este tipo de problemas. Siendo uno de los objetivos determinar la sensibilidad de las funciones de combinación de Hajek [85], a continuación se describirá formalmente la manera en que se calculó la sensibilidad para la presente tesis, presentandose la importancia de la derivada en la misma.

Sean dos evidencias con pesos X1 y X2, X2 con un valor constante y con la función para calcular la combinación de dos pesos como:

$$Y1 = G(X1,X20), \text{ donde } X20 \text{ es el valor constante de } X2$$

si se incrementa (o se varia) X1 en una valor muy pequeño DX1, Y1 tendria un incremento también, o sea;

$$Y1 + DY1 = G(X1 + DX1,\ X20)$$

si queremos conocer la variación que se presenta con respecto al resultado Y1, restariamos al incremento que hubo anteriormente el resultado inicial normal (sin la variación en el incremento);

$$\begin{array}{rcr} Y1 + DY1 & = & G(X1 + DX1,\ X20) \\ - Y1 & = & - G(X1,X20) \\ \hline DY1 & = & G(X1 + DX1,\ X20) - G(X1,\ X20) \end{array}$$

proporcionando la variación que hubo en el resultado con respecto al incremento en el mismo, pero lo que realmente nos interesa es conocer la razón entre la variación que hubo en el resultado con respecto al incremento que se presentó en el peso de una evidencia. Primeramente determinaremos la importancia de la derivada, dividiendo la variación del resultado entre el incremento de la evidencia.

$$\frac{DY1}{DX1} = \frac{G(X1+DX1,X20) - G(X1,X20)}{DX1}$$

aplicando limites a lo anterior, para cuando $DX1 \to 0$, tenemos que;

$$\lim_{DX1 \to 0} \frac{DY1}{DX1} = \lim_{DX1 \to 0} \frac{G(X1+DX1,X20) - G(X1,X20)}{DX1}$$

$$= \frac{@G(X1,X20)}{@X1}$$

lo cual es la <u>sensibilidad absoluta</u>, escribiéndose como:

$$A(X1,X20) = \frac{@G(X1,X20)}{@X1}$$

Ahora si dividimos el incremento del resultado entre el incremento en la variación de una de las evidencias;

$$\frac{\dfrac{DY(X1,X20)}{G(X1,X20)}}{\dfrac{DX1}{X1}} = \frac{DY}{DX1} * \frac{X1}{G(X1,X20)} = R(X1,X20)$$

nos da la variación relativa que podemos escribir como:

$$R(X1,X20) = A(X1,X20) * \frac{X1}{G(X1,X20)}$$

Como se pudo observar la sensibilidad absoluta y relativa son métodos muy sencillos y simples de calcularse, es posible por lo tanto definir otros métodos más sofisticados y desde otro punto de vista, pero para nuestro trabajo usaremos estas dos medidas y veremos que con ellas se pueden eliminar algunas maneras de combinación (funciones de combinación).

CAPITULO VII

EXPERIMENTOS CON SENSIBILIDAD.

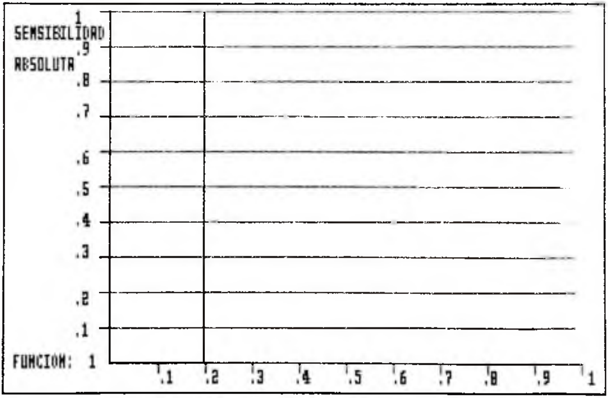
En el presente capitulo se mostraran las gráficas obtenidas de los experimentos realizados con los conceptos de sensibilidad absoluta y relativa del capitulo anterior.

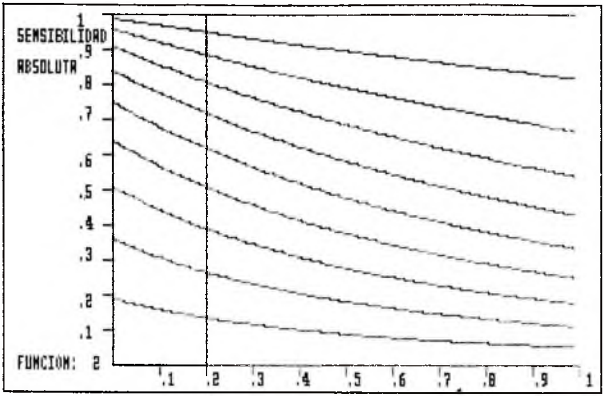
El primer experimento consistió en graficar las siete funciones de combinación desde el punto de vista de sensibilidad absoluta en el intervalo de [0,1], pero como para MYCIN los valores menores de 0.2 no son importantes, indicaremos con una línea este valor para distinguir el rango de valores que no serán de importancia en experimentos posteriores.

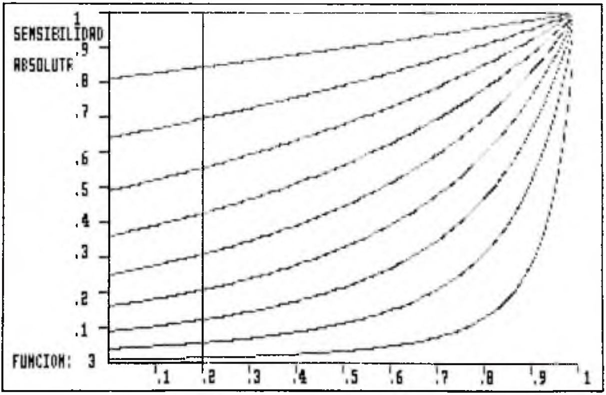
El eje de las X's representa el valor que toma una de las evidencias proporcionas que se incrementa muy levemente, mientras que la otra evidencia permanece constante, el eje de las Y's es el valor que se obtiene de la sensibilidad absoluta definida por las ecuaciones del capitulo anterior de acuerdo a los valores de las evidencias mencionadas anteriormente.

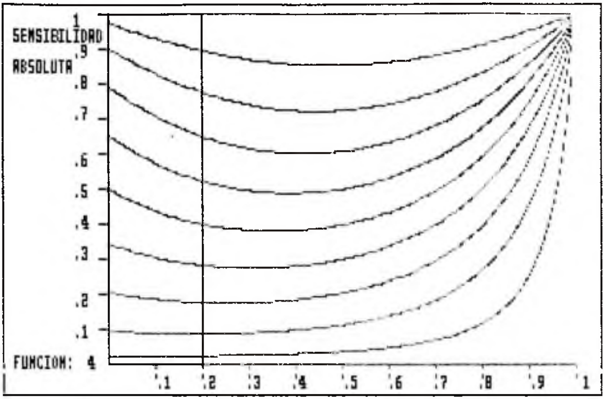
El comportamiento que se obtuvo de la sensibilidad absoluta nos muestra que las funciones uno y dos proporcionan resultados aceptables, mientras que las funciones tres a siete un comportamiento algo extraño.

Las gráficas de las funciones tres y cuatro son muy similares entre si, así como la cinco y siete, la gráfica seis no tiene similitud con ninguna de las anteriores. A continuación se muestran las gráficas correspondientes a la sensibilidad absoluta.

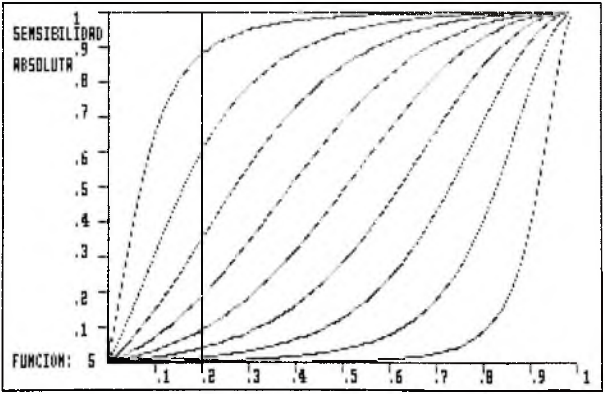



1
SENSIBILIDAD
ABSOLUTA
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 2
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1

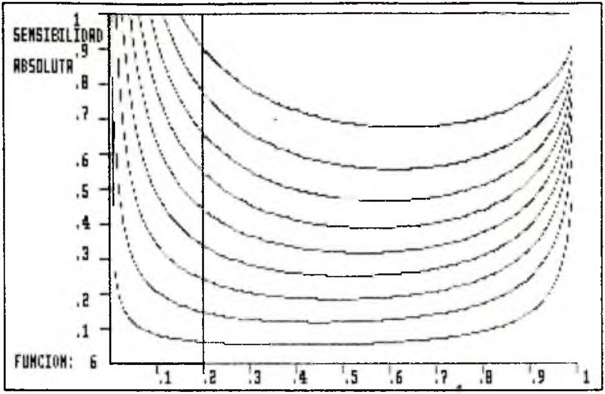

1
SENSIBILIDAD
ABSOLUTA
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 3
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1

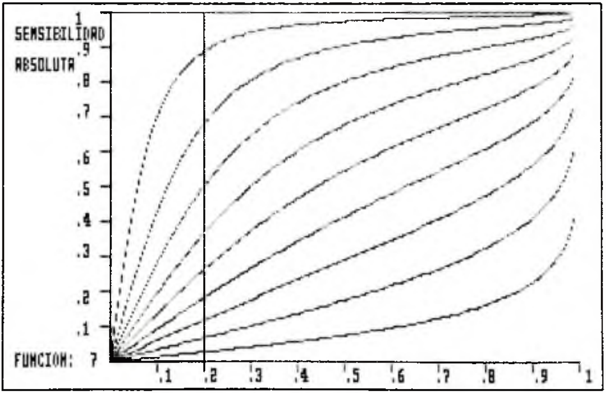


SENSIBILIDAD ABSOLUTA
1
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 4
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1



SENSIBILIDAD ABSOLUTA
1
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 5
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1


SENSIBILIDAD ABSOLUTA
1
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 6
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1

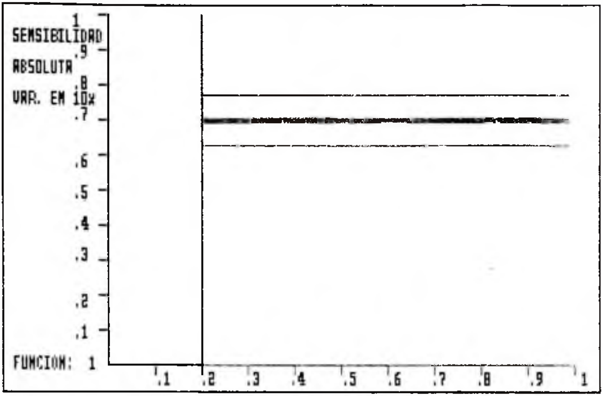

SENSIBILIDAD ABSOLUTA
1
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 7
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1

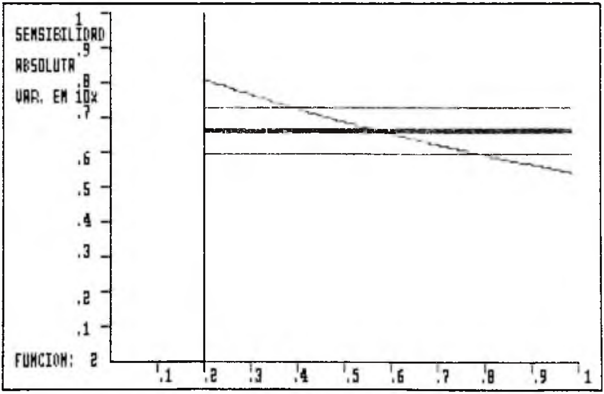
La variación en un mas menos diez por ciento en la media de la sensibilidad absoluta representa para nosotros los límites aceptables que puede tomar la sensibilidad absoluta de una función de combinación sin afectar demasiado los resultados obtenidos.

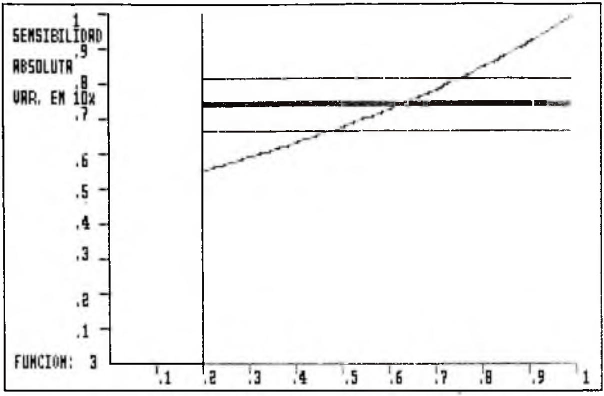
Para graficar la variación, los valores menores a 0.2 no seran tomados en cuenta debido recordemos a que para MYCIN no son considerados importantes, solo se representará el comportamiento de una línea o curva para determinar su variación en un mas menos diez por ciento con respecto a la media de la sensibilidad absoluta.

La línea gruesa muestra la media de la sensibilidad absoluta para las funciones de combinación, únicamente en el caso de EMYCIN la media corresponde a la línea de la sensibilidad absoluta y las líneas paralelas delgadas a los lados de la línea gruesa indican la variación de un mas menos diez por ciento para todas las funciones.

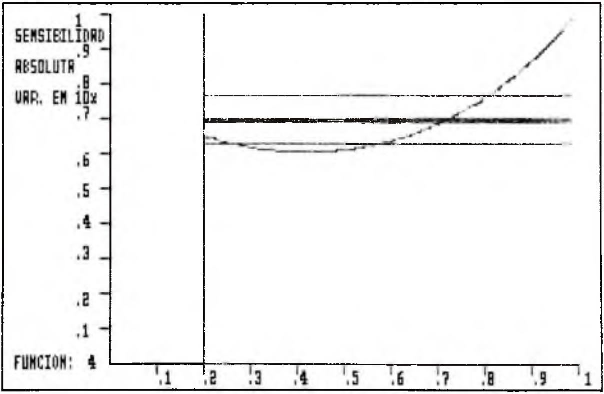
Para algunas funciones de combinación como se verá gráficamente el concepto de variación en un mas menos diez por ciento no tiene sentido, debido al comportamiento extraño que presentan.


SENSIBILIDAD
ABSOLUTA
VAR. EM 10%
FUNCION: 1
1
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
.1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 1

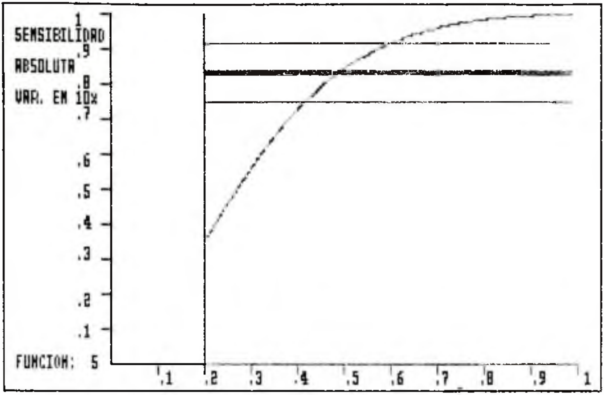

SENSIBILIDAD
ABSOLUTA
VAR. EM 10%
FUNCION: 2
1
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
.1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 1

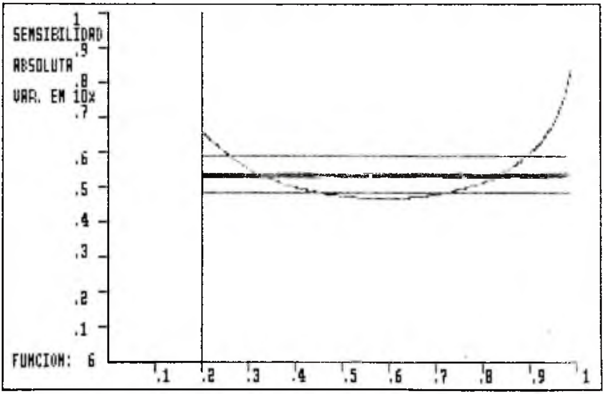


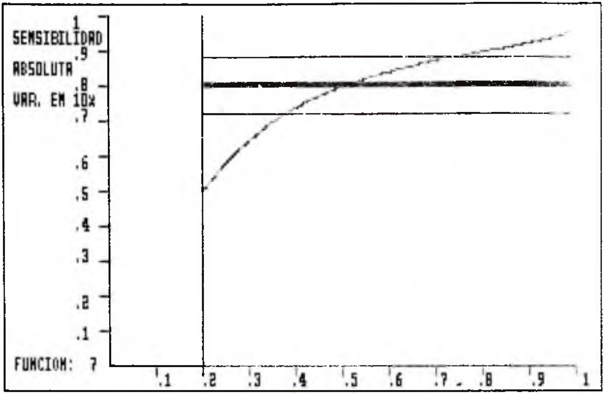
SENSIBILIDAD
ABSOLUTA
VAR. EN 10%
FUNCION: 3
1
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1



SENSIBILIDAD
ABSOLUTA
VAR. EN 10%
FUNCION: 4
1
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1

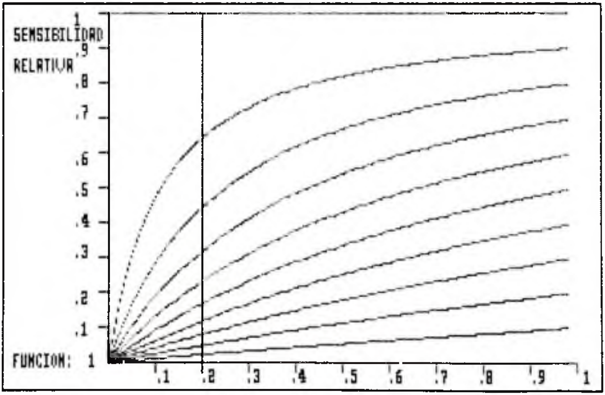

1
SENSIBILIDAD
.9
ABSOLUTA
.8
VAR. EM 10%
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 5
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1

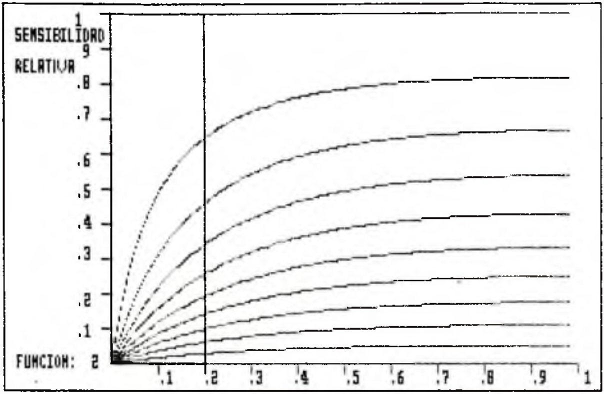

1
SENSIBILIDAD
.9
ABSOLUTA
.8
VAR. EM 10%
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 6
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1

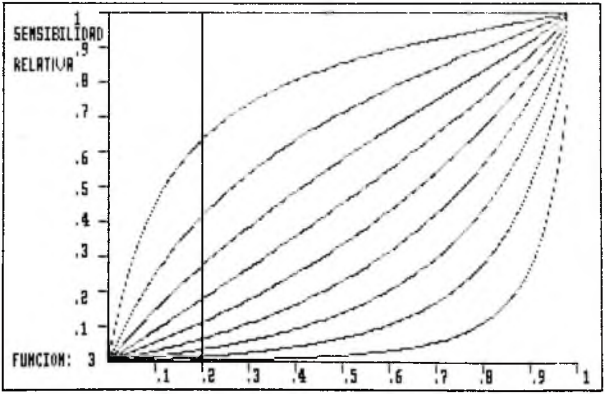

1
SENSIBILIDAD
ABSOLUTA
VAR. EN 10%
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 7
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1

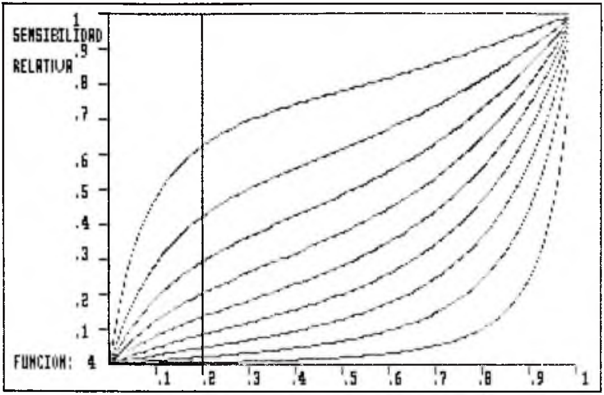
La representación gráfica de la sensibilidad relativa es tomada también en el intervalo que es importante para MYCIN, representa el porcentaje de variación de un resultado debido a la variación obtenida entre el incremento en una de las evidencias.

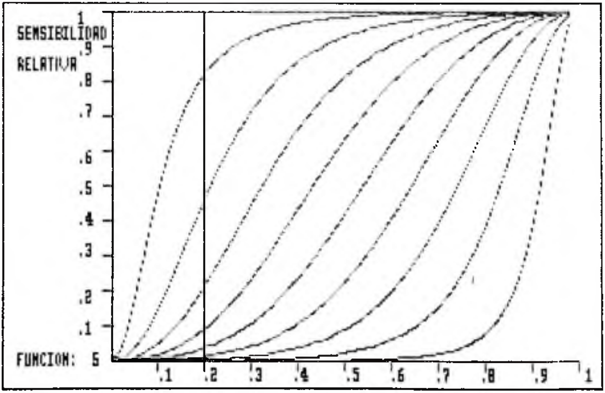
El eje de las X's representa la variación de una de las evidencias, la otra evidencia permanece constante, el eje Y representa el porcentaje en que se afecta el resultado debido al incremento en la evidencia.

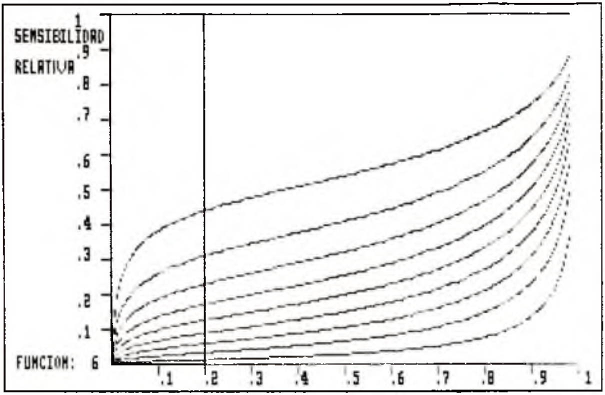



SENSIBILIDAD
RELATIVA
1
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 2
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1

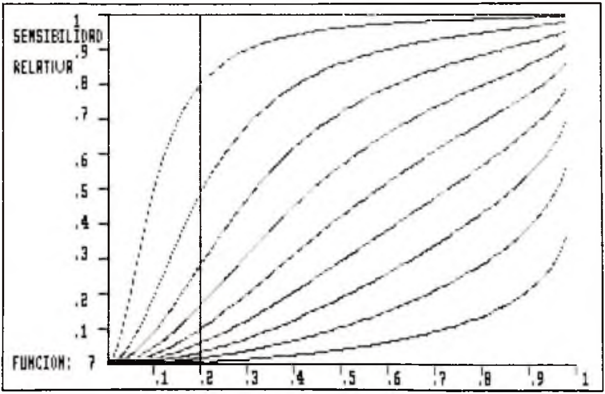

SENSIBILIDAD
RELATIVA
1
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 3
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1


1
SENSIBILIDAD
RELATIVA
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 4
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1


1
SENSIBILIDAD
RELATIVA
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 5
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1



SENSIBILIDAD RELATIVA
1
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 6
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1



SENSIBILIDAD RELATIVA
1
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
FUNCION: 7
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1

Por último, aunque el comportamiento de algunas de las funciones de combinación como se vio en las gráficas anteriores resulta demasiado extraño, la evaluacion de las graficas mostradas previamente será realizado en el siguiente capitulo.

CAPITULO VII

EVALUACION DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

Como se vió en capitulos anteriores, combinar de una manera natural la incertidumbre de reglas para obtener los pesos globales de evidencias, puede ser resuelto utilizando algunos conceptos básicos algebraicos, sin hacer referencia a métodos probabilísticos (como los mencionados en el capitulo dos) que han sido ya muy utilizados y desde hace ya bastante tiempo, uno de los conceptos que resulto importante es el de isomorfismo, aunque cuando se realizó el experimento con los isomorfismos aplicados a una base de conocimientos representada como una red de inferencia simétrica, se obtuvierón resultados diferentes, encontrando que las funciones uno, dos, tres y cuatro presentan resultados más o menos similares entre sí y que las funciones cinco y siete resultados también similares entre ellas mismas, a excepción de la función seis que no es similar a ninguna de las anteriores, estos resultados no nos permitierón considerar cuales funciones son mejores, definiendo por lo tanto el concepto de sensibilidad para determinar su comportamiento.

Se ha podido verificar también que las funciones de combinación uno y dos de Hajek [SS] corresponden o son equivalentes respectivamente a las utilizadas por los sistemas EMYCIN y PROSPECTOR, pudiendo por lo tanto utilizar indistintamente cualquiera de los siete isomorfismos presentados, debido a que son semejantes, pero considerando como se dijo anteriormente, que con los experimentos realizados con la máquina de inferencia se observarón ciertas variaciónes en los resultados obtenidos.

Por otra parte, de los experimentos realizados con sensibilidad se ha podido observar en las gráficas de sensibilidad absoluta, que las funciones uno y dos producen una sensibilidad absoluta estable para nosotros, no así las demas. Pero utilizando el concepto de variación en un mas menos diez por ciento, que representa los límites aceptables para nosotros en que la sensibilidad absoluta varia sin afectar seriamente los resultados, nos permite eliminar las funciones cinco, seis y siete, debido a que el resultado proporcionado de estas funciones resulta demasiado fuera de la variación permitida, aunque realmente no es aplicable trabajar con este concepto para estas funciones si nos permite eliminarlas, considerando por consiguiente que las otras tienen un mejor comportamiento, se presento también que el resultado obtenido en la variación mejorá levemente para las funciones que consideramos aceptables (uno, dos, tres y cuatro) en el intervalo considerado por MYCIN, ya que con un número menor de valores se obtiene una mejor media en la variación de la sensibilidad absoluta.

De la sensibilidad relativa se observo que los resultados obtenidos se comportan de un manera extraña para las funciones que se eliminarón, no así para las funciones uno a cuatro.

Por último, calcular los pesos globales de evidencias multiples en una manera natural sin hacer referencia a los métodos probabilísticos es una buena manera de hacerlo, considerando que si se utilizan los conceptos de isomorfismos se debe de estudiar su comportamiento obtenido de acuerdo a algun punto de vista, para nosotros el concepto de sensibilidad nos permitió eliminar algunas de las funciones y determinar cuales son mejores.

ANEXO A

Definición de GRUPO:

Sea G = <M,$\oplus$,0,-> un cuádruple; en donde M es un conjunto de valores por ejemplo u,X1,X2,X3 $\in$ M, $\oplus$ es una operación binaria, 0 es un elemento neutro y "-" es considerada la operación unaria inversa, se llama grupo con respecto a esta operación si se verifican las siguientes propiedades:

P1: $(X1 \oplus X2) \oplus X3 = X1 \oplus (X2 \oplus X3)$ Ley asociativa

P2: Existe una u $\in$ G tal que $X1 \oplus u = u \oplus X1 = X1$
en donde u = 0 (existencia del elemento neutro)

P3: Para cada X1 $\in$ G existe un -X1 $\in$ G tal que

$X1 \oplus -X1 = -X1 \oplus X1 = u$ existencia del simétrico

para el grupo multiplicativo -a = 1/a; y para el grupo aditivo -a queda igual.

Definición de Grupo Ordenado:

Sea G un grupo G = (M,$\oplus$,-,$\leq$), el grupo es ordenado, si para cualquier X1, X2, X3 $\in$ M, se tiene que;

$X1 \leq X2 \Rightarrow X1 \oplus X3 \leq X2 \oplus X3$

y si se tiene una operación conmutativa, el grupo se dice

Abeliano, ejemplo:

$$X1 \oplus X2 = X2 \oplus X1$$

Definición de Isomorfismo.

Sea M1 y M2 conjuntos, en X1, X2 ∈ M1 y Y1, Y2 ∈ M2 con operaciones ⊕1 sobre M1 y ⊕2 sobre M2, y con la función F que mapea de M1 a M2, si

$$F(X1 \oplus_1 X2) = F(X1) \oplus_2 F(X2) = Y1 \oplus_2 Y2$$

donde

$$Y1 = F(X1)$$

$$Y2 = F(X2)$$

se dice que los conjuntos M1 y M2 son isomorfos con la función F como isomorfismo.

B I B L I O G R A F I A

Hájek Petr: Combining Functions for Certainty Degress in Consulting Systems. Int. Journ. Man-Machine studie 22, 1985, 59-76.

Cuena et all: Inteligencia Artificial: Sistemas Expertos. Alianza Editorial, 1985.

Roman Paul: Some Modern Mathematics for Physicists and Other Outsiders. Pergamon. 1975.

Duda R., Nilsson Nils: Subjective Bayesian Methods for Rule-Based Inference Systems, SRI Project 4763, January 1976.

Ayres F.: Algebra Moderna, Schaum-Mcgraw-Hill, Septiembre 1985.

El jurado designado por la sección de Computación del Departamento de Ingeniería Eléctrica del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de Instituto Politécnico Nacional, aprobó esta tesis el 28 de Abril de 1988.

Dr. Guillermo Morales Luna

M. en C. César Galindo legaria

Dr. Zdenek Zdráhal Horová

NOMBRE DEL LECTOR	FECHA PREST.	FECHA DEVOL.
Dr. Guillermo Morales L.	29-11-95	[illegible]
Imelda Saldaña	17/06/[illegible]	