

Segmentación Probabilística de Imágenes y sus Aplicaciones

José Luis Marroquín
Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT)

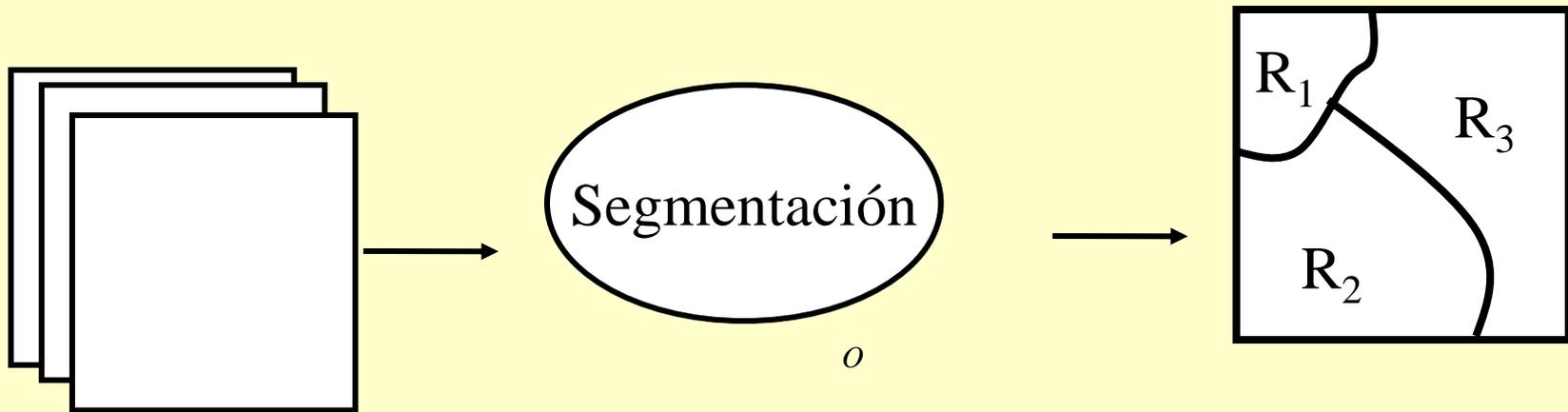
Cinvestav, México, Septiembre de 2008

Colaboradores:

Mariano Rivera
Alfonso Alba
Thalía Harmony
Omar Ocegueda
Carlos Angulo
Salvador Botello
Edgar Arce
Teresa Alarcón

Segmentación Probabilística: Teoría

Segmentación de Imágenes



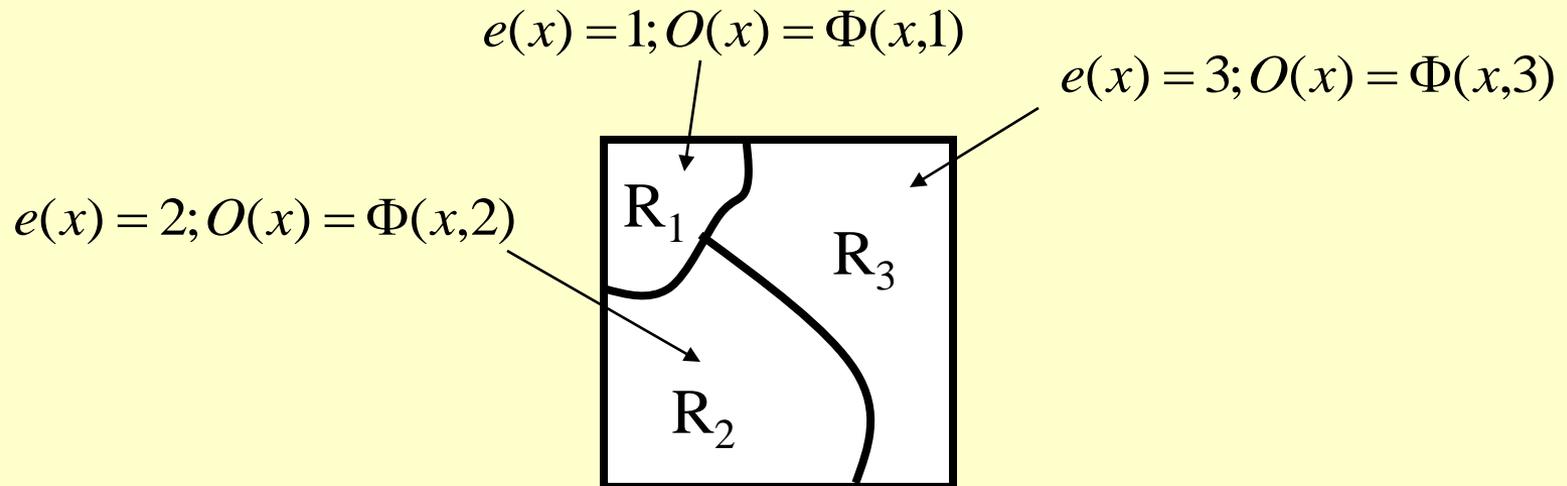
Imágenes de entrada O

Partición del espacio de píxeles en un conjunto de regiones disjuntas tales que la variación de un atributo dado dentro de cada una de ellas siga un modelo "simple"

Equivalentemente, encontrar:

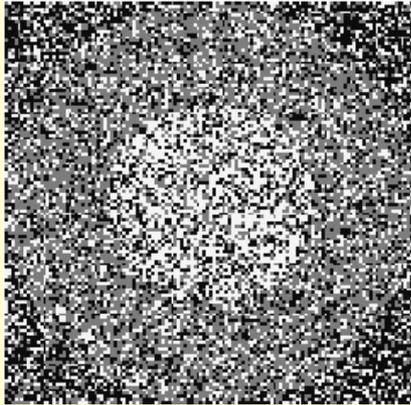
- Un conjunto de modelos $\Phi(x, k), k = 1, \dots, M$
- Un campo de etiquetas e

Tales que $x \in R_k \Rightarrow e(x) = k$ y $O(x) \approx \Phi(x, k)$

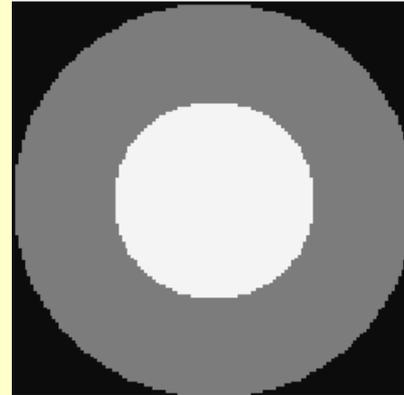


Ejemplo 1: Modelos Constantes

$$\Phi(x, k) = \theta_k$$



o



e

Ejemplo 2:

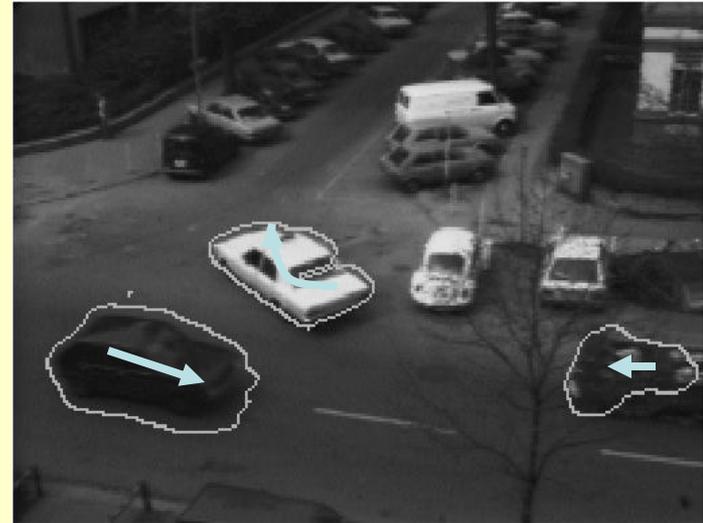
$$\Phi(x, k) = M_k x + b_k$$

M_k : Transformación Rígida

b_k : Vector de translación



O



e

El problema de segmentación no está bien planteado:

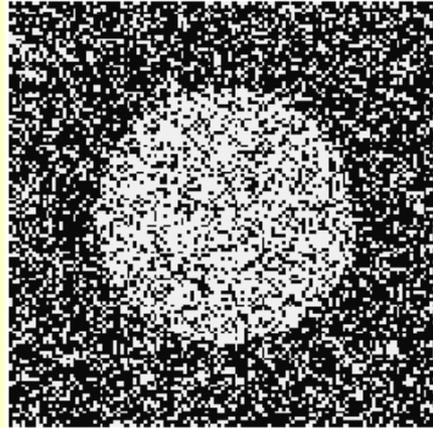
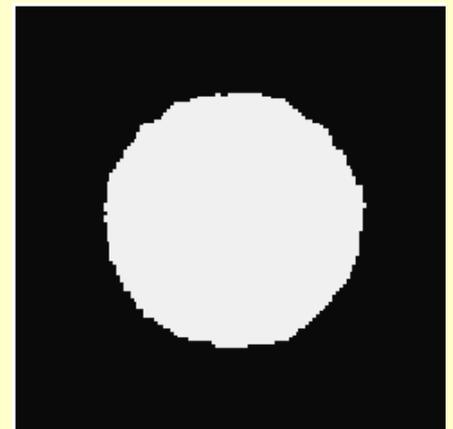
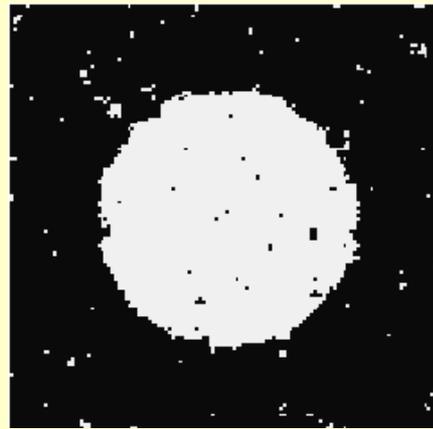
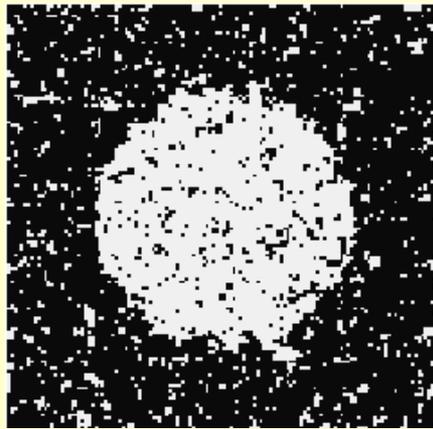
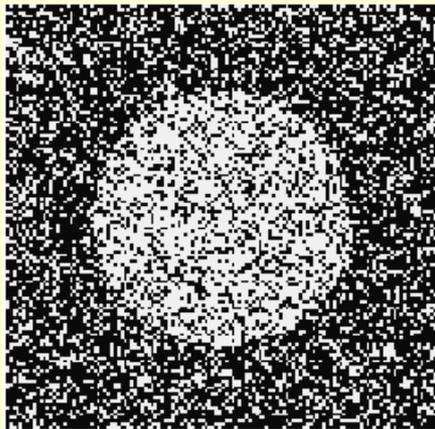
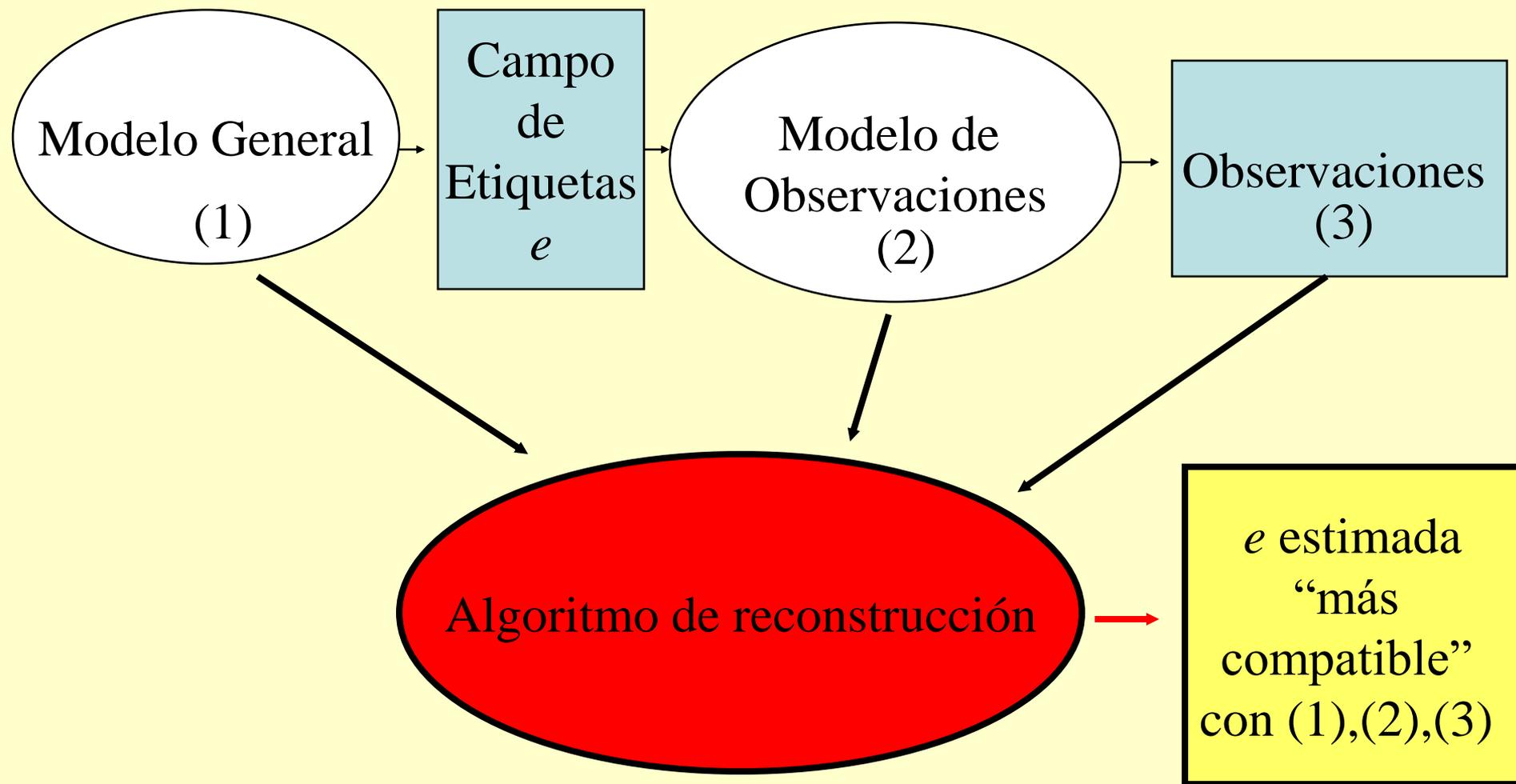


Imagen de Entrada



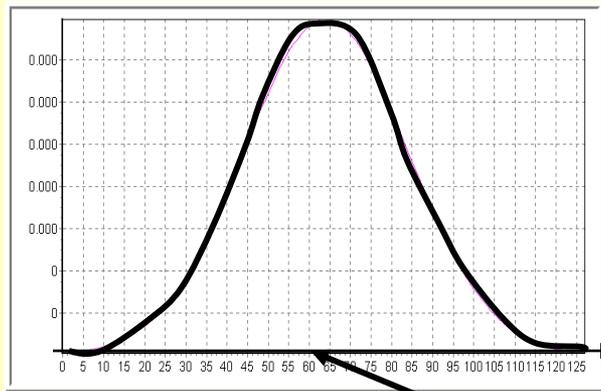
Segmentaciones en regiones con intensidad “alta” y “baja”



Estimación Bayesiana:

$$g = f + n$$

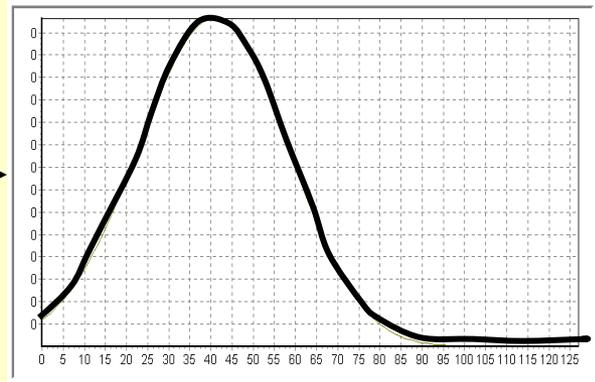
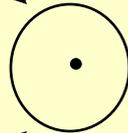
Estimar f dado g



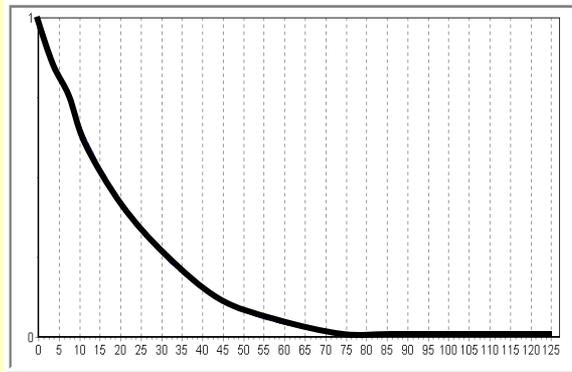
$$P(g|f) = P_n(g-f)$$

f

g



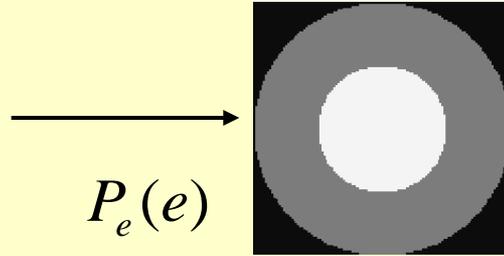
$$P(f|g) = P(g|f) P(f) / Z$$



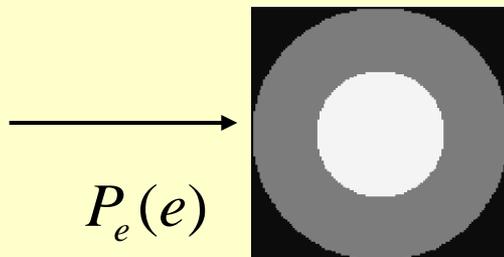
$P(f)$

Ejemplo: $g = 60$
 $P(g | f=20) = P(n=40)$

En el caso de la segmentación de imágenes,

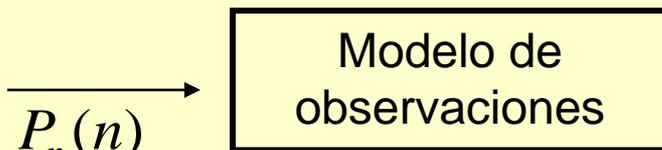


Campo de
etiquetas



Campo de etiquetas

“Ruido”



$$O(x) = \Phi(x, e(x)) + n(x)$$

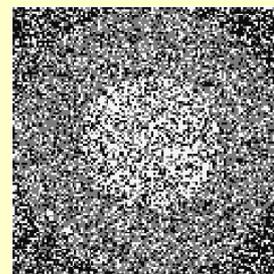
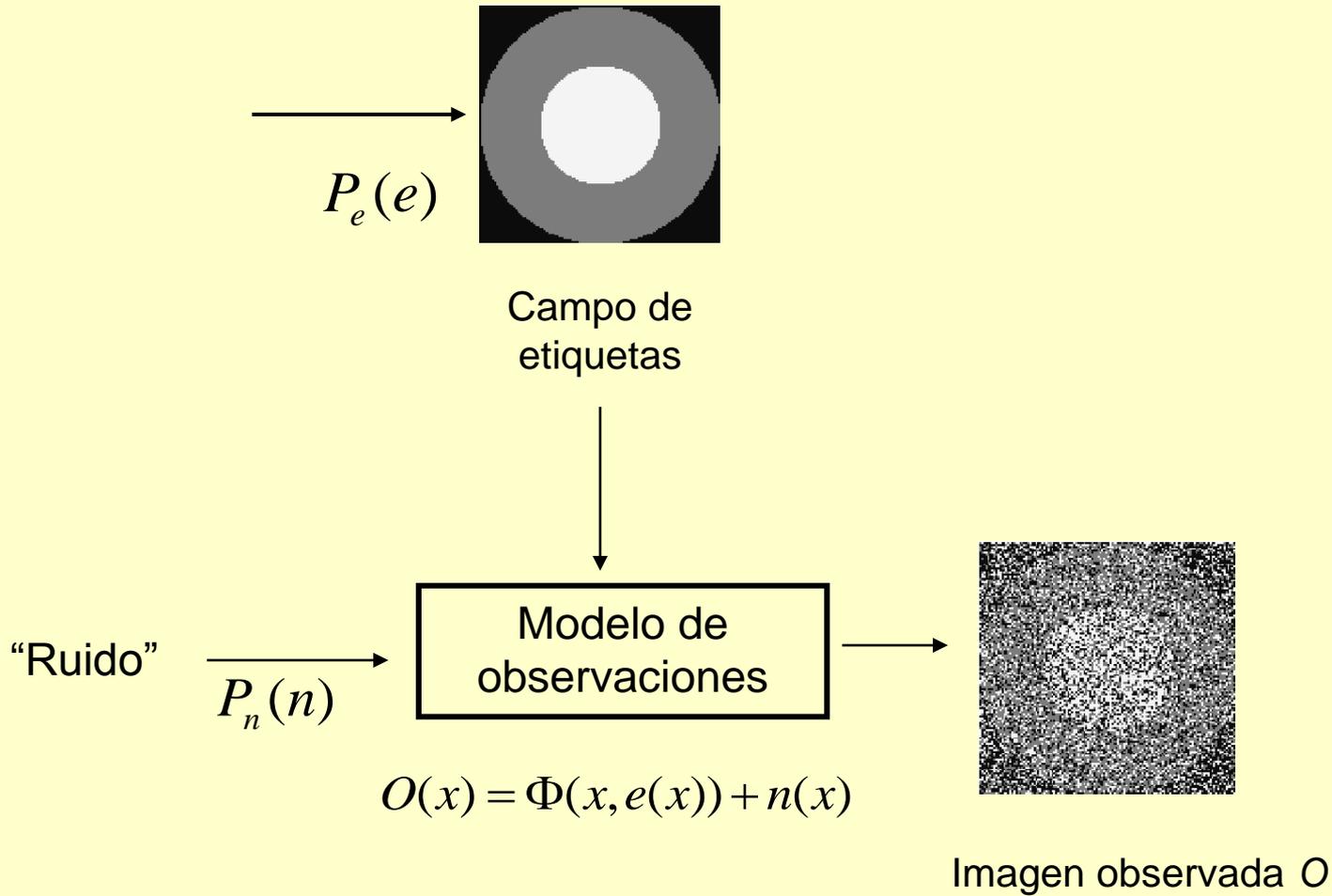
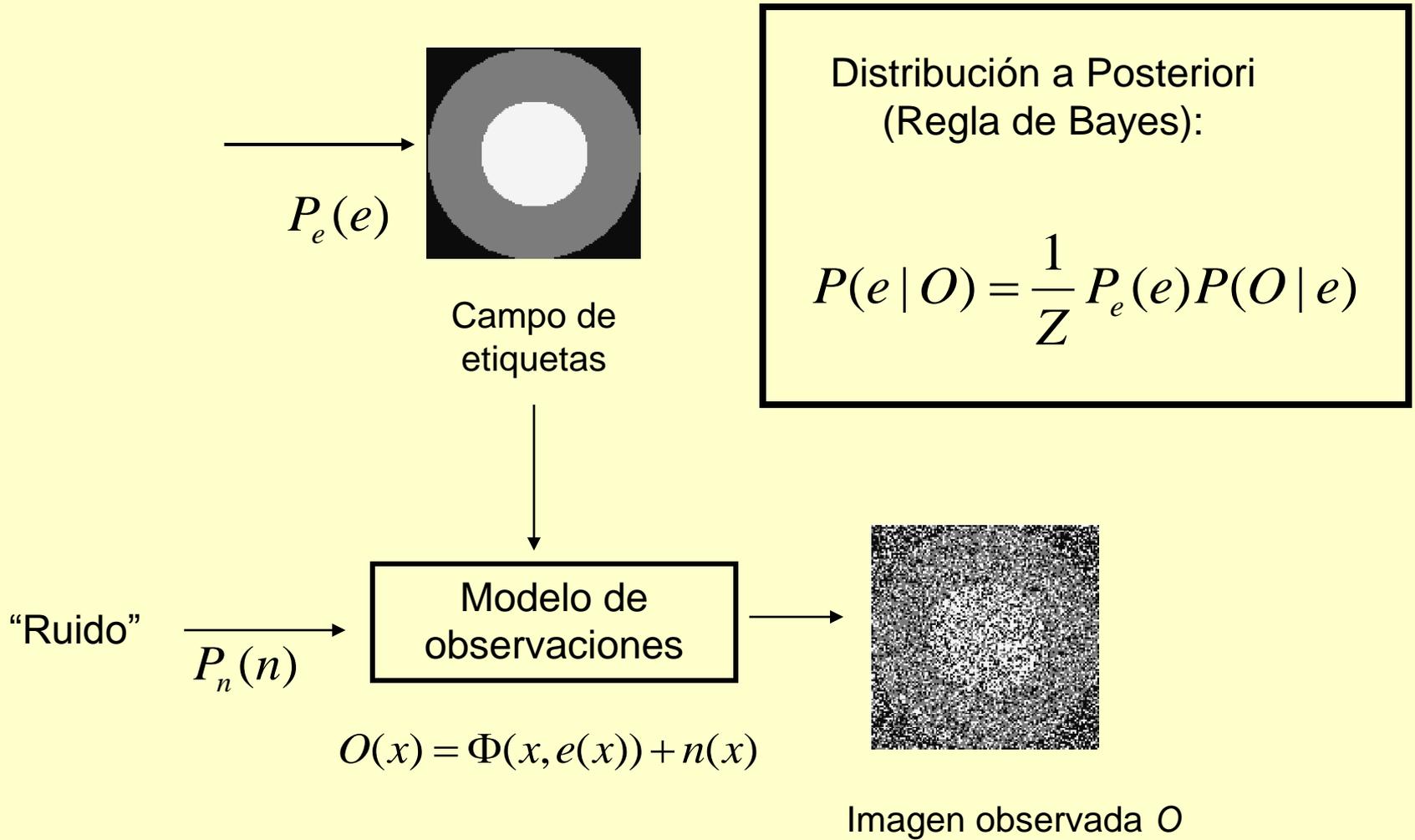


Imagen observada O

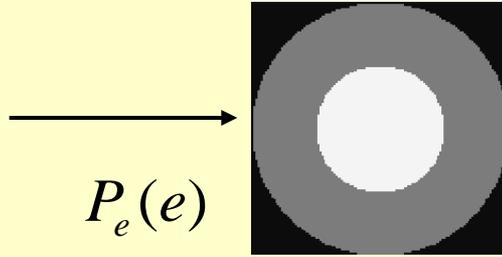


Verosimilitud: $P(O(x) | e(x) = k) = P_n(O(x) - \Phi(x, k))$

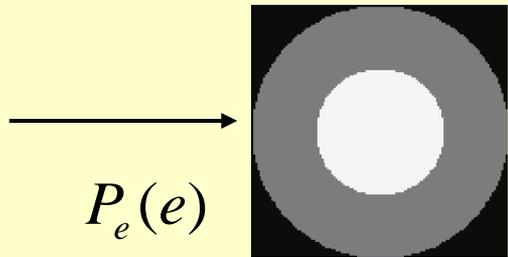


Verosimilitud: $P(O(x) | e(x) = k) = P_n(O(x) - \Phi(x, k))$

Distribuciones a priori para imágenes:



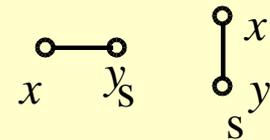
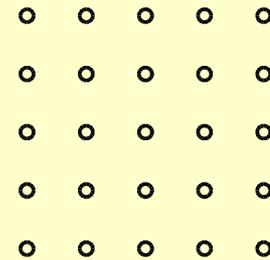
Campo de
etiquetas



Campo de etiquetas

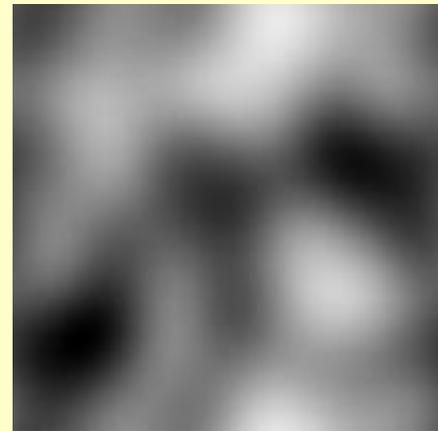
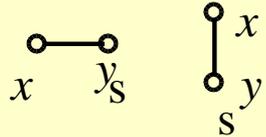
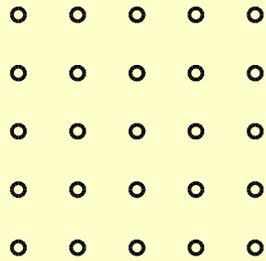
Distribuciones de Gibbs (Campos aleatorios Markovianos):

$$P_e(e) = \frac{1}{Z} \exp \left[-\lambda \sum_{\langle x,y \rangle} V(e(x), e(y)) \right]$$



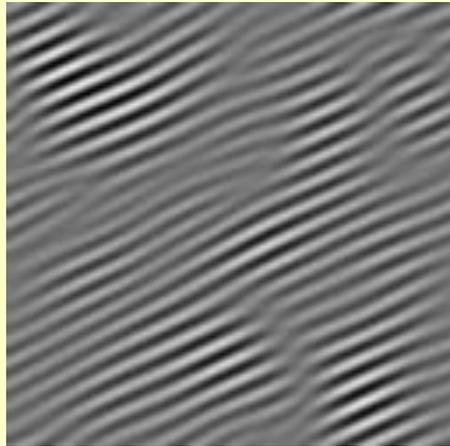
Para modelar campos suaves:

$$V(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\|^2$$



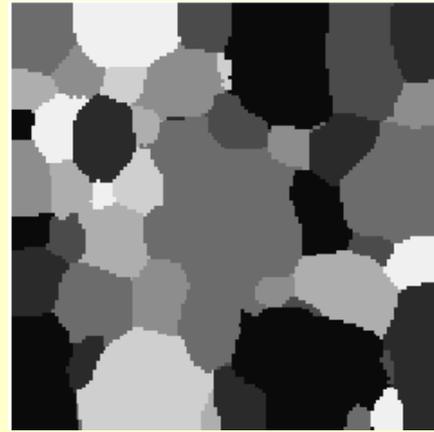
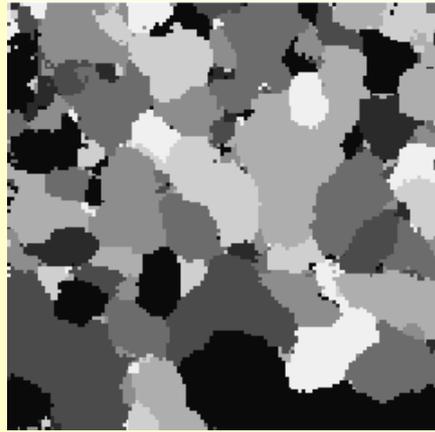
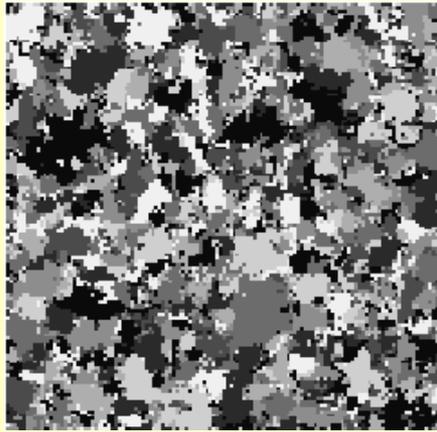
Para modelar campos de pasa-banda:

$$V(f(x), f(y)) = \left| f(x) \exp\left[\frac{i}{2} \omega_0 \cdot (y - x)\right] - f(y) \exp\left[\frac{i}{2} \omega_0 \cdot (x - y)\right] \right|^2$$



Para modelar campos de etiquetas:

$$V(e(x), e(y)) = \begin{cases} -1, & \text{si } e(x) = e(y) \\ +1, & \text{si } e(x) \neq e(y) \end{cases}$$



λ (Control de Granularidad)

$$P_e(e) = \frac{1}{Z} \exp \left[-\lambda \sum_{\langle x,y \rangle} V(e(x), e(y)) \right]$$

Distribución a Posteriori:

$$P(e | O) = \frac{1}{Z} P(O | e) P_e(e) = \frac{1}{Z} \exp[-U(e | O)]$$

$$U(e | O) = -\sum_x \log[P(O(x) | e(x))] + \lambda \sum_{\langle x, y \rangle} V(e(x), e(y))$$

Distribución a Posteriori:

$$P(e | O) = \frac{1}{Z} P(O | e) P_e(e) = \frac{1}{Z} \exp[-U(e | O)]$$

$$U(e | O) = -\sum_x \log[P(O(x) | e(x))] + \lambda \sum_{\langle x,y \rangle} V(e(x), e(y))$$

Ejemplo: Modelos constantes y ruido aditivo Gaussiano:

$$U(e | O) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_x (O(x) - \theta_{e(x)})^2 + \lambda \sum_{\langle x,y \rangle} V(e(x), e(y))$$

Distribución a Posteriori:

$$P(e | O) = \frac{1}{Z} P(O | e) P_e(e) = \frac{1}{Z} \exp[-U(e | O)]$$

$$U(e | O) = -\sum_x \log[P(O(x) | e(x))] + \lambda \sum_{\langle x,y \rangle} V(e(x), e(y))$$

Ejemplo: Modelos constantes y ruido aditivo Gaussiano:

$$U(e | O) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_x (O(x) - \theta_{e(x)})^2 + \lambda \sum_{\langle x,y \rangle} V(e(x), e(y))$$

Estimador óptimo (MAP):

$$e^* \rightarrow \min U(e | O) \quad (\text{problema de optimización combinatoria})$$

Ejemplo

Imagen de
Etiquetas
(desconocida)

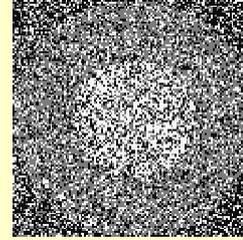
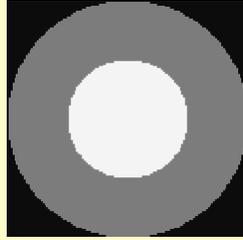


Imagen observada

Ejemplo

Imagen de
Etiquetas
(desconocida)

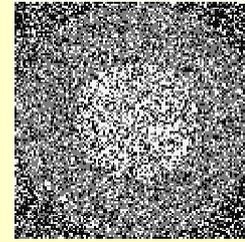
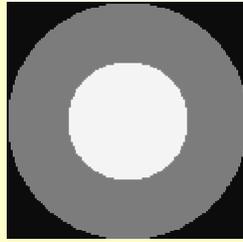
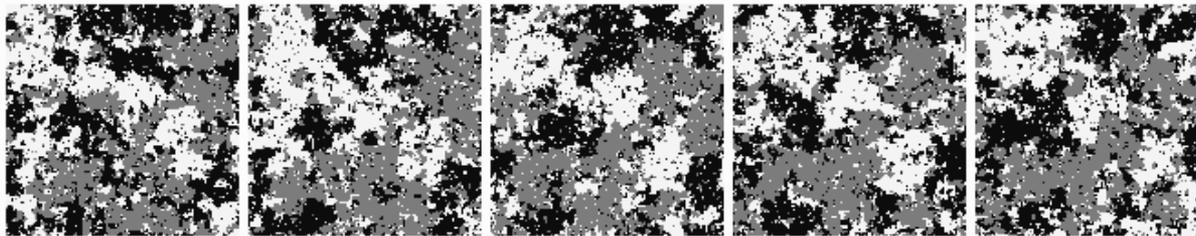
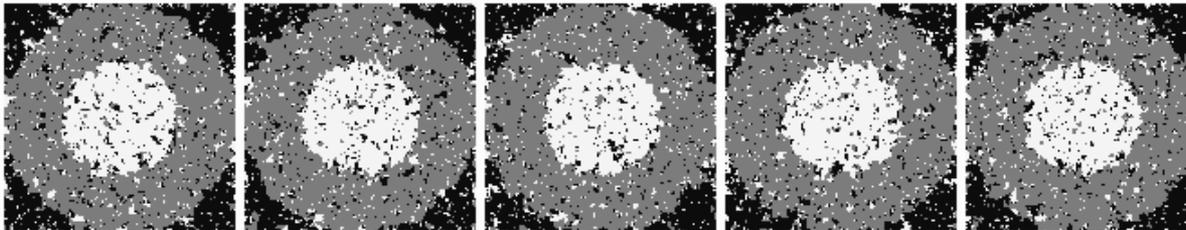


Imagen observada



Distribución a priori (Muestras obtenidas con el muestreador Gibbsiano (MCMC))



Distribución a posteriori

Ejemplo

Imagen de
Etiquetas
(desconocida)

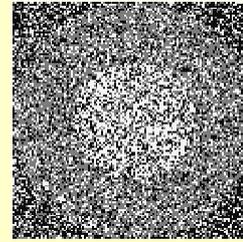
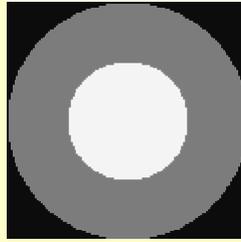
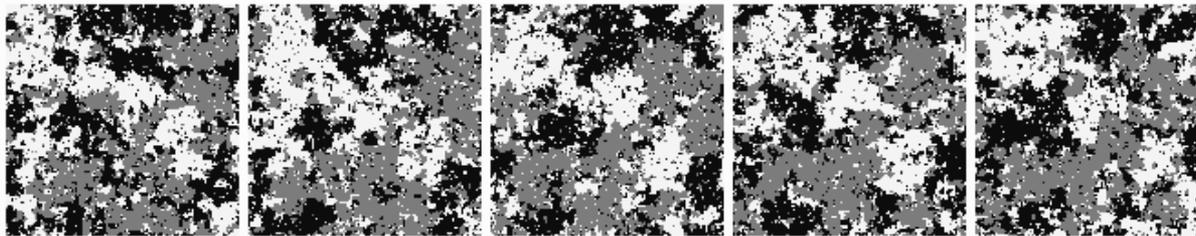
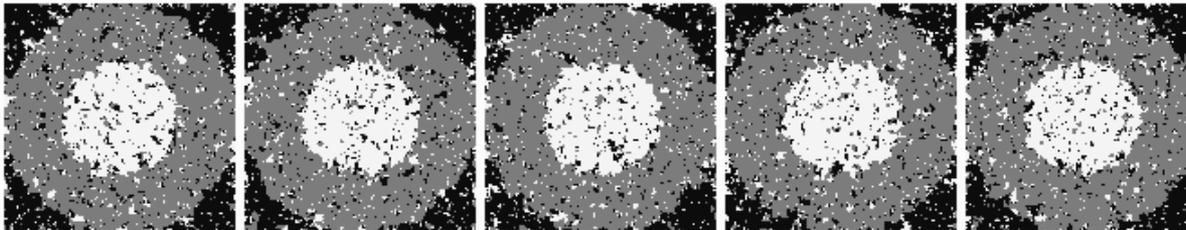


Imagen observada



Distribución a priori (Muestras obtenidas con el muestreador Gibbsiano)

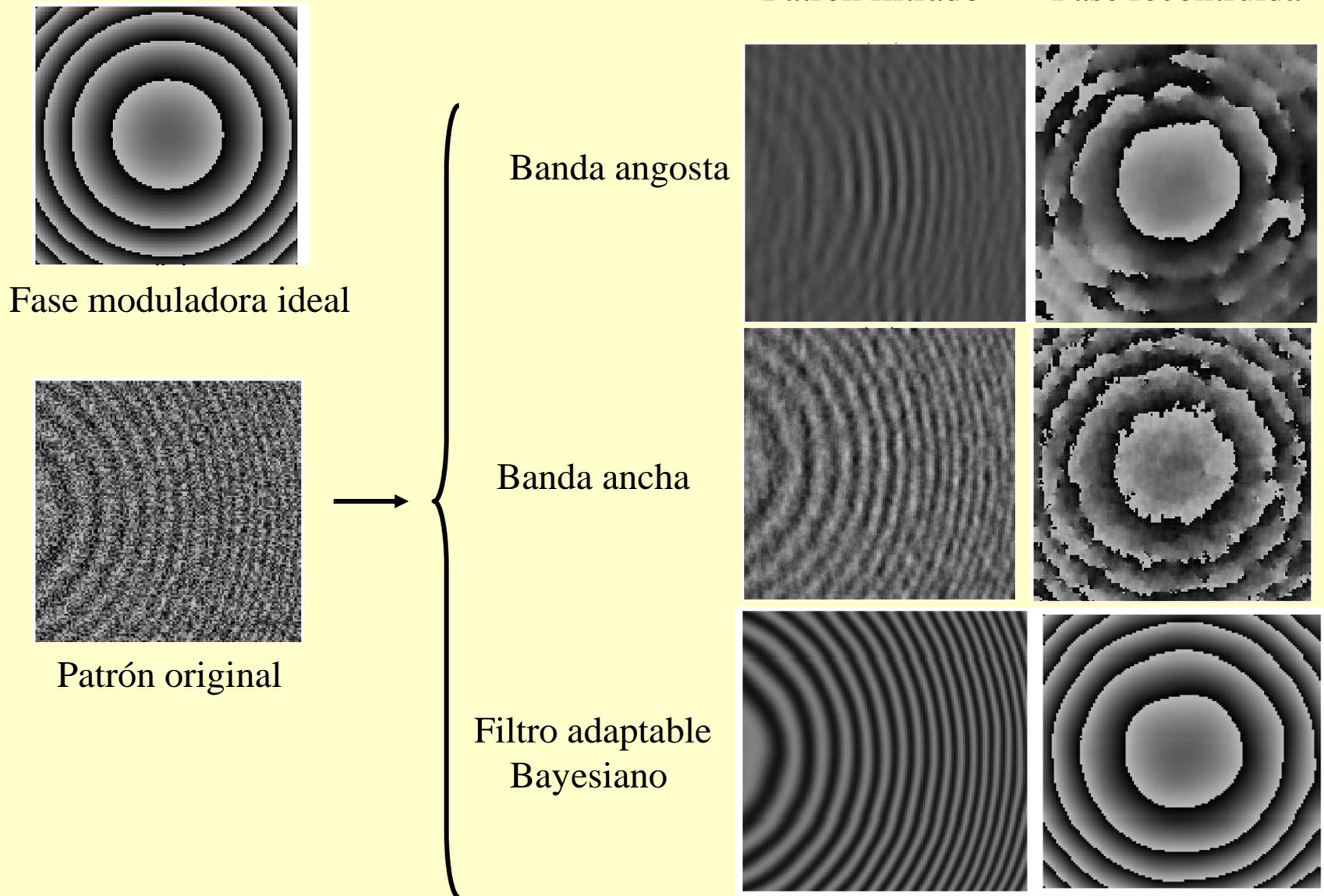


Distribución a posteriori

Estimador Optimo



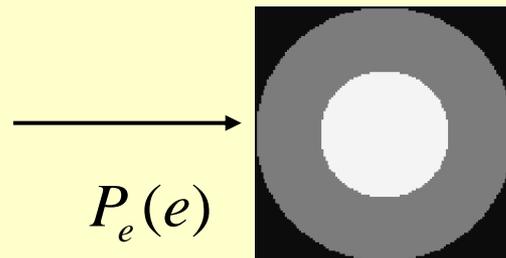
Filtrado adaptable de patrones de franjas (JOSA, 1998)



Problemas en el caso de campos discretos:

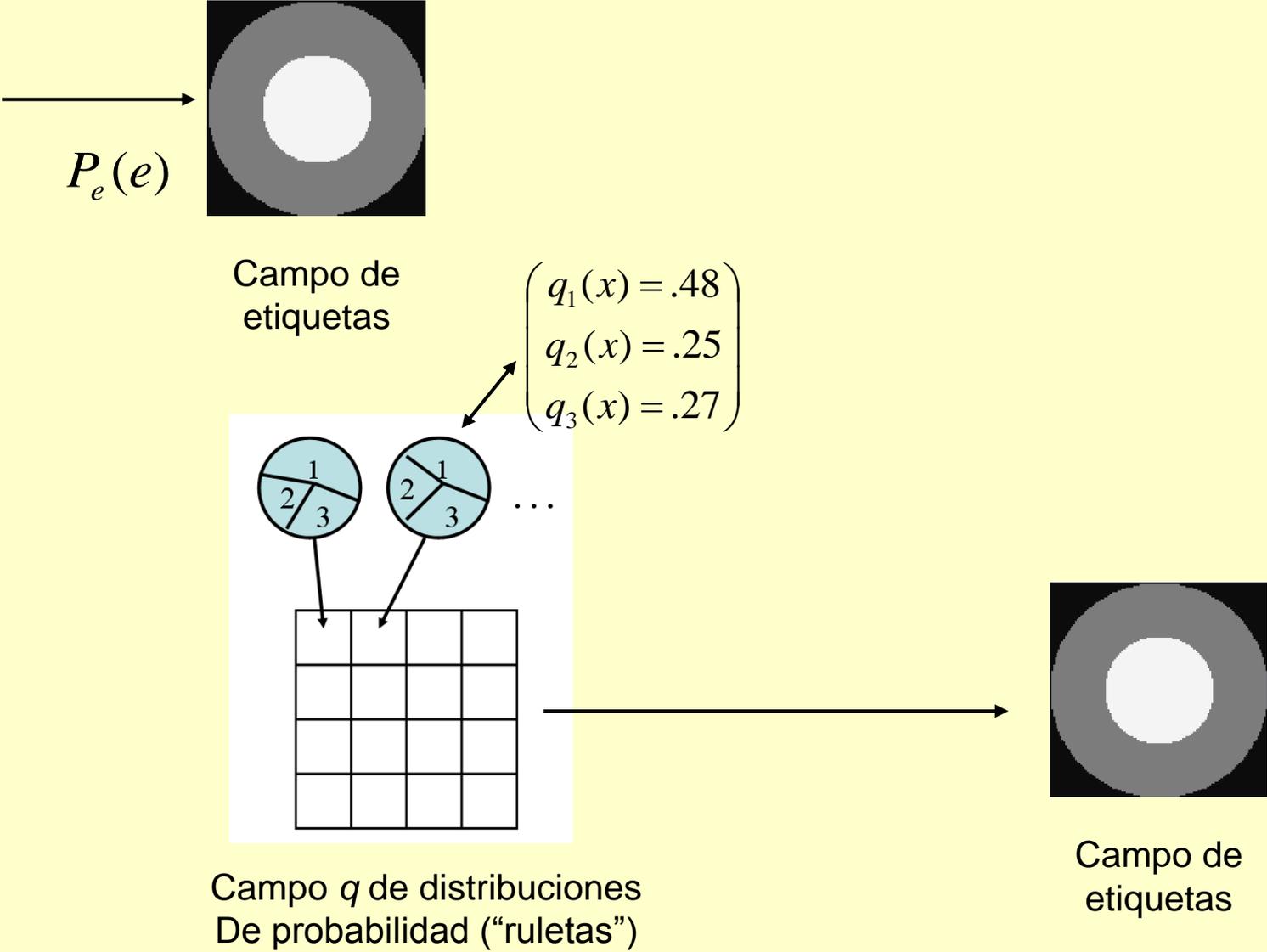
- Complejidad computacional del problema de optimización combinatoria.
- Cuando se desconocen los parámetros de los modelos, se tiene un problema de programación mixta ; para su solución se requieren métodos de 2 pasos :
 - 1: Calcular la segmentación dados los modelos ;
 - 2: Calcular los modelos dada la segmentación ;
- Estos métodos de 2 pasos son computacionalmente caros y de convergencia difícil a la solución correcta.

Idea: cambiar el modelo de generación del campo de etiquetas:

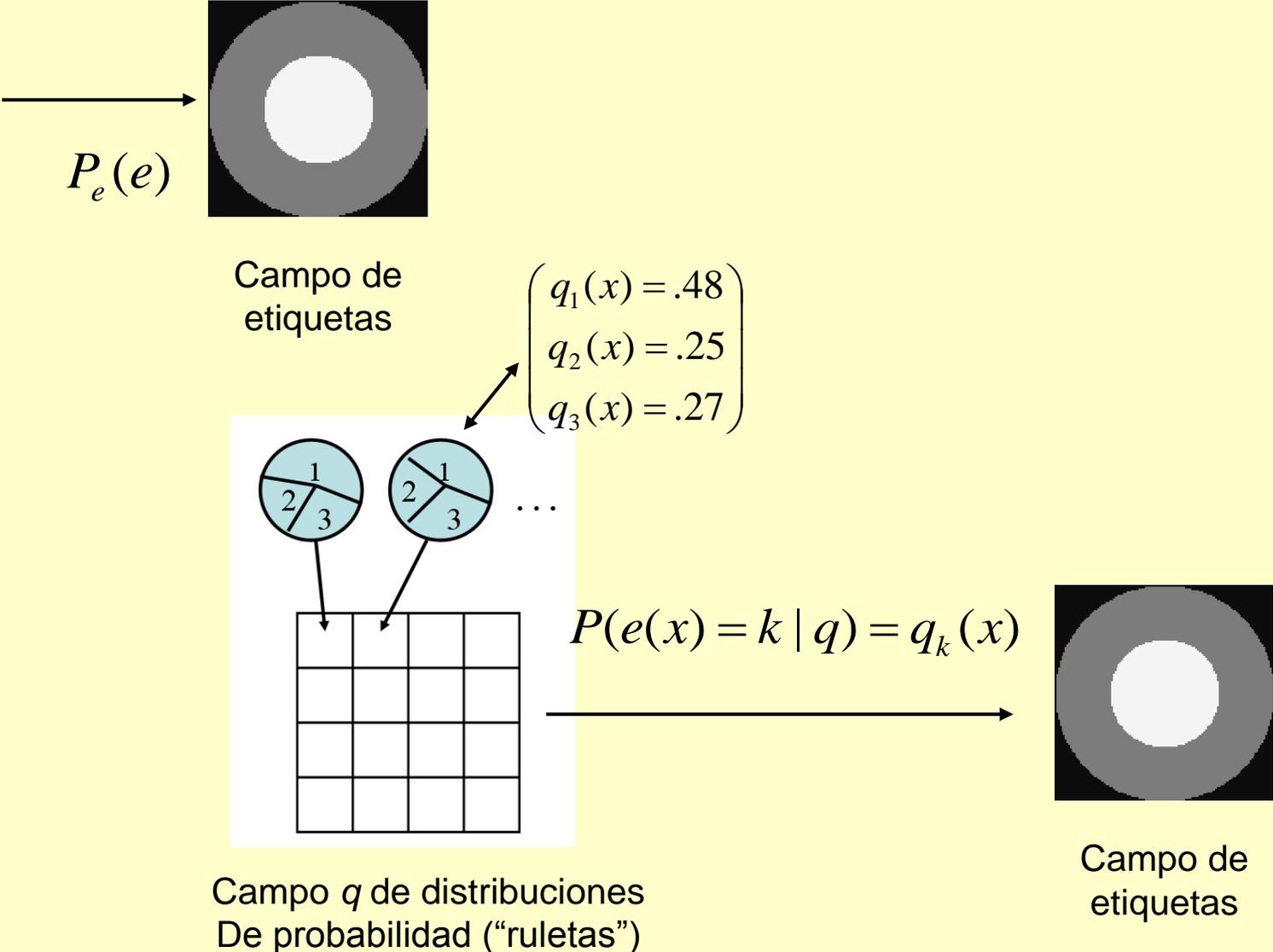


Campo de
etiquetas

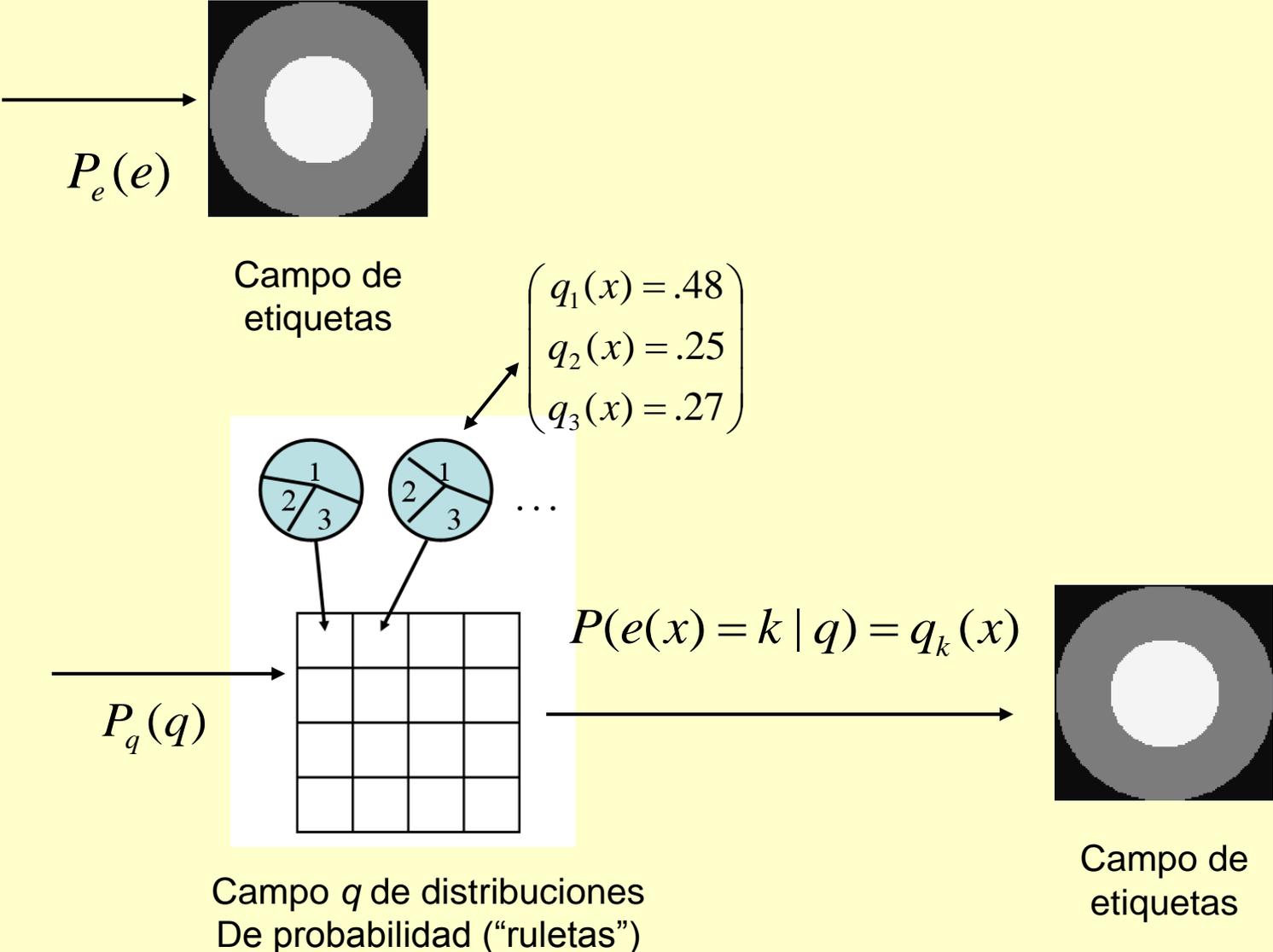
Idea: cambiar el modelo de generación del campo de etiquetas:



Idea: cambiar el modelo de generación del campo de etiquetas:



Idea: cambiar el modelo de generación del campo de etiquetas:



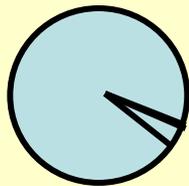
Distribución a posteriori: $P(q | O) = \frac{1}{Z} \exp[-U(q | O)]$

$$U(q | O) = -\sum_x \log \left[\sum_k q_k(x) P(O(x) | e(x) = k) \right] + \lambda \sum_x \| q(x) - q(y) \|^2$$

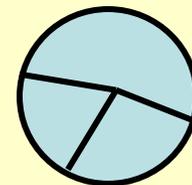
Cuando las distribuciones (ruletas) $q(x)$ tienen baja entropía se reduce a:

$$U(q | O) = \sum_x \sum_k \log [P(O(x) | e(x) = k)] q_k^2(x) + \lambda \sum_{\langle x, y \rangle} \| q(x) - q(y) \|^2$$

Baja entropía



Alta entropía



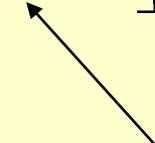
Distribución a priori para el campo q :

$$P_q(q) = \frac{1}{Z} \exp \left[-\lambda \sum_{\langle x,y \rangle} \|q(x) - q(y)\|^2 + \mu \sum_x \sum_k q_k^2(x) \right]$$

con

$$q_k(x) \geq 0$$
$$\sum_k q_k(x) = 1$$

Medida cuadrática de Entropía (índice de Gini)



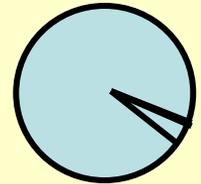
Distribución a priori para el campo q :

$$P_q(q) = \frac{1}{Z} \exp \left[-\lambda \sum_{\langle x,y \rangle} \|q(x) - q(y)\|^2 + \mu \sum_x \sum_k q_k^2(x) \right]$$

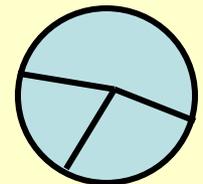
Favorece campos
Suaves (ruletas vecinas
Tienden a ser parecidas)

Favorece distribuciones
 q de baja entropía:

Baja entropía



Alta entropía



Distribución a posteriori (ruido aditivo Gaussiano):

$$P(q | O) = \exp[-U(q | O)]$$

$$U(q | O) = \sum_x \sum_k \left[\frac{1}{2\sigma^2} (O(x) - \Phi(x, k))^2 - \mu \right] q_k^2(x) + \lambda \sum_{\langle x, y \rangle} \| q(x) - q(y) \|^2$$

$-\log P(O(x) | e(x) = k)$

Control de entropía
De cada distribución $q(x)$

Control de granularidad
(suavidad del campo q)

Estimador óptimo:

$$q^* \rightarrow \min U(q | O)$$

Sujeto a :

$$q_k(x) \geq 0, \text{ para todo } k, x$$

$$\sum_k q_k(x) = 1, \text{ para todo } x$$

Problema de programación cuadrática
con restricciones lineales !!

$$e^*(x) \rightarrow \max_{e(x)} q_{e(x)}^*(x)$$

Si no se conocen los parámetros θ de los modelos Φ :

$$U(q, \theta | O) = \sum_x \sum_k \left[\frac{1}{2\sigma^2} (O(x) - \Phi(x, k))^2 - \mu \right] q_k^2(x) + \lambda \sum_{\langle x, y \rangle} \| q(x) - q(y) \|^2$$

Depende de θ

$$\Phi(x, k) = \theta_k$$

$$\Phi(x, k) = \theta_k \cdot x$$

Modelo general lineal:

$$\Phi(x, k) = \sum_j \theta_{kj} N_j(x)$$

Funciones base
(polinomios, splines, etc.)

Si se tiene conocimiento a priori sobre θ

$$U(q, \theta | O) = \sum_x \sum_k \left[\frac{1}{2\sigma^2} (O(x) - \Phi(x, k))^2 - \mu \right] q_k^2(x) + \lambda \sum_{\langle x, y \rangle} \|q(x) - q(y)\|^2 - \log P_\theta(\theta)$$

$$q^*, \theta^* \rightarrow \min U(q, \theta | O)$$

Sujeto a :

$$q_k(x) \geq 0, \text{ para todo } k, x$$

$$\sum_k q_k(x) = 1, \text{ para todo } x$$

$\Phi(x, k)$ modelo general lineal y $P_\theta(\theta)$ Gaussiana

⇓

$U(q, \theta | O)$ cuadrática en q dado θ

cuadrática en θ dado q

$$e^*(x) \rightarrow \max_{e(x)} q_{e(x)}^*(x)$$

IEEE Trans. On PAMI, 2003

IEEE Trans. On Image Processing, 2007

Algoritmo de minimización (modelos generales lineales): $\Phi(x, k) = \sum_i \theta_{ki} B_i(x)$

Actualización de q :

$$q_k(x) = \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^K \frac{M_i(x)}{A_i(x)}\right)}{A_k(x) \sum_{i=1}^k \frac{1}{A_i(x)}} + \frac{M_k(x)}{A_k(x)},$$

$$M_k(x) = \lambda \sum_{y \in N_x} q_k(y),$$

$$A_k(x) = (O(x) - \Phi(x, k))^2 + \lambda |N_x| - \mu.$$

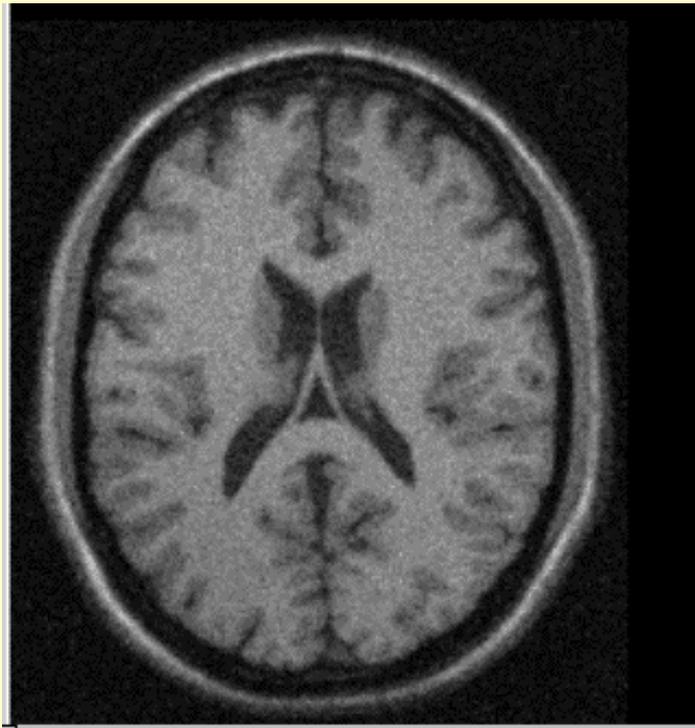
Actualización de θ : resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\sum_i \theta_{ki} \sum_x q_k^2(x) B_i(x) B_j(x) = \sum_x q_k^2(x) O(x) B_j(x), \text{ para cada } k$$

Aplicaciones

Segmentación de imágenes de resonancia magnética del cerebro

Clasificar cada voxel en 3 clases de tejido



Mat. gris



Mat. blanca

LCR

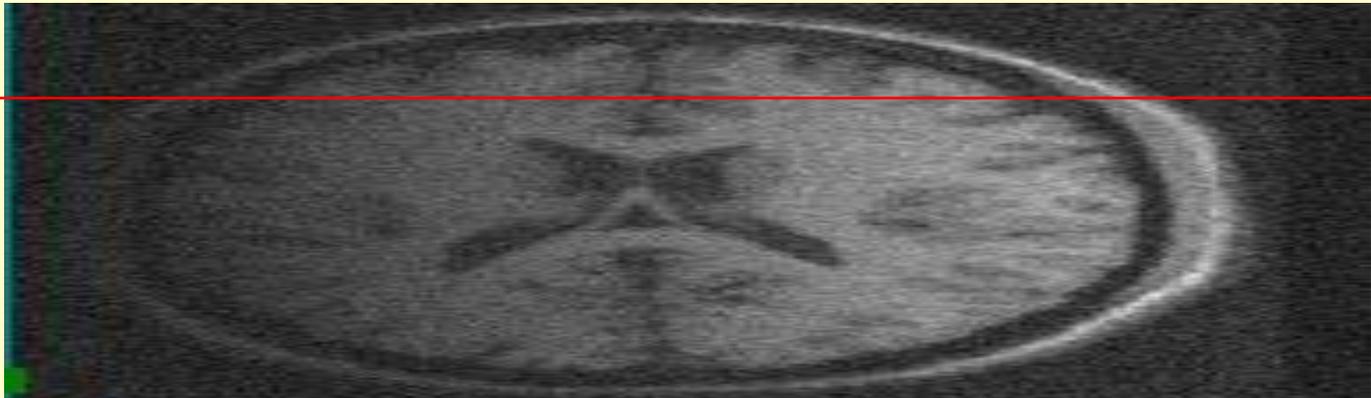
Aplicaciones:

- Diagnóstico (cuantificación de volúmenes)
- Visualización (ayuda para cirugía)



- Construcción de modelos (tomografía eléctrica)
- Estudios estadísticos, etc.

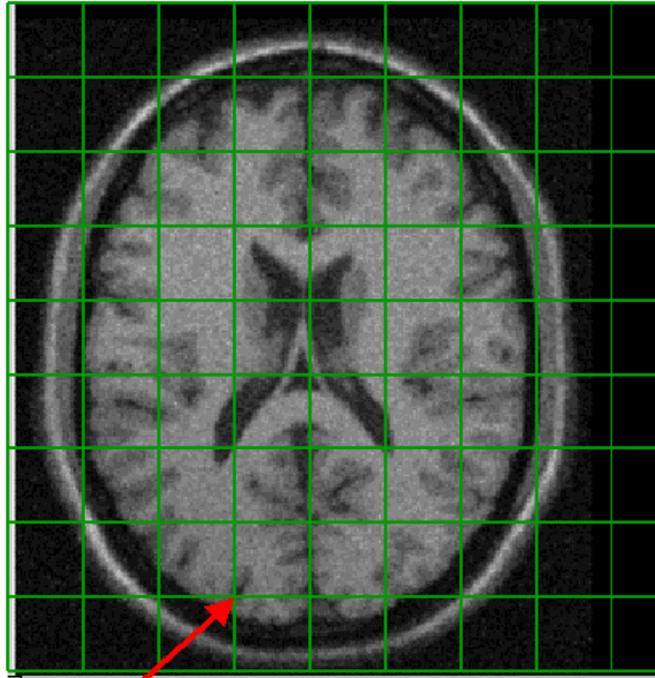
Dificultades



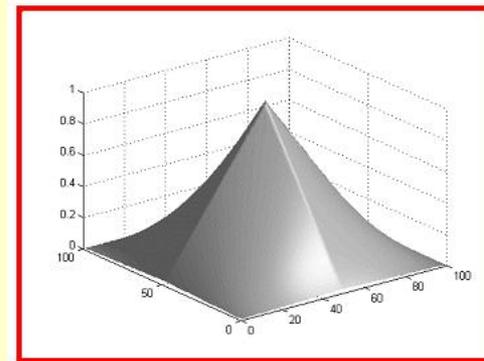
Modelos de Intensidad:

$$O(x) = \Phi(x, e(x)) + n(x)$$

$$\Phi(x, k) = \sum_j \theta_{kj} N_j(x)$$



θ_{kj}



$N_j(x)$

Distribución a priori para θ

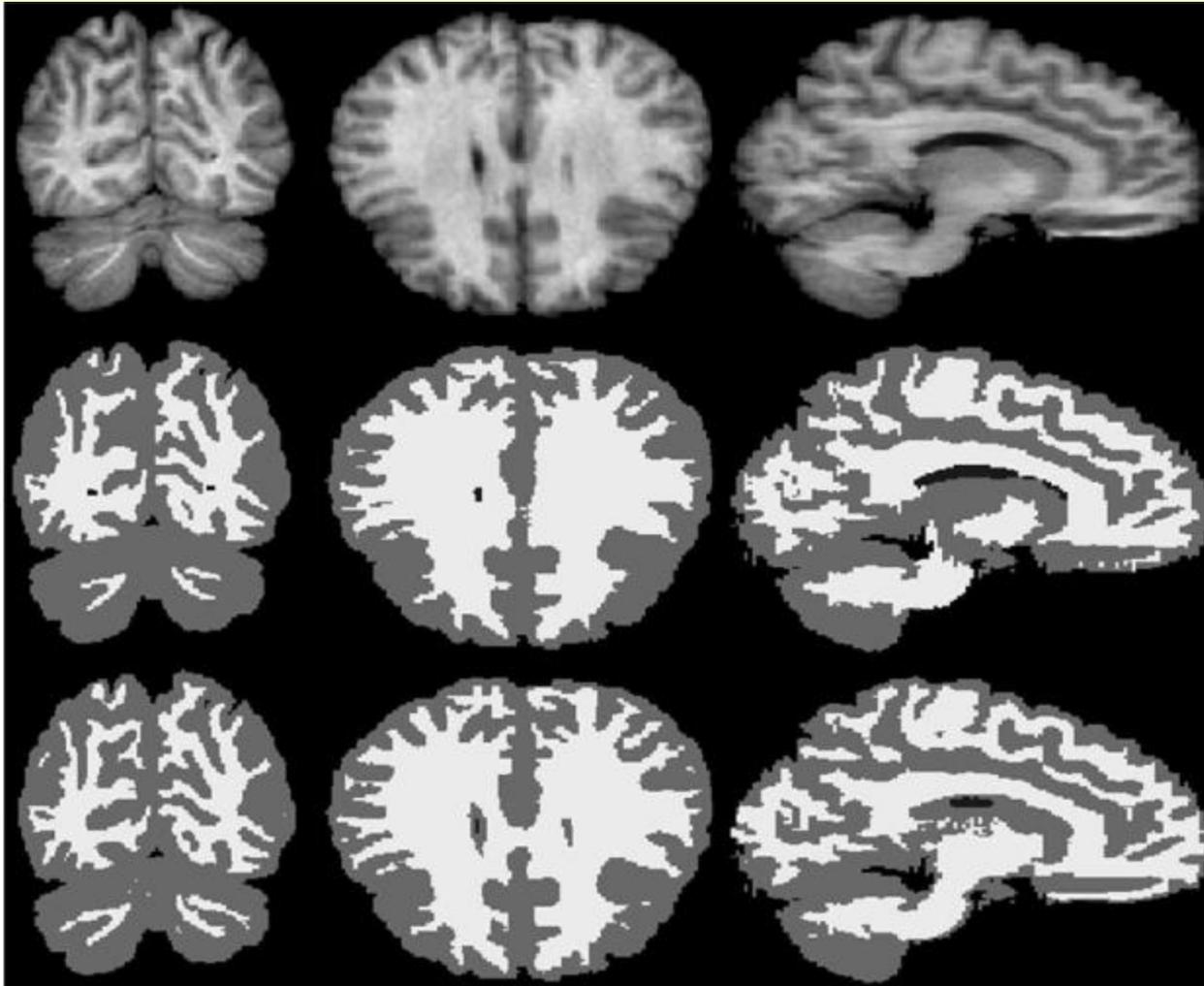
$$P_{\theta}(\theta) = \frac{1}{Z_{\theta}} \exp \left[-\eta \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_k |\theta_{ki} - \theta_{kj}|^2 \right]$$

Distribución a posteriori:

$$U(q, \theta | O) = \sum_x \sum_k \left[\frac{1}{2\sigma^2} (O(x) - \Phi(x, k))^2 - \mu \right] q_k^2(x) + \lambda \sum_{\langle x, y \rangle} \| q(x) - q(y) \|^2 \\ + \eta \sum_{\langle i, j \rangle} \sum_k | \theta_{ki} - \theta_{kj} |^2$$

Algoritmo de minimización:

alterna iteraciones de Gauss-Seidel para q y para θ

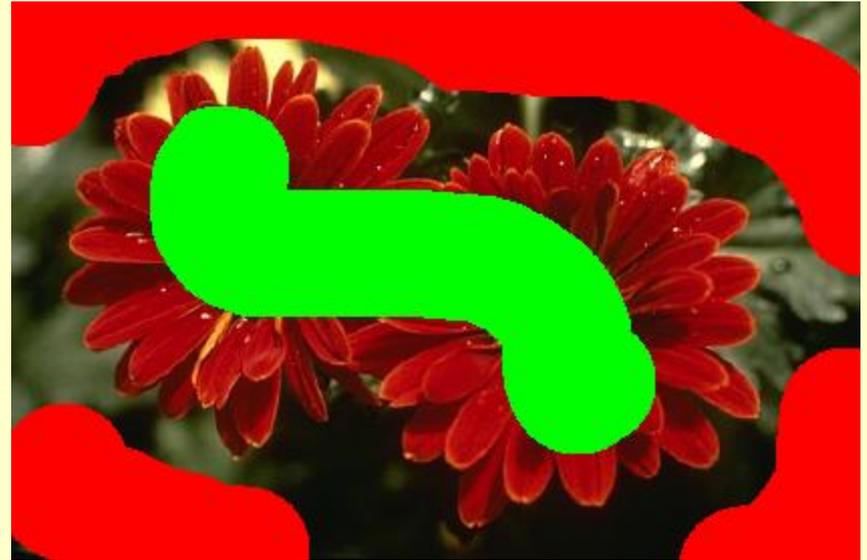


Imágenes observadas
(cortes de un volumen)

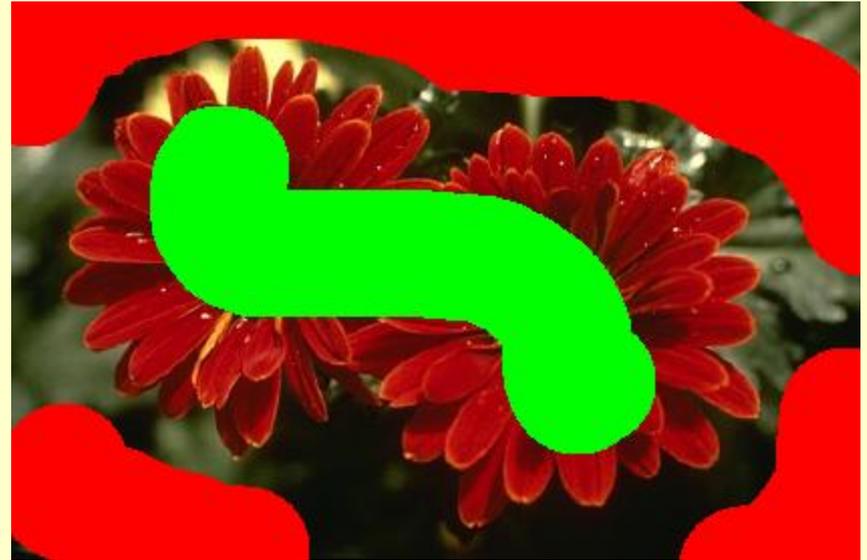
Segmentación manual
(experto)

Segmentación
automática

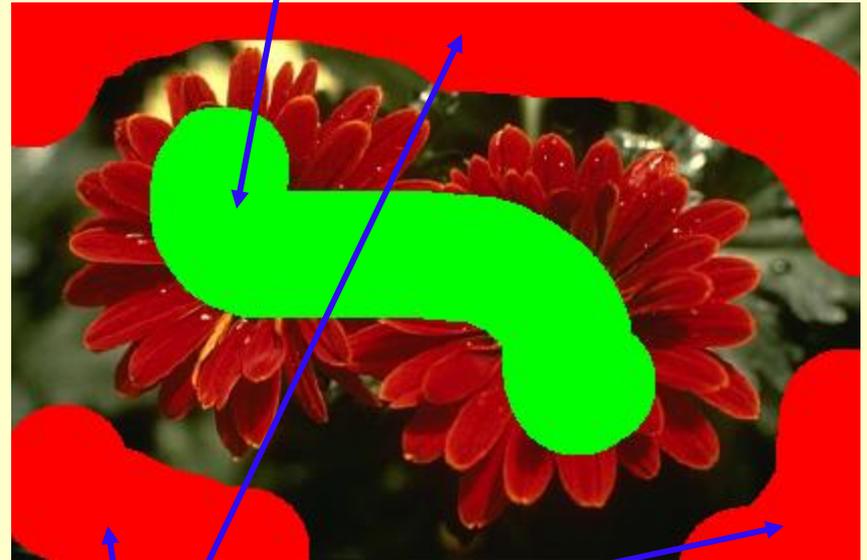
Segmentación interactiva:



Segmentación interactiva:



$P(O | e = 2)$

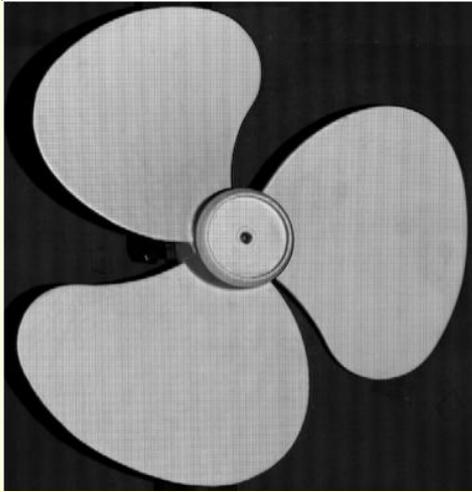


$P(O | e = 1)$

Verosimilitudes: distribuciones
Empíricas de las regiones roja y verde

$$U(q | O) = \sum_x \sum_k [-\log P(O(x) | e(x) = k) - \mu] q_k^2(x) + \lambda \sum_{\langle x, y \rangle} \| q(x) - q(y) \|^2$$

Digitalización 3D



Objeto a Digitalizar

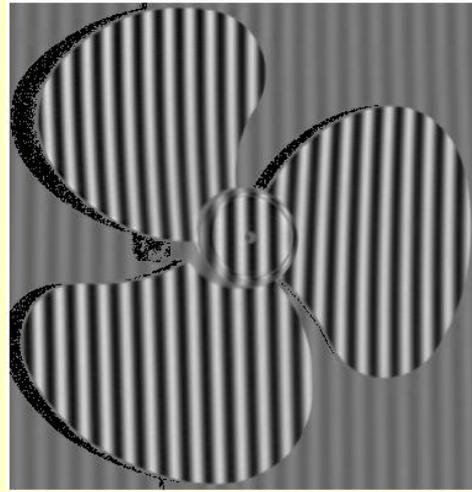


Imagen de franjas

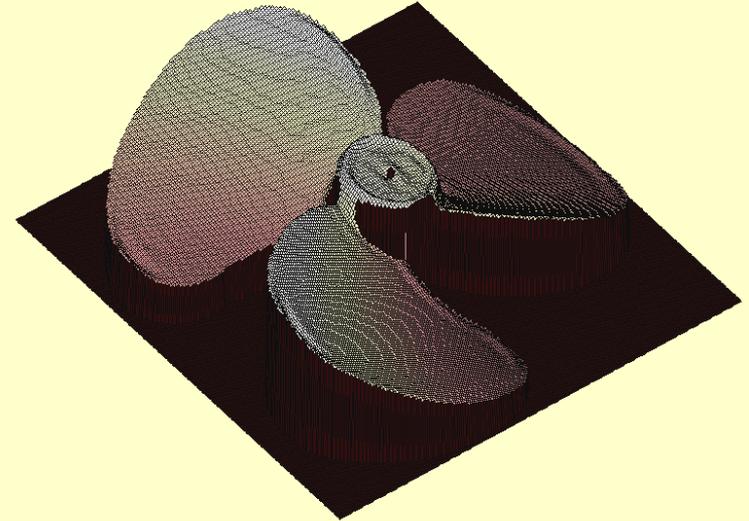


Imagen de rango

Segmentación de imágenes de rango de objetos polihédricos en términos de regiones planas

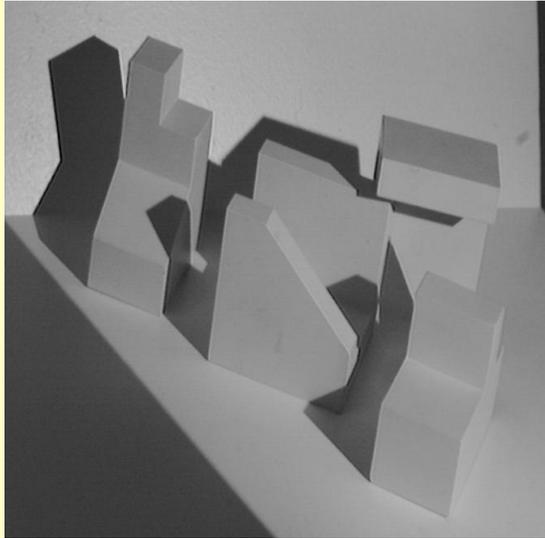


Imagen de intensidad



Imagen de rango

Segmentación de imágenes de rango de objetos polihédricos en términos de regiones planas

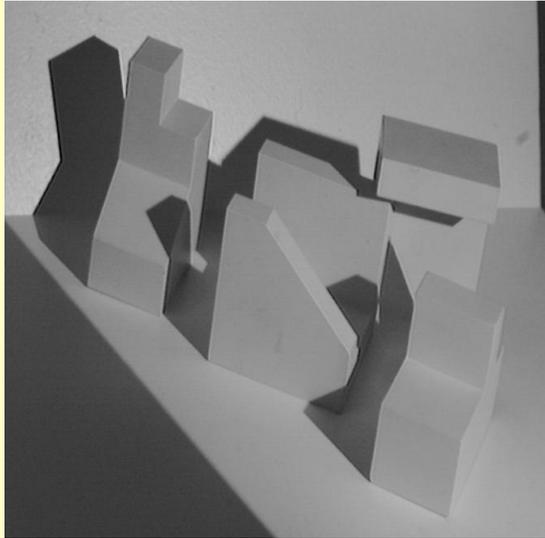


Imagen de intensidad



Imagen de rango

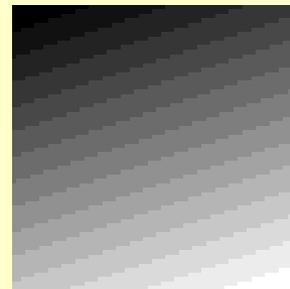
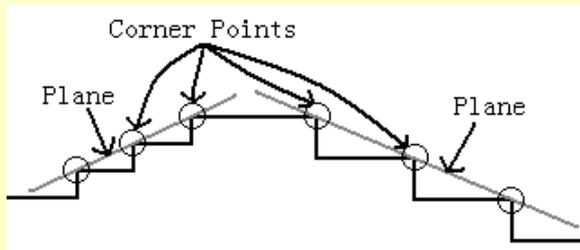
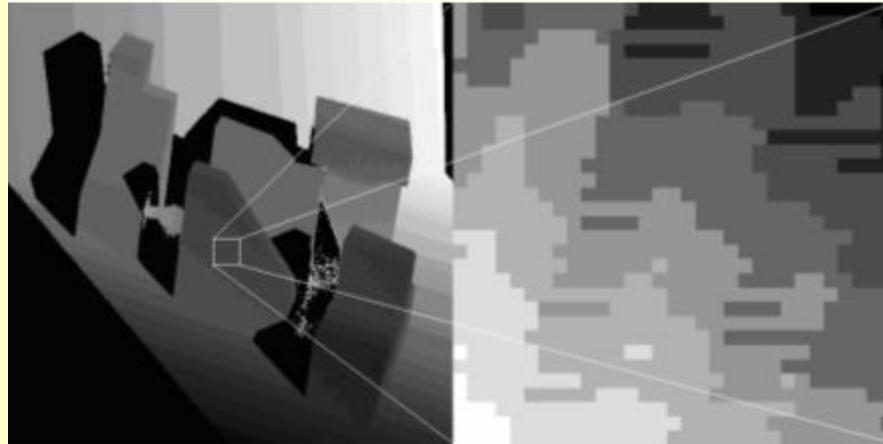
$$U(q, \theta | O) = \sum_x \sum_k \left[\frac{1}{2\sigma^2} (O(x) - \Phi(x, k))^2 - \mu \right] q_k^2(x) + \lambda \sum_{\langle x, y \rangle} \| q(x) - q(y) \|^2$$

↑
planos

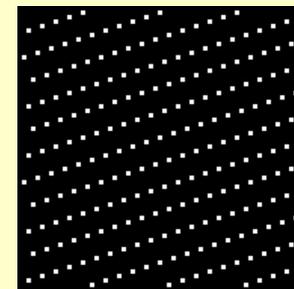
←

Adaptaciones:

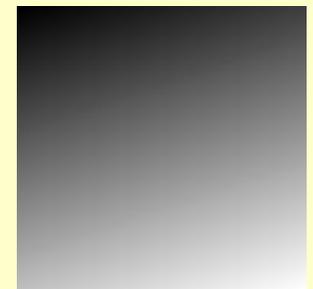
- Selección de observaciones confiables



Datos



Puntos-esquina
en 2D



Plano ajustado

Adaptaciones:

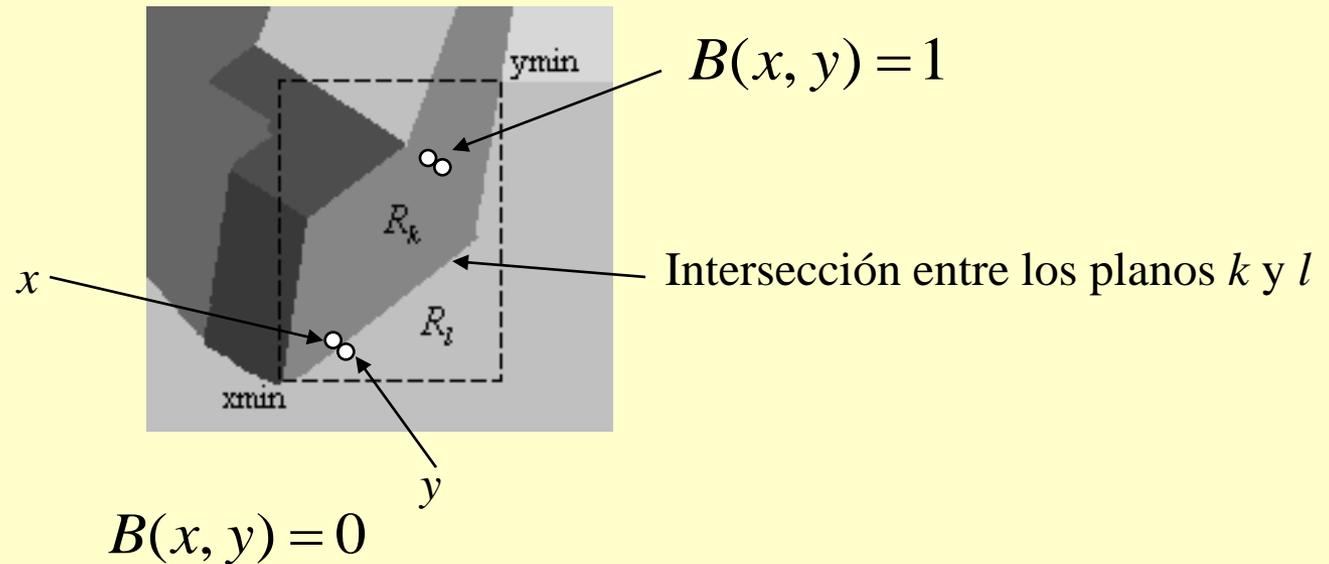
- Fronteras rectas entre regiones:

reemplazar el término de interacción espacial:

$$\sum_{\langle x,y \rangle} \|q(x) - q(y)\|^2$$

por

$$\sum_{\langle x,y \rangle} B(x,y) \|q(x) - q(y)\|^2$$



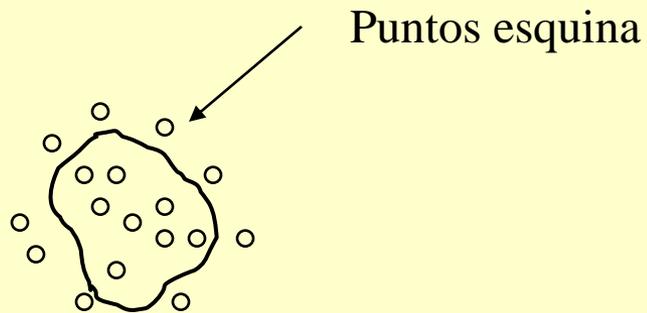
Energía a minimizar:

$\alpha(x) = 1$ solo si x es un punto-esquina

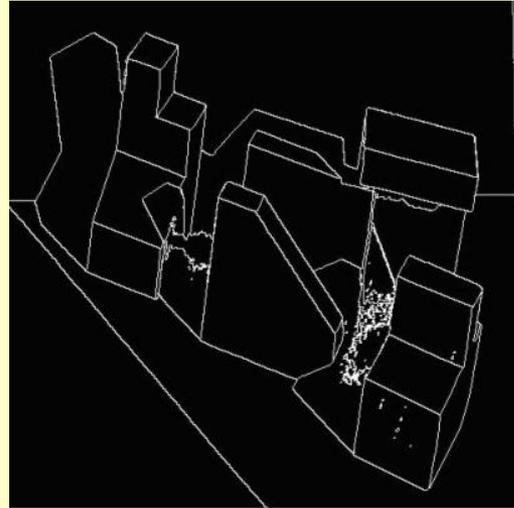
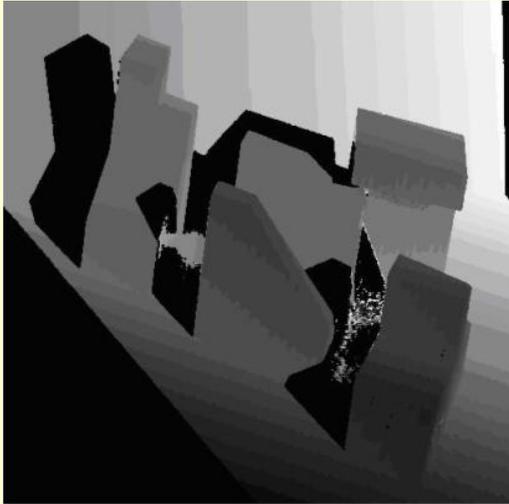
$$U(q, \theta | O) = \sum_x \sum_k \left(\alpha(x) (O(x) - \Phi(x, k))^2 - \mu \right) q_k^2(x) \\ + \lambda \sum_{\langle x, y \rangle} B(x, y) \| q(x) - q(y) \|^2$$

Se recalcula cada 10 iteraciones

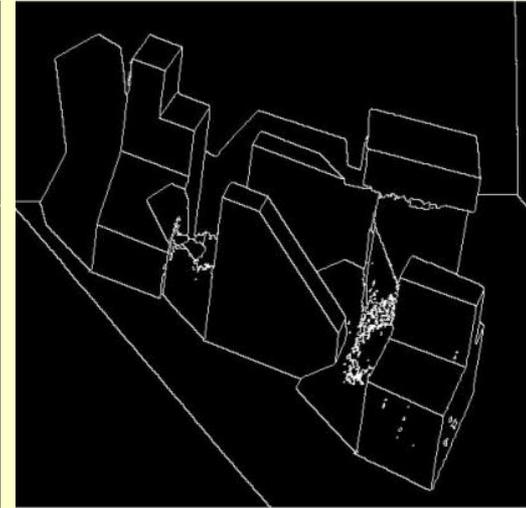
Modelos iniciales: crecimiento de regiones



Criterio: error en z con respecto al plano ajustado en la región

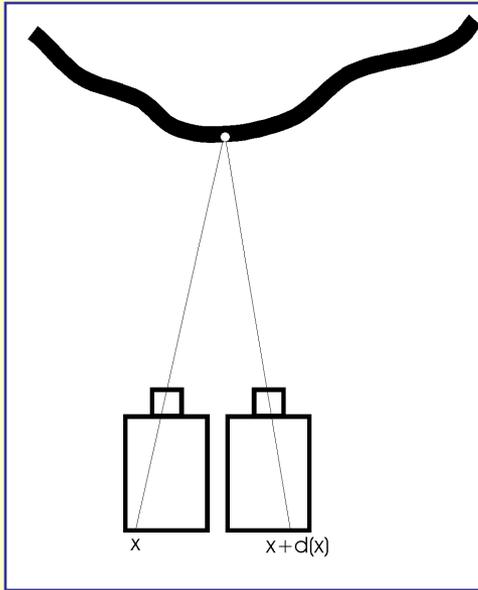


Segmentación
Manual

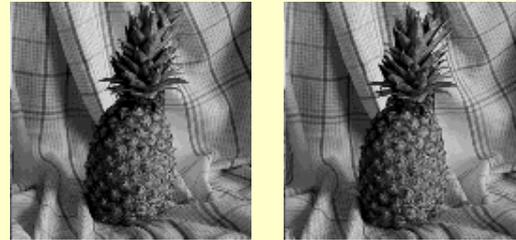


Segmentación
Automática

Calculo de Disparidad Estereoscópica

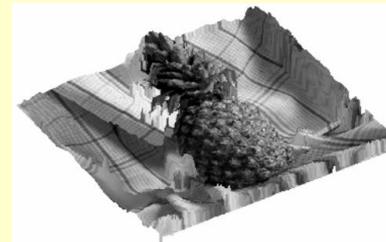


$$O = (I, D)$$

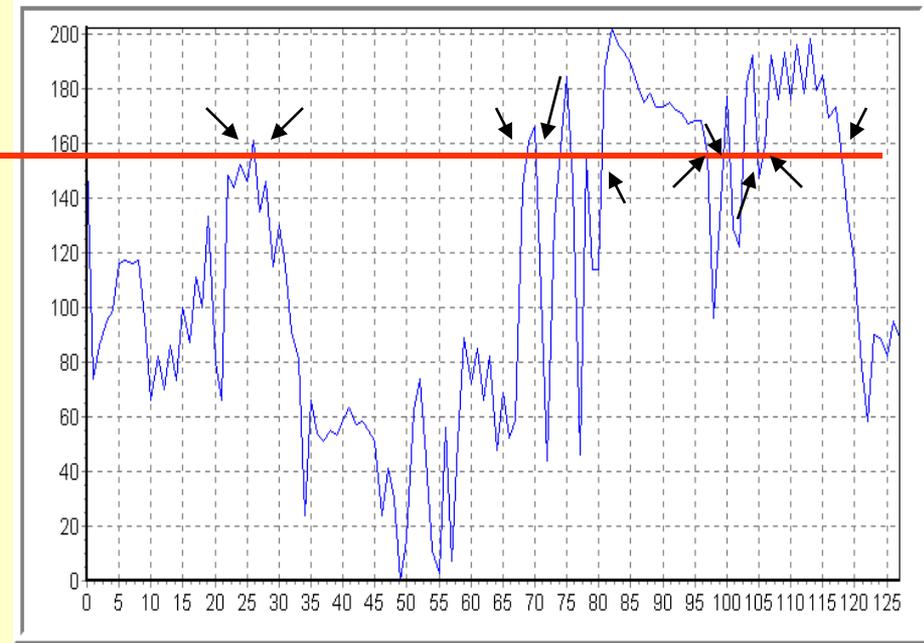
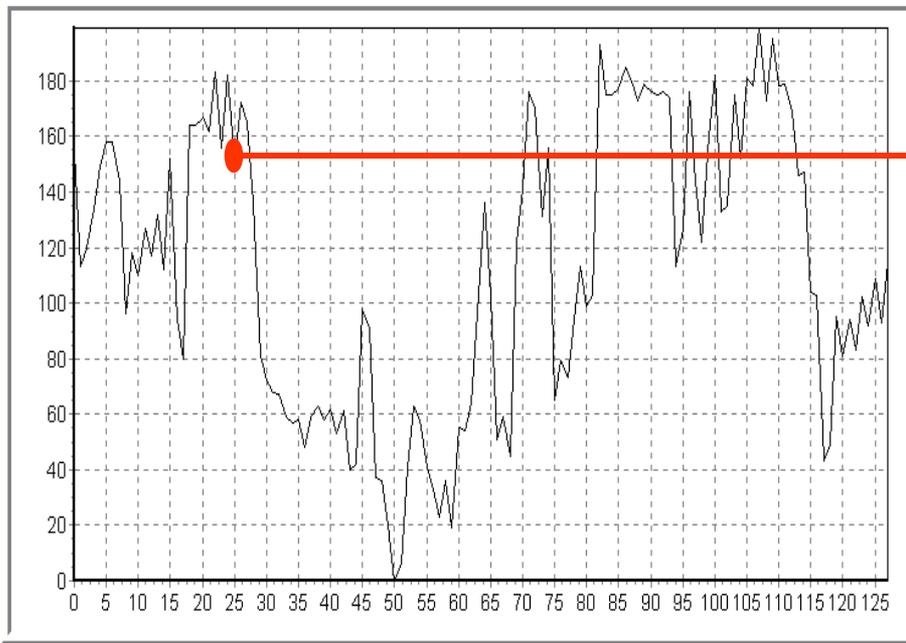
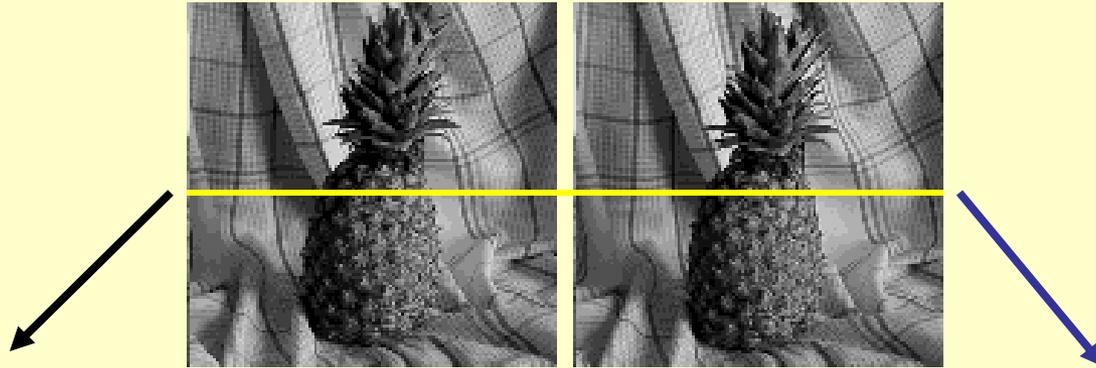


$$I(x) = D(x + d(x)) + n(x)$$

Objetivo: calcular un campo de disparidades d suave a pedazos



Problema de la Correspondencia



Cual es el punto correspondiente ?

Verosimilitud:

$$I(x) = D(x + d(x)) + n(x)$$

$$P(O(x) | d(x) = \Phi(x, k)) = P_n(I(x) - D(x + \Phi(x, k)))$$

Adaptaciones:

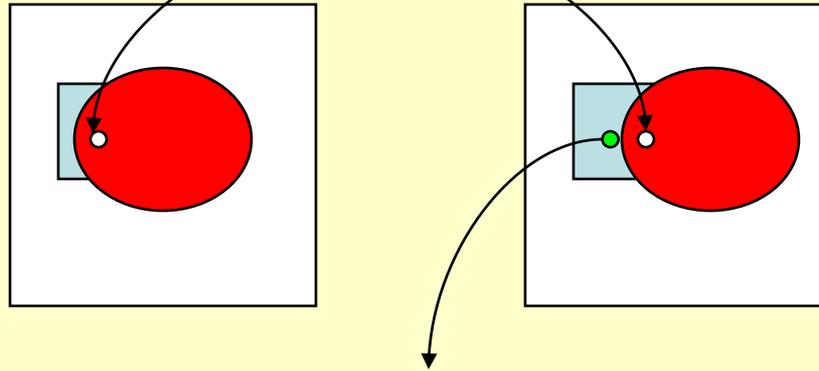
- Tomar en cuenta oclusiones y consistencia al cambiar la imagen de referencia.

$$\left(q^I(x) - q^D(x + d_I(x))\right)^2 (1 - q_0^I(x)) + \left(q^D(x) - q^I(x - d_D(x))\right)^2 (1 - q_0^D(x))$$

Modelo 0: oclusiones

$$I(x) \approx D(x + d_I(x))$$

$$D(x) \approx I(x - d_D(x))$$



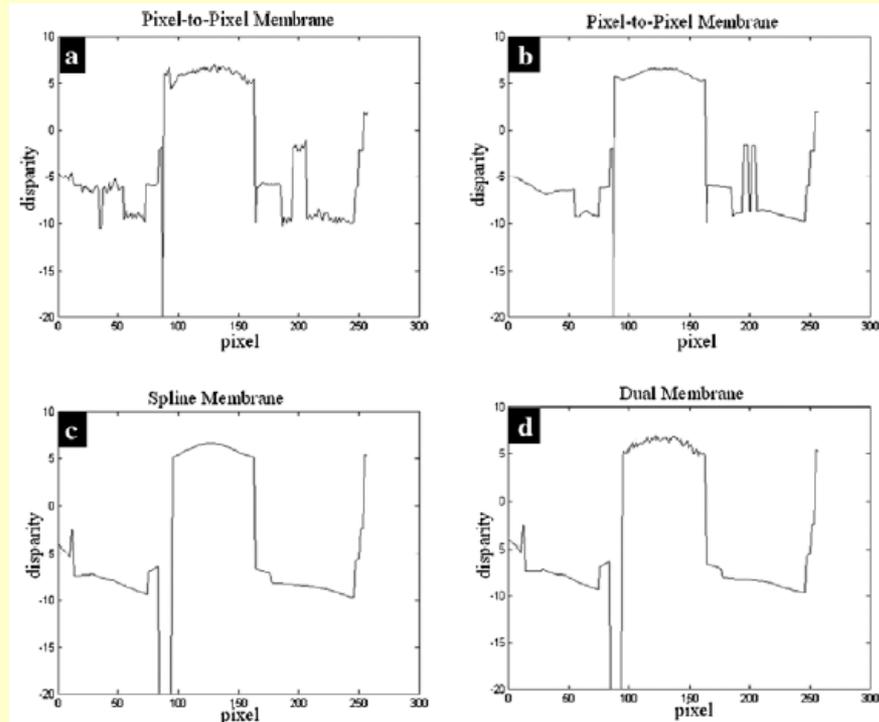
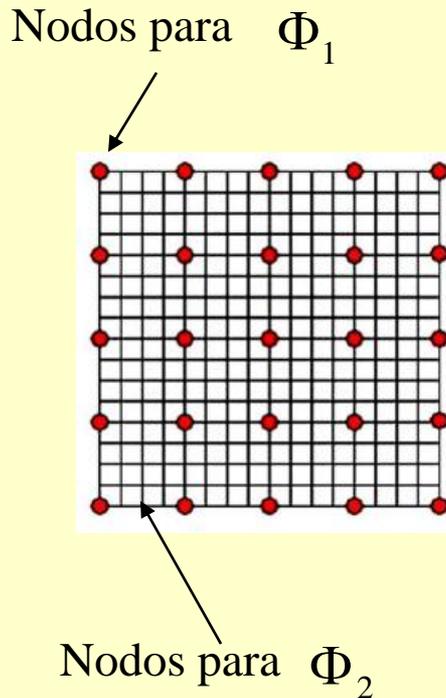
$$d_D(x) = d_I(x - d_I(x))$$

$$D(x) \approx I(x - d_D(x)) ?$$

Adaptaciones:

- Modelos paramétricos: splines con diferentes nodos de soporte para recuperar superficies rugosas.

$$d(x) = \Phi_1(x, e(x)) + \Phi_2(x, e(x))$$



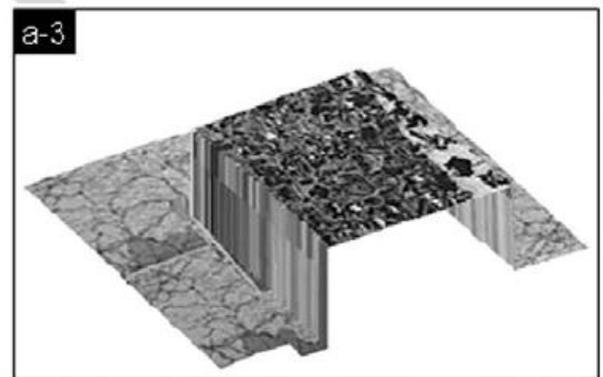
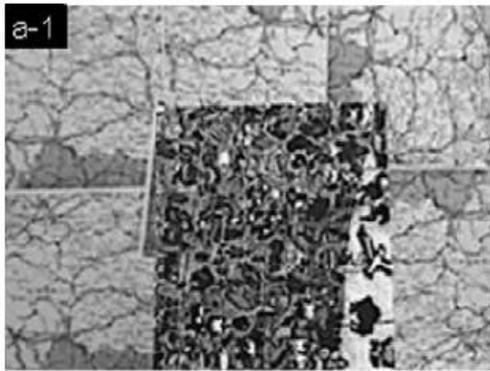


Image and Vision Computing, 2007

Segmentación lingüística de imágenes de color

Nombres de colores

Rojo

Verde

Azul

Amarillo

Púrpura

Anaranjado

Café

Rosa

Negro

Gris

Blanco

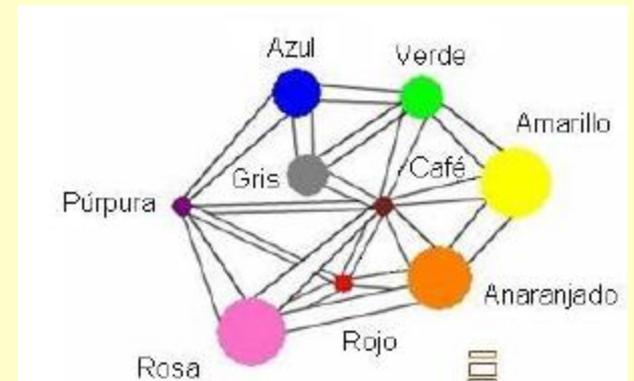
Atributo de luminosidad

Claro

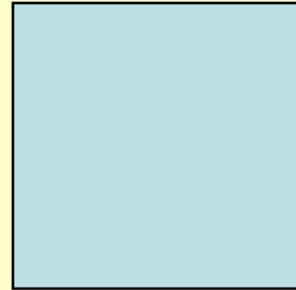
Obscuro

Adaptaciones:

- Modelo jerárquico para segmentar usando nombre de color y atributo de luminosidad
- Considerar interacciones de colores en el término de interacción espacial
- Verosimilitudes psicofísicas

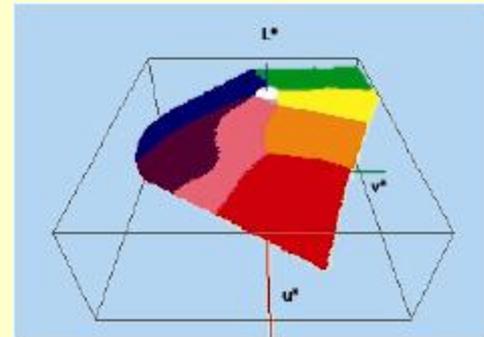
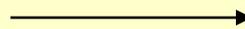
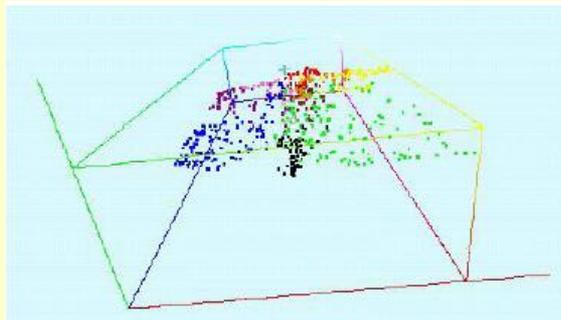


Verosimilitudes: experimento psicofísico



$$I = (R, G, B)$$

$$P(I | e = azul) \approx \frac{\# \text{ de sujetos que aceptan } I \text{ como "azul"}}{N}$$



Interpolación en el espacio $L^*u^*v^*$

	light red		light purple		light black
	dark red		dark purple		dark black
	light green		light orange		light gray
	dark green		dark orange		dark gray
	light blue		light brown		light white
	dark blue		dark brown		dark white
	light yellow		light pink		
	dark yellow		dark pink		



(a)



(b)



(c)



(d)



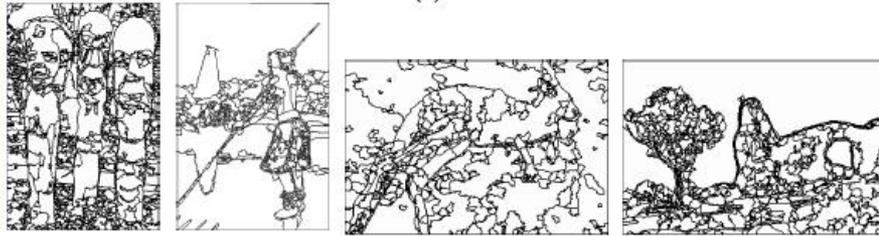
(e)



(a)



(b)



(c)



(d)



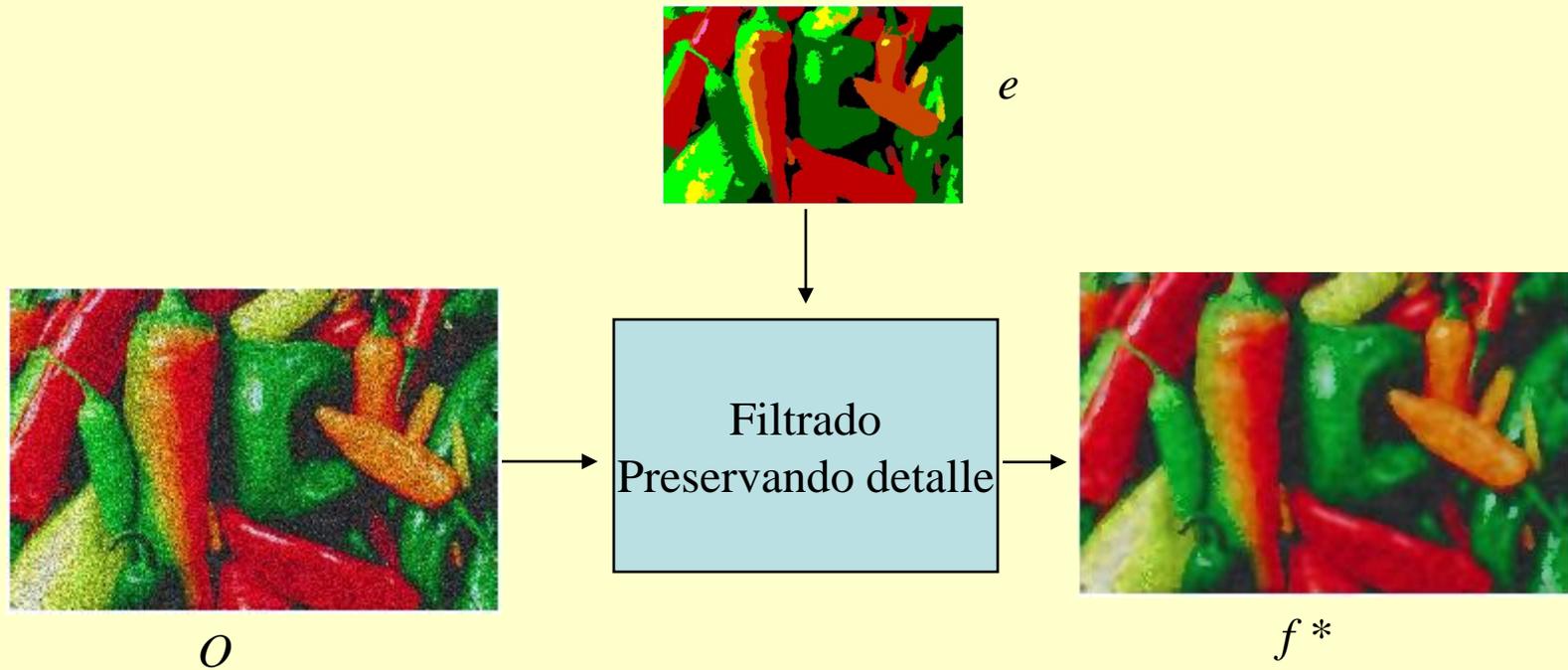
(e)

canny

Mean shift

Color gradient

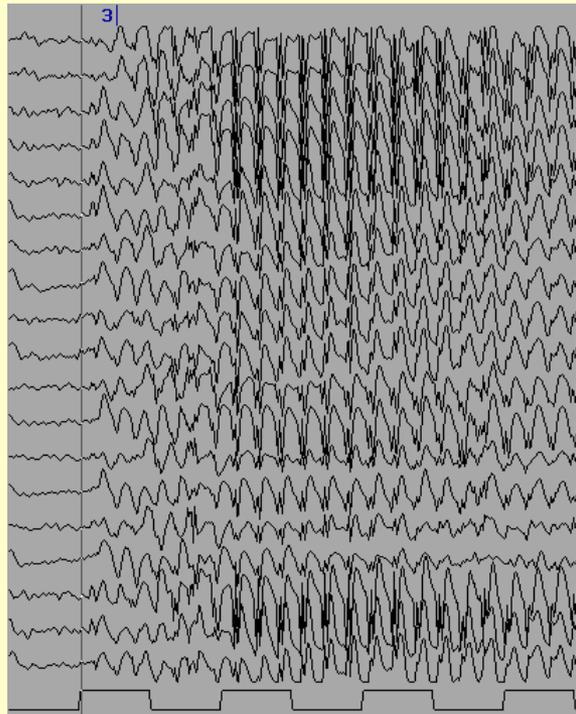
ecqmmf

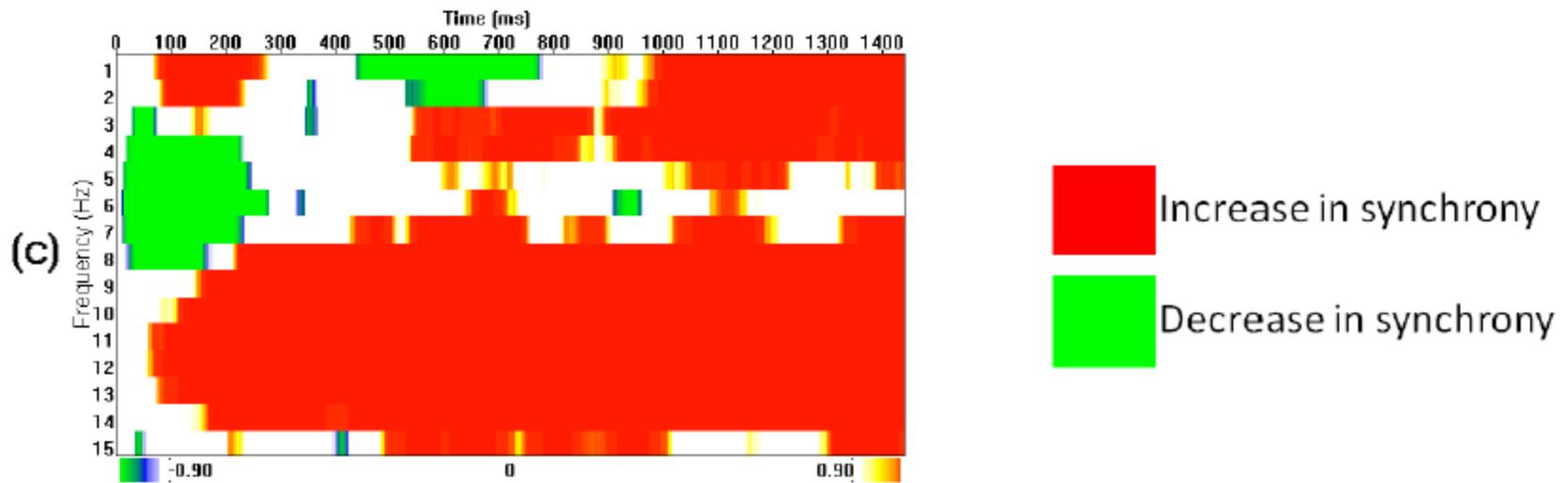
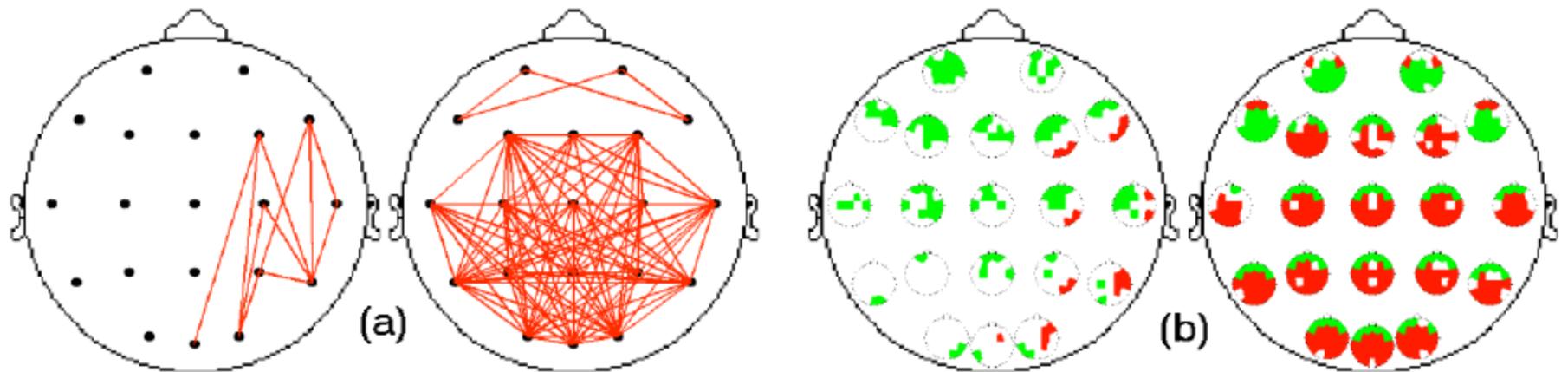


$$f^* \rightarrow \min U(f | O) = \sum_x \|f(x) - O(x)\|^2 + \lambda \sum_{\langle x,y \rangle} \|f(x) - f(y)\|^2 (1 - \delta(e(x) - e(y)))$$

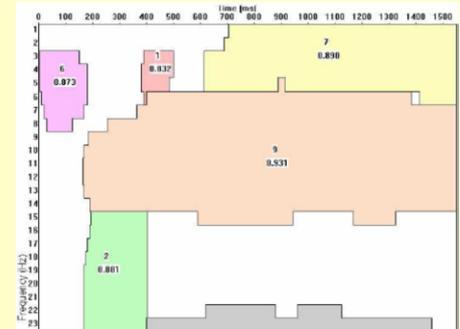
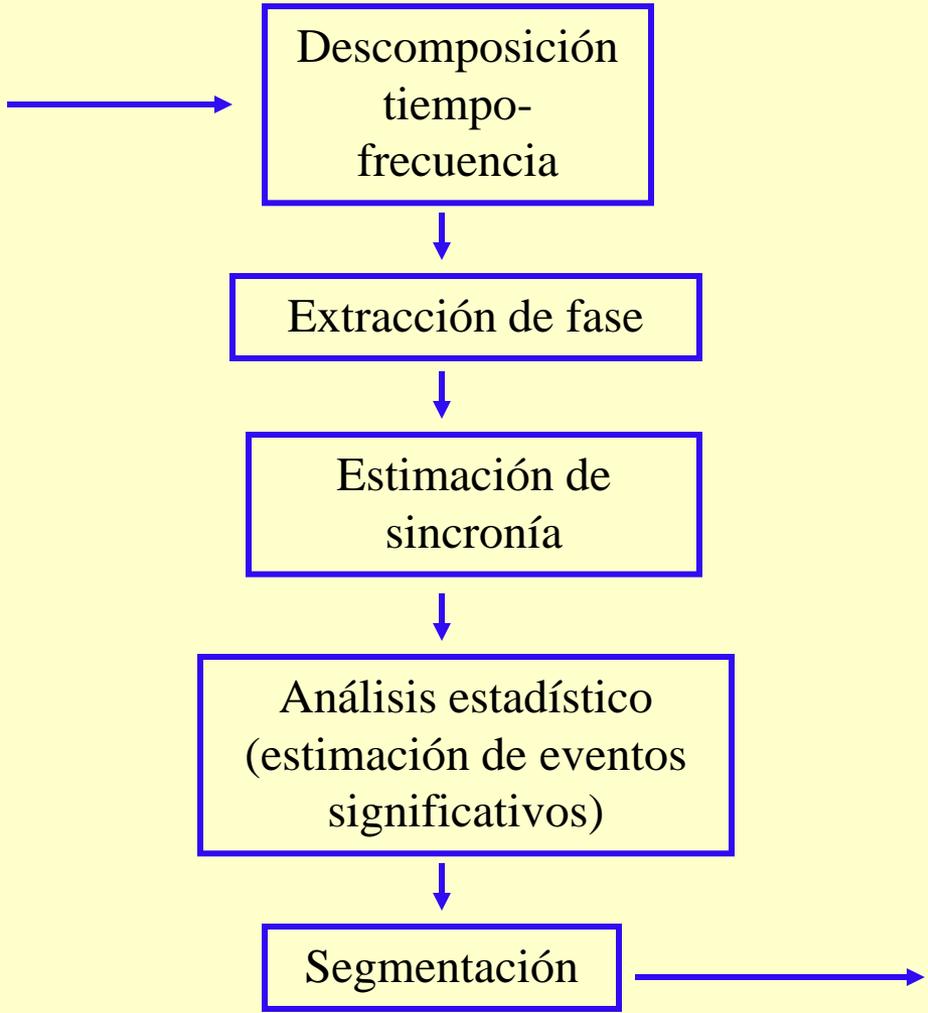
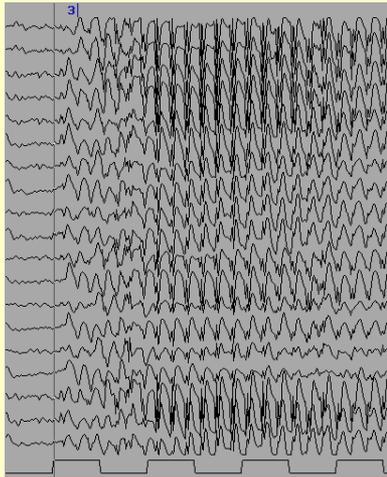
$$f(x) = (R(x), G(x), B(x))$$

Análisis exploratorio de sincronía cerebral en experimentos psicofisiológicos





Mapa de cambios de sincronía para una pareja dada de electrodos

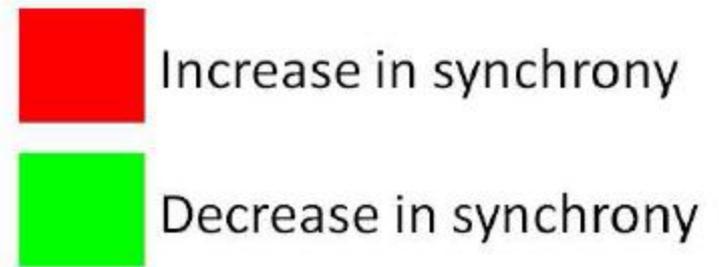
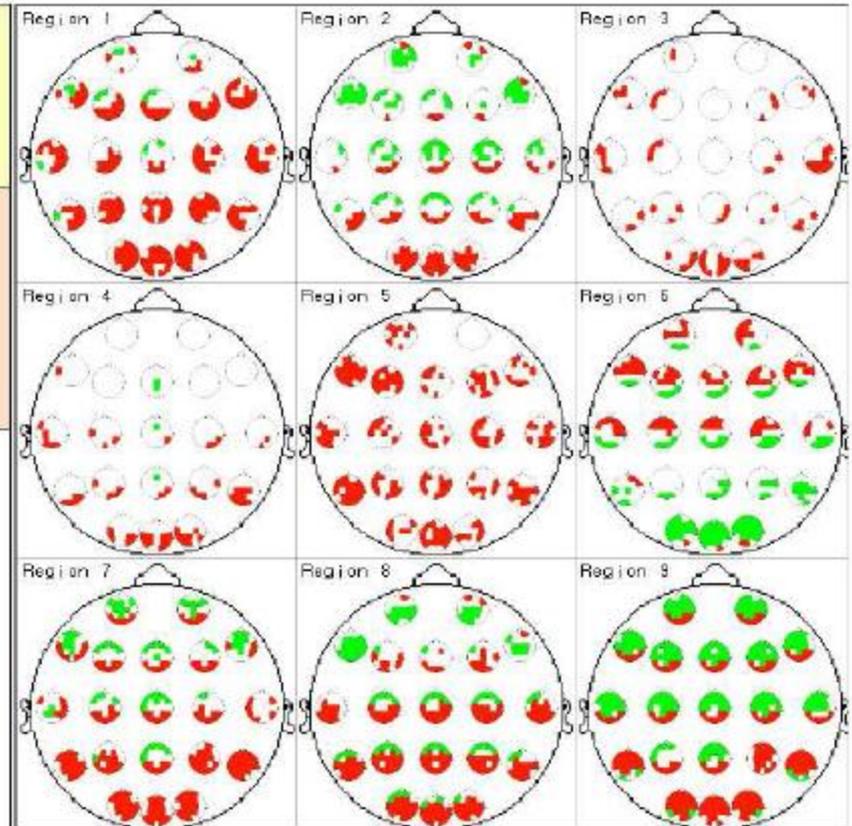
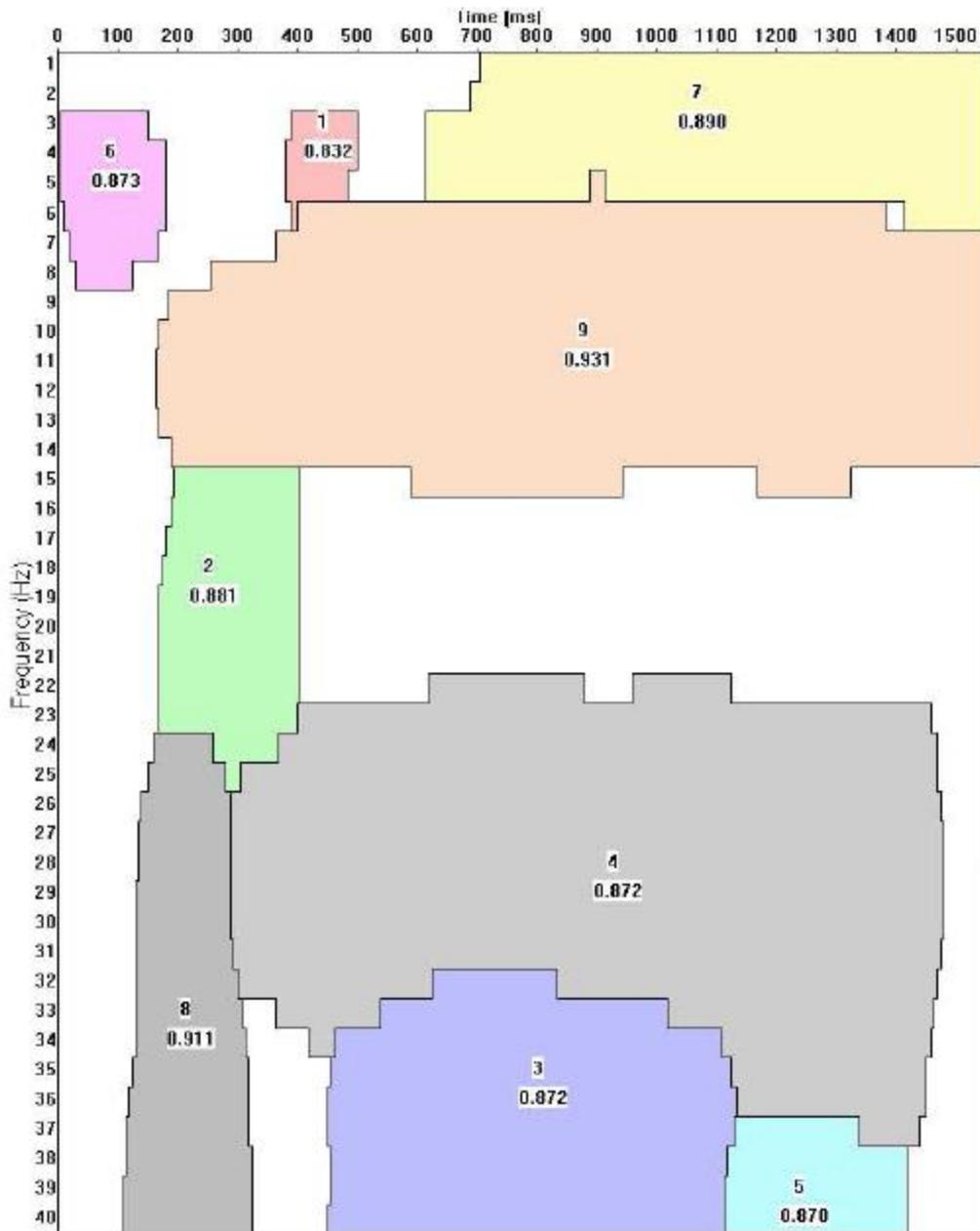


Adaptaciones:

- Modelos de variación suave en espacios de alta dimensionalidad.
- Selección automática del número de modelos.



Inicialización utilizando un algoritmo de crecimiento de regiones



Conclusiones:

La estimación Bayesiana, y en particular, los modelos de campos Markovianos de distribuciones, son una herramienta muy poderosa para la segmentación de imágenes, que puede utilizarse, haciendo las adaptaciones adecuadas, para construir sistemas capaces de resolver una variedad de problemas de visión computacional y procesamiento de imágenes.