

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Computación

Objeto Deformable Inmerso en un Fluido

Tesis que presenta

Ing. Fernando García Arreguín

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de
Ingeniería Eléctrica

Opción

Computación

Directores de la Tesis

Dr. Luis Gerardo de la Fraga

Dr. Ernesto Olguín Díaz

México, D.F.

7 de Diciembre de 2007

Resumen

En esta tesis se construyó un simulador que muestra un fluido incompresible y un objeto deformable. Para el fluido incompresible se usó el método Hidrodinámica Suavizada con Partículas (HSP) (del inglés *Smoothed Particle Hydrodynamics*, SPH), que se usó primeramente para resolver problemas de dinámica de gases en Astrofísica, adaptándose posteriormente para aplicarse en problemas de fluidos incompresibles. Para simular el objeto deformable se usó un objeto compuesto con mallas de simplejos; estas mallas permiten simplificar el motor de deformación ya que cada vértice tiene tres, y sólo tres, vértices vecinos. Para el método HSP se creó una nueva formulación con formas geométricas simples (triángulo, cilindro y esfera) para modelar la superficie que contiene al fluido incompresible. El simulador fue construido en C++ y la interfaz gráfica en Qt y OpenGL.

Abstract

In this thesis a simulator was constructed that shows an incompressible fluid and a deformable object immerse into the fluid. The incompressible fluid is simulated with the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method, which was developed to solve problems of gas dynamics in Astrophysics. Later on, this method was adapted to be applied in problems of incompressible fluids. The deformable object is made up of simplex meshes; these meshes allow to simplify the deformation engine since every vertex has three, and only three, neighboring vertexes. For the SPH method, a new formulation was created to shape the surface that contains the fluid; those shapes are simple geometric forms (triangle, cylinder, sphere). The simulator is implemented using C++ and the graphical user interface is implemented in Qt and OpenGL.

Agradecimientos

A lo largo de este proyecto sé que muchas personas estuvieron involucradas, así que a todas ellas gracias...

DIOS, Celia Cruz[†], Ma. de los Angeles Arreguín, Fernando García, Vianey García, Nidia Esmeralda Olvera, Evan García, Fernando Rivas, Ricardo Arreguín[†], MariaEsther Ochoa, Nojja Vehtt Vanegas, Fabiola Ortega, Jorge Arturo Cortés, Daniel Cruz, Cuauhtemoc Mancillas, Christian Iván Mejía, Marco Antonio Negrete, Jorge Ortíz, Eduardo Filemón Vázquez, Saúl Zapotecas, William De la Cruz, Juan Carlos Fuentes, Christopher Elling Charles, Patricia García, Víctor Serrano, Carlos Valle, Enrique Cruz, Iris Diana García, Sofía Reza, Felipa Rosas, Flor Córdova, Arcadio Morales, Ernesto Olguín, Almicar Meneses, Gerardo De la Fraga, Al Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Al proyecto 45306-Y del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, ...

*Dedico estos dos años de mi vida
a las personas que creyeron y creen en mí.*

Recordad:

*"Tus sueños son la base,
tus manos son las herramientas perfectas,
fe y perseverancia son las claves para hacerlos realidad..."*

Fernando García Arce

Índice general

Índice de figuras	xiii
Índice de tablas	xv
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	3
1.2. Planteamiento del problema	7
1.2.1. Motivación	7
1.2.2. Descripción	8
1.3. Organización de la tesis	9
2. Hidrodinámica Suavizada con Partículas	11
2.1. Antecedentes	11
2.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes	11
2.1.2. Métodos de solución	12
2.2. Modelado matemático	13
2.2.1. HSP enfocado a fluidos	14
2.2.2. Kernel	15
2.2.3. Viscosidad artificial	18
2.2.4. Análisis dimensional	19
2.3. Fluidos incompresibles utilizando el HSP	20
2.4. Implementación del HSP	22
2.4.1. Estructura de datos para las partículas	22
2.4.2. Diagrama general del sistema dinámico	23
2.4.3. Algoritmos propuestos	24
2.4.4. Método de búsqueda de vecinos para una partícula	26
3. Condiciones de Frontera	29
3.1. Partículas de frontera	30
3.2. Superficies de frontera	33
3.2.1. Fuerzas externas en la partícula del fluido	34
3.2.2. Detección de colisiones	41
3.2.3. Integración de las superficies de frontera en los algoritmos del fluido	49

3.3. Conclusiones	50
4. Resultados	51
4.1. Rompimiento de una presa	51
4.2. Colocación del fluido en un tubo	54
4.2.1. Medición de la velocidad y la presión dentro del tubo	59
4.3. Simulación en espacio tridimensional	62
4.3.1. Interactuando con una esfera sólida	62
4.3.2. Interactuando con una esfera deformable	64
5. Conclusiones y Trabajo a Futuro	77
5.1. Conclusiones	77
5.1.1. Aportaciones	77
5.1.2. Limitaciones	77
5.2. Trabajo a futuro	78
A. Interfaz de Usuario	81
Bibliografía	85

Índice de figuras

1.1. Diseño del sistema propuesto	8
2.1. Gráfica de la función del kernel en 2 dimensiones (a) y 3 dimensiones (b) .	17
2.2. Estructura propuesta para las partículas.	22
2.3. Esquema general del sistema dinámico.	23
2.4. Partículas dentro de cada celda	26
2.5. Vecindario de la celda $C_{i,j}$	27
2.6. Manejo de las partículas dentro de cada celda	27
2.7. Esquema general para resolver la búsqueda de partículas vecinas en dos dimensiones	28
2.8. Esquema general para resolver la búsqueda de partículas vecinas en tres dimensiones	28
3.1. Atributos que utilizan las partículas de frontera	30
3.2. Sistema dinámico incluyendo partículas de frontera	30
3.3. Búsqueda de vecinos incluyendo las partículas de frontera	32
3.4. Superficies de frontera bidimensionales (a) y/o tridimensionales (b)	33
3.5. Detección de colisiones y fuerza externa aplicada sobre la partícula del fluido	34
3.6. Esquema de la fuerza normal a la superficie	35
3.7. Esquema de la fuerza de deformación	36
3.8. Esquema de la fuerza de fricción en la superficie	38
3.9. Superficies de frontera para el caso bidimensional	42
3.10. Superficies de frontera para el caso tridimensional	42
3.11. Normal de la superficie del cilindro	43
3.12. Obstáculo en el área de trabajo del fluido	44
3.13. Vector normal de la superficie de la esfera	44
3.14. Esfera construida mediante mallas de simplejos	46
3.15. Primer nivel de detección de colisiones en la esfera deformable	46
3.16. Segundo nivel de detección de colisiones en la esfera deformable	47
3.17. Cálculo del vector normal del triángulo	47
3.18. Deformación del triángulo debido a una colisión	48
4.1. Prueba de rompimiento de una presa en el tiempo $t = 0$	52
4.2. Nuevo espacio de trabajo del fluido	54

4.3. Secciones longitudinales y transversales del tubo para medir velocidades y presiones de las partículas	59
4.4. Velocidad de la partícula v_s secciones longitudinales del tubo utilizando partículas de frontera	60
4.5. Presión del fluido v_s secciones transversales del tubo utilizando partículas de frontera	60
4.6. Velocidad de la partícula v_s secciones longitudinales del tubo utilizando superficies de frontera	61
4.7. Presión del fluido v_s secciones transversales del tubo utilizando superficies de frontera	61
A.1. Interfaz gráfica.	81

Índice de tablas

1.1. Tabla comparativa	7
4.1. Simulación del rompimiento de una presa, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg	53
4.2. Simulación del fluido dentro de un tubo utilizando partículas de frontera, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg	56
4.3. Simulación del fluido dentro de un tubo utilizando superficies de frontera, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg	58
4.4. Simulación del fluido interactuando con una esfera sólida, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg	63
4.5. Simulación del fluido interactuando con una esfera deformable y una fuerza igual a $\frac{1}{1000}F_D$, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg	67
4.6. Simulación del fluido interactuando con una esfera deformable y una fuerza de $\frac{1}{500}F_D$, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg	69
4.7. Simulación del fluido interactuando con una esfera deformable y una fuerza igual a $\frac{1}{1000}F_D$, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg	72
4.8. Simulación del fluido interactuando con una esfera deformable y una fuerza igual a $\frac{1}{2000}F_D$, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg	75

Capítulo 1

Introducción

Las simulaciones por computadora así como la animación en tiempo real han tenido un auge en los últimos tiempos, debido al avance tecnológico, dando como resultado simulaciones más sofisticadas que trabajen en tiempo real. Por ejemplo, las simulaciones de cirugías médicas, permiten practicar intervenciones quirúrgicas virtuales, que minimizarán errores en procedimientos de rutina o durante operaciones complejas y optimizarán el uso de los recursos técnicos y humanos desde el momento en que los médicos entran al quirófano. En el campo de la animación por computadora, las simulaciones juegan un papel importante para dar un efecto de realismo ya sea en la realización de películas o de videojuegos.

Cuando hablamos de simulaciones, éstas dan como resultados datos numéricos cuya interpretación no es siempre evidente. En el caso de que los datos no se puedan analizar de forma inmediata, por lo general se realiza un proceso de visualización para entender de manera más clara estos datos.

Esta tesis se enfocará en la simulación y visualización de un sistema dinámico compuesto por un fluido incompresible y un objeto deformable. Para esto se empezarán a describir las características de cada uno así como su interpretación.

Por lo regular, las simulaciones que trabajan con objetos (la mayoría de las ocasiones son modelos deformables), se pueden construir mediante diferentes métodos. Los métodos que han entregado resultados satisfactorios son: la malla de triángulos utilizando la técnica de Delaunay y la malla de simplejos [34].

Existe un sistema que se ocupa dentro de las mallas de triángulos para la construcción de modelos deformables conocido como *sistema de masa-resorte*. Los métodos no físicos para el modelado de la deformación son limitados por la pericia y paciencia del usuario. Por otra parte, la deformación debe ser especificada ya que en la mayoría de los sistemas no se tiene conocimiento acerca de la naturaleza de los objetos a manipular. Es por ello que los sistemas masa-resorte son una técnica basada en la física de sus elementos que

ha sido utilizada extensa y eficientemente para el modelado de los objetos deformables [11].

El método de modelado por medio de la malla de triángulos, tiene la ventaja de que casi todos los objetos se pueden aproximar usando triángulos, pero se necesitan muchos de éstos para crear formas complejas. Por lo regular, al emplear este método se utiliza la triangulación de Delanauy [32], la cual maximiza los triángulos interiores de la triangulación. Eso es práctico porque al usar la malla de triángulos como modelo tridimensional los errores de redondeo se minimizan. Por tal motivo, en general se usan triangulaciones de Delanauy en aplicaciones gráficas.

Otra forma de construir modelos deformables es mediante mallas de simplejos. Las mallas de simplejos son usadas para representar superficies en el espacio tridimensional. Estas mallas tienen una similitud con las mallas de triángulos. De hecho, las mallas de simplejos son el dual topológico de la malla de triángulos, pero no son el dual geométrico, es decir, no se puede hacer una transformación geométrica entre la malla de triángulos y la malla de simplejos. Una propiedad de las mallas de simplejos es que cuentan con una conectividad constante en los vértices. Esto quiere decir que cada vértice tiene tres vértices vecinos. Además, tienen la ventaja de permitir deformaciones suaves de una manera sencilla y eficiente. La geometría de la malla de simplejos permite definir en cada vértice cualidades geométricas distintas tales como curvaturas o vectores normales [8, 37].

Hasta el momento se ha hablado de algunos métodos diferentes para la construcción de modelos deformables; por otro lado, tenemos la parte de los sistemas dinámicos.

Un sistema dinámico es un sistema complejo que presenta un cambio o evolución de su estado en un tiempo. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus reacciones; de esta forma se pueden elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo.

Con el advenimiento de las computadoras de alta tecnología y los métodos computacionales que las acompañan, la solución de problemas de los sistemas dinámicos han llegado a ser una realidad. A pesar de todo ese poder de cómputo, los métodos aún están lejos de ser perfectos, pero los estudios e investigaciones actuales, están logrando desarrollar mejores métodos.

Premoze *et al.* [31] mencionan algunos métodos relevantes para dar solución a los sistemas dinámicos. Los primeros métodos estaban enfocados a simplificar el cómputo utilizando síntesis de Fourier o proporcionando soluciones especializadas a problemas específicos. Por otro lado, los campos de altura junto con las ecuaciones diferenciales parciales de sombra de agua, se usaron para representar la superficie de un fluido y describir el movimiento de éste, respectivamente. Posteriormente, a los campos de altura se les añadió un sistema de partículas para representar el movimiento del fluido con efecto de goteo, lo cual no fue abordado en métodos previos. Más tarde se realizaron limitaciones a

la representación de fluidos utilizando campos de altura. En ese mismo tiempo se introdujo el método *Marker-and-cell* (MAC) para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, que describen el movimiento de un fluido. Este método es tridimensional y es capaz de simular un fluido cayendo y salpicando. Otro método propuesto para simular fluidos, se basa en el uso de una convección semi-Lagrangiana que permite intervalos de tiempos mucho más grandes, permitiendo estabilidad en el fluido.

Existen métodos alternativos para la simulación de fluidos, los cuales han sido descritos usando simulaciones basadas en partículas. Por ejemplo, el método llamado Hidrodinámica Suavizada con Partículas (HSP), del nombre en inglés *Smoothed Particle Hydrodynamics*. En un principio estuvo enfocado a simular problemas astrofísicos incluyendo colisiones galácticas y gravitacionales. El HSP ha sido adaptado recientemente a muchos problemas de ingeniería, incluyendo transferencia de calor y de masa, dinámica molecular y mecánica de sólidos y fluidos. Éste es un método Lagrangiano flexible que puede capturar fácilmente grandes deformaciones de interfaces, rotura, mezclado y salpicado. El HSP es utilizado para calcular el movimiento de las partículas que son revestidas en un campo potencial. Aunque el método HSP es flexible, éste sólo puede resolver el flujo de un fluido compresible. Se han propuesto algunas extensiones para permitir la simulaciones de fluidos incompresibles con HSP. Recientemente, fue desarrollando otro método llamado Movimiento de Partículas Semi-implícito (MPS) para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles. El método MPS es capaz de simular una amplia variedad de problemas de flujo de fluidos incluyendo transiciones de fase, flujo multifase, estructuras elásticas, etc.

1.1. Estado del arte

En la presente tesis, se plantean dos temas diferentes: por un lado, se tiene el modelo deformable y por el otro el sistema dinámico de un fluido incompresible; lo que se propone, es la unión de estos dos mundos amplios y complejos pero a la vez muy interesantes y, sobre todo, muy útiles cuando se quieren efectuar simulaciones enfocadas a aplicaciones tales como cirugías médicas, simuladores de vuelo, reproducción de fenómenos naturales o experimentos en donde no se cuenta con las herramientas para llevarlos a cabo.

Anteriormente, se mencionaron los métodos que se pueden utilizar para el modelado de un objeto deformable y las soluciones para un sistema dinámico. En este caso, se utilizarán las mallas de simplejos para el modelado del objeto deformable y la solución del sistema dinámico se realizará mediante el método de la Hidrodinámica Suavizada con Partículas.

Partiendo de los temas por separado, existen muchas investigaciones enfocadas a los modelos deformables así como a los sistemas dinámicos. A continuación abordaremos de forma individual los trabajos realizados para los modelos deformables utilizando mallas de simplejos.

Moctezuma Ramírez [23], presenta un sistema para la manipulación en tiempo real de objetos deformables virtuales sin retroalimentación de fuerzas. Los objetos se construyen a base de mallas de simplejos. El modelo deformable se encuentra bajo la acción de un modelo rígido el cual se controla a través de un guante sensorizado. El autor utiliza la biblioteca de dominio público SOLID para la detección de colisiones, la cual tiene como fin determinar el momento y lugar en el que el objeto rígido entra en contacto con el modelo deformable. En esta tesis se logró la deformación de una esfera de densidad media con 1296 vértices, 1944 aristas y 650 caras.

Ramírez Trejo [34], realiza la animación de modelos deformables elásticos e inelásticos, basados en mallas de simplejos. Este tipo de objetos se deforman siguiendo la ley de Newton de movimiento sobre un sistema mecánico compuesto de resortes, masas y amortiguadores. Para llevar a cabo la animación de los objetos se resolvieron numéricamente las ecuaciones de movimiento. En dicho trabajo se presenta una comparación de cuatro métodos numéricos de la ecuación de movimiento: diferencias finitas, Euler, Heun y Runge-Kuta de cuarto orden, resultando mejor y más simple la formulación de diferencias finitas. Se presentan cuatro ejemplos de aplicación: la animación de la deformación de una esfera a un cubo, la animación del rebote de una pelota contra la pared, una pelota comprimida por dos paredes y la deformación general de una esfera aplicando fuerza en cualquier punto seleccionado mediante un dispositivo háptico llamado Phantom Omni. Estos ejemplos se realizaron con el fin de verificar el comportamiento elástico de las mallas de simplejos. Los resultados obtenidos en cuanto a la animación de modelos deformables elásticos son satisfactorios; sin embargo, el sistema no se deforma en tiempo real.

Por último, Ramírez Flores [33], presenta un algoritmo iterativo para obtener una reconstrucción tridimensional a partir de un conjunto de proyecciones de un espécimen biológico. Para lograr esto, se realiza primero una comparación entre las proyecciones con un modelo 3D de referencia para asignar los valores de orientación a cada proyección. Posteriormente, se hace una reconstrucción 3D con el conjunto de proyecciones y, por último, se usa la reconstrucción generada en el paso anterior como modelo de referencia y se vuelve al primer paso hasta llegar a la convergencia. Este trabajo investiga qué tan crítica resulta la selección del modelo 3D de referencia para que el algoritmo iterativo de reconstrucción converja. Se usan modelos deformables basados en mallas de simplejos para realizar varios modelos iniciales de entrada al algoritmo iterativo de reconstrucción. Estos modelos iniciales van desde una esfera, que es un modelo sin forma (todas sus proyecciones son iguales), hasta el objeto destino que es un fantasma de una macromolécula biológica a media resolución.

Por otro lado se tienen los trabajos e investigaciones que se han realizado con los sistemas dinámicos utilizando el método de Hidrodinámica Suavizada con Partículas.

Matthias Müller *et. al.* [29], proponen un método para hacer simulaciones de la sangre como un fluido de superficie libre, dirigido a cirugías médicas. La forma de resolver la simulación del fluido es utilizando la Hidrodinámica Suavizada con Partículas. El HSP estuvo enfocado inicialmente a simular comportamientos astronómicos, pero en este trabajo se le adapta para simular el fluido y así poder obtener de forma directa los campos de densidad de la fuerza, los cuales son modelados por medio de las ecuaciones de Navier-Stokes. Además, se añade una expresión matemática, la cual sirve para modelar el efecto de tensión en la superficie del fluido. El método desarrollado puede ser utilizado para la implementación de los sistemas de entrenamiento de cirugías médicas, y puede manipular un número superior a las 3000 partículas.

Lars Andersson [18], hace una recopilación de trabajos referentes a algoritmos destinados para la visualización de la sangre y el humo, en un entorno de cirugías médicas virtuales de tiempo real. Los trabajos discutidos son implementaciones acerca de: sangre derramándose en una superficie libre, gotas de sangre recorriendo una superficie, disolución de la sangre en un fluido y el humo generado por los instrumentos. El trabajo comienza con un resumen de las mejores investigaciones realizadas así como su disponibilidad y el acceso a la información de éstas. Posteriormente, se realiza una serie de experimentos e implementaciones de los métodos más prometedores. La representación del derrame de la sangre (sistema de partículas libres) y las gotas de sangre utilizan esferas, lo que hace que ésta sea directa. Por otro lado, el rastro de la sangre es representado directamente sobre la textura de la superficie. Los resultados que se obtuvieron no son muy realistas ni física ni visualmente, pero pueden dar una idea de lo que pasa en una simulación. La simulación de la sangre disolviéndose dentro de un fluido, se realiza solucionando las ecuaciones de Navier-Stokes, lo cual permite que los datos de la simulación sean correctos, pero su desventaja es que reduce la interacción en tiempo real con un fluido representado en dos dimensiones. Por último, el efecto del humo es implementado por medio de un sistema simple de partículas, el cual da el realismo suficiente para poder ser utilizado dentro de este entorno; sin embargo, los datos obtenidos no son correctos en comparación con datos reales.

Para finalizar, la investigación realizada por M. Roy [21], presenta un método para modelar un fluido utilizando un sistema de partículas junto con el modelado de fluidos. El propósito de este método es dar una estabilidad al modelo físico que describe el flujo de un fluido así como crear una animación de un fluido de forma realista y eficiente utilizando el modelo *blobby* para visualizarlo. Para conseguir que la animación del fluido sea realista utilizan las ecuaciones que describen a los fluidos dinámicos conocidas como Hidrodinámica Suavizada con Partículas. El método desarrollado emplea técnicas de paralelización para obtener resultados favorables en el cálculo del fluido dinámico y en la generación de la superficie. A pesar de que el método es paralelizado, al momento de generar la superficie,

éste forma un cuello de botella, dando como resultado que el rendimiento y la eficiencia no sean máximas.

Hasta el momento se han descrito trabajos, tesis y artículos relacionados con los objetos deformables y los sistemas dinámicos, pero no se han mencionado muchos trabajos que relacionen, unan o fusionen estos dos temas. A continuación mencionaremos tres trabajos que se asemejan con la tesis propuesta, haciendo al final una comparación de estos con lo que se pretende obtener.

El trabajo más reciente es de Matthias Müller [30], donde especifica el desarrollo de un modelo matemático para describir las fuerzas existentes en la simulación de la sangre en las venas. Además se aplica un algoritmo en el que se refleja la interacción entre el fluido y el objeto sólido. Este algoritmo obtiene del objeto sólido partículas representativas de cada triángulo que lo forma; estas partículas se denominan de frontera, y se utilizan para delimitar el fluido de la superficie sólida. Al realizar este proceso, se tiene la ventaja de que el cálculo es entre partículas (evitando que éste sea entre partículas y los triángulos que forma al objeto), ya que el fluido es modelado por medio de la Hidrodinámica Suavizada con Partículas.

Un artículo interesante es el de Gómez Gesteira *et. al.* [13], el cual muestra la potencialidad del método de Hidrodinámica Suavizada con Partículas para el tratamiento de la interacción entre olas y estructuras sólidas. En particular, estudia el proceso de rebase de una ola sobre una estructura horizontal paralela a la superficie del agua en reposo mediante una versión bidimensional del código y la colisión de una ola solitaria con una estructura vertical delgada mediante una versión tridimensional. En ambos casos se muestra cómo el modelo reproduce tanto cualitativa como cuantitativamente diferentes experimentos de laboratorio.

Otro trabajo que une estos temas es el de Valladares R. *et. al* [38], el cual diseña un programa interactivo y amigable que permite entender el movimiento de un objeto a través de fluidos. En este artículo se presenta una simulación de la dinámica de una esfera de radio arbitrario pero relativamente pequeño, a través de un fluido incompresible y viscoso. Las fuerzas externas que actúan sobre la esfera son: la de gravedad, la fuerza de arrastre viscoso, el empuje y una fuerza estocástica mediante la cual se simulan las interacciones microscópicas del medio sobre la esfera. Se resuelve la ecuación de movimiento del fluido utilizando el algoritmo de Verlet.

1.2. Planteamiento del problema

1.2.1. Motivación

Como se observa, los trabajos e investigaciones realizados que contemplan los temas de modelos deformables y dinámica de fluidos juntos son pocos. De este punto se desprende la motivación de esta tesis. Este tipo de unión se llega a realizar en la animación por computadora, ya que en una simulación el costo computacional es elevado y su representación en tiempo real es deficiente. En los trabajos mencionados anteriormente, solamente uno [38], realiza la interacción del fluido con un sólido deformable. Por lo tanto, se propone realizar un sistema que nos permita simular y visualizar la interacción entre un modelo deformable y un sistema dinámico (fluido) en tiempo real o aproximado (tomando como referencia que el tiempo real maneja 30 cuadros por segundo).

A continuación se muestra una tabla comparativa de los últimos tres trabajos realizados y el trabajo de tesis que se está proponiendo, con el objetivo de dar una idea más clara de los alcances y aportaciones esperados en este trabajo de tesis.

Referencia del trabajo	Tipo de objeto	Método para modelar al objeto	Sistema Dinámico	Tipo de interacción
[30]	Deformable	Triángulos	HSP	Objeto-Fluido
[13]	Sólido	Triángulos	HSP	Fluido-Objeto
[38]	Sólido	Triángulos	Algoritmo Verlet	Fluido-Objeto
Tesis Propuesta	Deformable	Simplejos	HSP	Fluido-Objeto

Tabla 1.1: Tabla comparativa

Esta tabla permite entender de forma precisa cómo utilizan la interacción entre el objeto y el fluido los trabajos previos que se revisaron. El primer trabajo es el único que ocupa objetos deformables en comparación con los otros dos, que son objetos sólidos. El método que utilizan para modelar estos objetos son mallas de triángulos. Para lograr que se deforme el objeto se hace necesario utilizar el sistema masa-resorte dentro de la malla de triángulos. Para representar el fluido en los artículos [30] y [13], se basan en el método de Hidrodinámica Suavizada con Partículas, obteniendo mejores resultados y simulaciones respecto a los experimentos, en comparación con el último trabajo que resuelve el movimiento del fluido por medio del algoritmo de Verlet. Por otro lado, la manera en que interactúan estos dos temas para la segunda y tercera investigación es de la siguiente forma: para el primer caso, dejan correr el fluido sobre un camino, en el cual existe un obstáculo sólido; con esto, el fluido colisionará directamente con el objeto. En el segundo caso, el fluido ejerce fuerzas sobre un determinado objeto sólido por lo que no existe ninguna deformación de éste, solamente se introduce el objeto dentro del fluido. A

diferencia de estos dos artículos, la manera en que interactúan el objeto deformable y el fluido es lo contrario de los dos últimos. Lo que realizan en éste, es una colisión del objeto contra un estanque lleno de un fluido.

1.2.2. Descripción

Lo que se propone en esta tesis, es simular la interacción entre un objeto deformable y un fluido dentro de una misma área de trabajo, utilizando mallas de simplejos para el modelado del objeto y el método de Hidrodinámica Suavizada con Partículas para el fluido. Además de que la forma en que interactuarán estos dos será del tipo: *Fluido-Objeto*. A continuación se muestra un diseño del sistema que se espera obtener al final de la tesis.

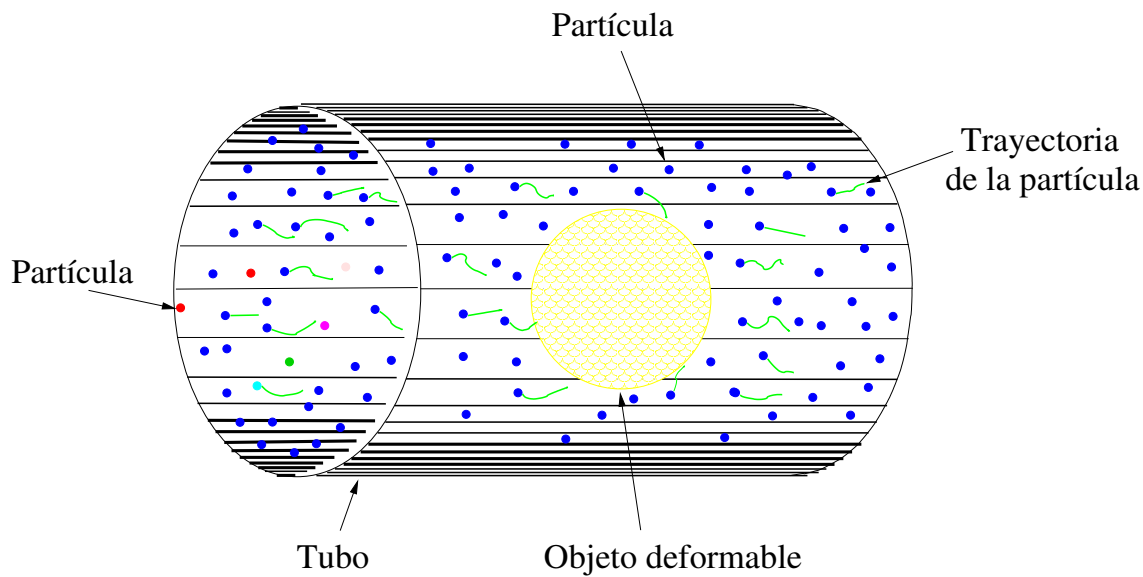


Figura 1.1: Diseño del sistema propuesto

El área de trabajo donde interactuarán el objeto deformable y el fluido será dentro de un tubo sólido. El objeto deformable estará situado en el centro del tubo donde permanecerá fijo. La fuerza de las partículas del fluido sólo deformarán la estructura del objeto mas no lo podrán mover de su posición. En el momento en que exista una colisión entre una partícula y el objeto deformable, éste mostrará la posición en donde ocurrió tal evento. Para representar al fluido se utilizarán esferas, las cuales podrán ser visualizadas de dos maneras distintas: como fluido (color azul) y en diferentes tonalidades de colores, donde cada color representará la velocidad correspondiente a la i -ésima partícula. El fluido tendrá la opción de mostrar la trayectoria de cada partícula, esto con el fin de poder analizar la evolución del fluido a través del tiempo.

Los puntos que se tendrán que desarrollar para obtener los resultados deseados son los siguientes:

- *Diseño de un fluido* que proporcione resultados correctos sobre el comportamiento de él, reduciendo el costo computacional en la simulación sin el objeto deformable inmerso.
- *Análisis del modelo deformable de un objeto* para lograr que su deformación se realice con base en las fuerzas que aplica cada partícula sobre él. Se tomarán los trabajos [23, 34, 22] para este punto.
- *Obtener como resultado la unión del fluido y el objeto deformable en un mismo espacio*, demostrando la interacción de los elementos en la misma área.

1.3. Organización de la tesis

La tesis está estructurada para abordar los temas importantes con el objetivo de dar solución a los puntos planteados anteriormente.

En el capítulo dos se describirá el método de Hidrodinámica Suavizada con Partículas, el análisis de las ecuaciones que modelan a éste, así como algunos conceptos requeridos para su desarrollo. Este método se utilizará para el diseño e implementación del sistema dinámico. Más adelante se explicará el por qué de la elección de este método.

Una vez que se tiene el sistema dinámico de un fluido incompresible, lo siguiente es la unión e interacción del fluido con el objeto deformable. Para esto se deben contemplar criterios de colisión entre las partículas del fluido y la superficie del objeto deformable.

Para el capítulo tres se mostrarán las condiciones que se tienen que considerar para la detección de las colisiones existentes entre las partículas del fluido y el objeto deformable, así como el procesamiento de las fuerzas implicadas en dichas colisiones.

En el capítulo cuatro se expondrán los resultados obtenidos al realizar la simulación de la interacción entre el fluido y el objeto deformable. Dentro de los resultados se considerará también la simulación de un objeto sólido dentro del fluido.

Finalmente, en el capítulo cinco, se discutirán las conclusiones y el trabajo futuro, ya que este tema tiene mucho campo para ser explotado.

Capítulo 2

Hidrodinámica Suavizada con Partículas

2.1. Antecedentes

Los fluidos dinámicos por computadora (CFD del inglés “Computational Fluid Dynamics”) son en la actualidad una serie de herramientas importantes además de un tema fascinante. Los CFD dan paso a las innovaciones tecnológicas sobre el diseño y construcción de aviones, submarinos, automóviles, sistemas virtuales, etc. ya que permiten observar a detalle los efectos entre los sistemas dinámicos de cuerpos y fluidos.

2.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones fundamentales que gobiernan el movimiento de los fluidos son las **ecuaciones de Navier-Stokes**. Éstas son ecuaciones en derivadas parciales no lineales y se pueden aplicar para el modelado de la atmósfera terrestre, el flujo alrededor de vehículos o proyectiles y, en general, cualquier fenómeno que se relacione con fluidos. Estas ecuaciones pueden estar representadas por diferentes modelos matemáticos dependiendo del tipo de fluido que se este manipulando [3]. Para este trabajo, las ecuaciones se enfocarán a **fluidos incompresibles**; por lo tanto, la ecuación de Navier-Stokes es:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de las partículas del fluido, ρ es la densidad constante del fluido, p es la presión en el punto donde se encuentra la partícula del fluido, μ es la viscosidad cinemática y \mathbf{f} la fuerza externa que actúa sobre el fluido. El primer término de la derecha, es llamado *término de convección*, y representa el cambio de velocidad del fluido cuando pasa de un campo de velocidad a otro con velocidad diferente. Al segundo término, se le conoce como *término de viscosidad*. Éste simboliza la fricción interna y es normal a la tensión generada por el movimiento y por la interacción de las partículas del fluido. El tercero se llama *término de la presión*, en el cual, cada partícula es empujada en la

dirección opuesta al gradiente de la presión [18].

Como se observa, la ecuación (2.1) es una derivada parcial no lineal, por lo que no se dispone de una solución general. Por ende, se tiene que recurrir al análisis numérico para determinar su solución.

2.1.2. Métodos de solución

Los métodos tradicionales que se utilizan para dar solución a las ecuaciones de Navier-Stokes se auxilian de la creación de una malla computacional, la cual es usada para discretizar las ecuaciones diferenciales parciales. La malla computacional es creada en el espacio y dominio del fluido, y tiene que cubrir completamente a éste. Este método se denomina *método Euleriano*. El método Euleriano con frecuencia utiliza mallas computacionales muy finas (pequeñas), para cubrir todo el fluido, con el propósito de capturar las características importantes de éste. Este método a menudo es muy costoso computacionalmente, además de que su representación no es directa, por lo que necesita otros procedimientos para su visualización. Por lo regular, en la mayoría de los métodos que utilizan las mallas como solución a las ecuaciones del fluido, pueden arrojar datos difusos o erróneos. Esto se debe a los términos no lineales de las ecuaciones y este comportamiento también afecta al método Euleriano [15].

A principios de los años noventa, se introdujeron los métodos “sin malla”, los cuales han experimentado un fuerte desarrollo en el ámbito de la Mecánica Computacional. Entre éstos, los métodos de partículas proporcionan muy buenas soluciones (al menos cualitativas) a los problemas de gran complejidad, lográndose un avance notable en los últimos años en su fundamentación teórica.

Las formulaciones “sin malla” están fundamentadas en técnicas de interpolación específicas como las de estimación de tipo *kernel* o de aproximaciones de mínimos cuadrados móviles. No obstante, los métodos “sin malla” en Mecánica Computacional no consisten únicamente en esquemas de interpolación distintos, sino que constituyen una potente herramienta para resolver ecuaciones de fluidos, sin necesidad de efectuar una partícula explícita del dominio en determinados subdominios no solapados por las mallas. Su principal ventaja frente a las técnicas numéricas convencionales es evitar la conectividad rígida que exigen éstas, sustituyendo los elementos que caracterizan las mallas por subdominios asociados a cada uno de los puntos en que se discretiza el dominio [5]. De entre todos ellos, el primer método propuesto fue la Hidrodinámica Suavizada con Partículas (HSP), del nombre en inglés *Smoothed Particle Hydrodynamics*.

Dicho método se presentó como una aproximación de Monte Carlo para la resolución de problemas de dinámica de gases en astrofísica [20]. Posteriormente, otros autores como Gingild, Benz o Monaghan, por citar a algunos de los más notables, se encargaron de desarrollar este método, fundamentalmente para aplicaciones a problemas en el campo de

la astrofísica [2].

En 1992 Monaghan [24], propuso una extensión del método para su aplicación a problemas de líquidos con superficies libres, lo que permitía la aplicación de este método para solucionar problemas de interés en ingeniería. En esencia, el método de HSP utiliza una aproximación lagrangiana a la mecánica de fluidos en la medida en que sigue la evolución de las distintas variables ligándolas a las partículas del fluido más que asociándolas a una posición fija en el espacio. Esta característica es la que dota de más fuerza a este método, puesto que de este modo se evitan muchos de los problemas asociados a las aproximaciones eulerianas más comunes. Además de que su representación puede ser de manera directa utilizando geometría primitiva [30].

Dicho lo anterior, se utilizará el método HSP como propuesta para solucionar el sistema dinámico, porque éste permite el movimiento libre del fluido en una superficie mientras que en el método euleriano, el fluido se limita a trabajar en el espacio creado por la malla que utiliza este método.

2.2. Modelado matemático

El HSP, al igual que los demás métodos “sin malla”, trabaja con técnicas de interpolación. A partir de esta consideración, se propone una función $f(r)$ que tome valores en su dominio D , el cual está contenido en los números reales con dimensión n , $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Se puede definir una función $\langle f(r) \rangle$ como la media de la función f en torno al punto r :

$$\langle f(r) \rangle = \int_D f(r') \cdot W_{r,h}(r') dr' \quad (2.2)$$

La estimación que se utiliza en este método es de tipo *kernel*, el cual está representado por la función $W(r')$ (más adelante se abordará este tema). Por otro lado, suponiendo que a la función $f(r)$ se le conocen N puntos r_j , se puede aplicar una integración numérica de Monte Carlo en la ecuación (2.2) para obtener puntos discretos a partir de los r_j conocidos:

$$\langle f(r) \rangle = \int_D f(r') \cdot W_{r,h}(r') dr' \approx \sum_{j=1}^N f(r_j) \cdot W_{r,h}(r_j) \cdot V_j \quad (2.3)$$

donde V_j representa el volumen del punto r_j para el caso tridimensional. Para un espacio bidimensional sería el área del punto r_j . Por otro lado, si el punto r_j representa una partícula del fluido, la cual presenta características tales como la densidad ρ_j y masa m_j , el volumen está representado por $V_j = \frac{m_j}{\rho_j}$. Al sustituir el volumen de la partícula en la ecuación (2.3) obtenemos:

$$\langle f(r) \rangle \approx \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(r_j) \cdot W_{r,h}(r_j) \quad (2.4)$$

Si se considera el gradiente a la función $\langle f(r) \rangle$ en la ecuación (2.2), se logra la aproximación del HSP:

$$\langle \nabla f(r) \rangle = \int_D \nabla f(r') \cdot W_{r,h}(r') dr' \quad (2.5)$$

Por último, se integra la ecuación (2.5) por partes, quedando como resultado:

$$\langle \nabla f(r) \rangle = \int_S f(r') \cdot W_{r,h}(r') \cdot n \cdot ds + \int_D f(r') \cdot \nabla_r W_{r,h}(r') dr' \quad (2.6)$$

donde S es la frontera del dominio de la función f y el subíndice del gradiente del segundo sumando r , indica que las derivadas de éste son respecto a las coordenadas de la partícula r . Tradicionalmente, se desprecia la integral de la superficie en la ecuación (2.6), debido a que la función f , o bien el propio *kernel*, se anulan en la frontera. En los problemas de astrofísica en los que se usó originalmente el HSP esta aproximación funcionaba bien al tratar con gases autogravitantes. Sin embargo, en los problemas de líquidos con superficies libres y fronteras físicas, la eliminación de la integral de la superficie debe estar compensada con la inclusión de una interacción en la frontera de la función f [2]. En el siguiente capítulo se explicará la manera en que se abordará esta interacción con la frontera.

2.2.1. HSP enfocado a fluidos

Para aplicar el modelo matemático del HSP a mecánica de fluidos con superficie libre, se parte de las ecuaciones de Navier-Stokes (2.1), escribiéndolas para una partícula sin considerar la viscosidad ni las fuerzas externas sobre ésta.

En primer lugar tenemos la ecuación de continuidad, la cual hace referencia a la masa de la partícula, donde ésta no se crea ni se destruye durante el proceso, solamente se conserva.

$$\frac{d}{dt} \rho = -\rho \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.7)$$

Por otro lado, la aceleración de la partícula está dada por:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p \quad (2.8)$$

Haciendo la relación entre la presión y la densidad de la partícula, tenemos:

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{\nabla p}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho, \quad (2.9)$$

por lo tanto, la ecuación (2.8) queda:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho, \quad (2.10)$$

Al aplicar la función de interpolación que utiliza el método HSP (2.4) a la expresión (2.10), se obtiene la ecuación de movimiento para una partícula.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} = - \sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \cdot \nabla_i W_{i,j} \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) da como resultado la aceleración de la partícula i teniendo en cuenta a las partículas j 's del sistema. Por otro lado, para calcular la densidad de la partícula i -ésima, se obtiene de la ecuación (2.4):

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{i,j} \quad (2.12)$$

Pero esta aproximación arroja resultados erróneos al momento en que las partículas se aproximan a la frontera. Este error ocurre en el modelado de los fluidos incompresibles (como el agua), ya que la densidad de ésta tiende a cero cuando se acerca a la superficie (frontera) y la ecuación (2.12) suaviza la densidad en la longitud $2h$, lo que representa que las partículas que se aproximan a la superficie tendrán una densidad incorrecta. Además de provocar este error, también afecta a la ecuación de estado (de la cual se hablará más adelante), que introducirá presiones incorrectas. Para solucionar esto, Gingold y Monaghan [1] proponen la ecuación de continuidad a partir de la expresión (2.7):

$$\frac{d}{dt} \rho_i = \sum_j m_j \mathbf{v}_{i,j} \cdot \nabla_i W_{i,j} \quad (2.13)$$

donde $\mathbf{v}_{i,j}$ es la diferencia entre las velocidades de las partículas i y j , es decir, $\mathbf{v}_{i,j} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$. Para poder usar la ecuación (2.13), se tiene que tener en cuenta la inicialización de la densidad para cada partícula del sistema al inicio de la simulación.

Para completar la ecuación de la aceleración de la partícula (2.11), es necesario incluir y explicar dos términos importantes, el primero es la función de aproximación *kernel* ($W_{i,j}$) y el segundo es la viscosidad artificial (Π).

2.2.2. Kernel

Un punto importante a tratar dentro del modelado del HSP es la descripción y uso del *kernel*. La función *kernel* determina la fuerza de interacción que existe entre las diferentes partículas del fluido. Cada i -ésima partícula interactúa solamente con sus vecinos que se encuentran dentro de una zona de influencia representada por un círculo (en el caso bidimensional) o una esfera (en el caso tridimensional) de radio h . Esta zona de influencia es una función de interpolación que determina la presión que actúa directamente sobre las partículas vecinas. En la literatura existen diferentes tipos de funciones de interpolación, tal como funciones *B-Spline* o *Gaussianas*. Otros tipos de *kernels* son planteados en [9, 14]. Como se observó en las ecuaciones (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) y (2.6), el *kernel* es

representado por $W_{r,h}(r')$. Otra forma más sencilla de representarlo es $W(\mathbf{r}, h)$, donde \mathbf{r} es la distancia que existe entre la partícula i y la partícula vecina j , es decir, $\mathbf{r} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$, donde \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_j son las posiciones de las partículas en el espacio; y a h se le conoce como “distancia de suavizado”, la cual se utiliza como el ancho (o radio) de la zona de influencia.

Cada función de aproximación tipo *kernel*, debe tener las siguientes propiedades:

1. Ser simétrica cuando $\mathbf{r} = 0$ y la función Delta de Dirac disminuya cuando el límite h se aproxima a cero,

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(|\mathbf{r}|, h) = \delta(|\mathbf{r}|),$$

2. la normal de la función debe ser igual a uno,

$$\int W(|\mathbf{r}|, h) d\mathbf{r} = 1,$$

3. el *kernel* se hace cero para los vecinos que tienen una distancia de más de $2h$, $|\mathbf{r}| > 2h$,

$$W(|\mathbf{r}| > 2h, h) = 0,$$

lo cual indica que en la búsqueda de los vecinos se debe tomar en cuenta que la distancia entre la partícula i y la partícula j sea a lo más $2h$ para que éstas se consideren vecinas.

Uno de los *Kernels* más utilizados en la literatura es el *B-Spline*, propuesto por Monaghan y Lattanzio [27], el cual se define como:

$$W(\mathbf{r}, h) \triangleq C \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3, & \text{si } 0 \leq q < 1 \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3 & \text{si } 1 \leq q < 2 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (2.14)$$

donde

$$q = \frac{r_{i,j}}{h} \text{ y } r_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (2.15)$$

la variable C es un escalar cuyo valor depende de la dimensión en que se esté trabajando. Estos valores son: $\frac{2}{3h}$ para una dimensión, $\frac{10}{7h^2}$ para el caso bidimensional y para el caso tridimensional es $\frac{1}{\pi h^3}$. A continuación se muestra la representación de forma gráfica de la función.

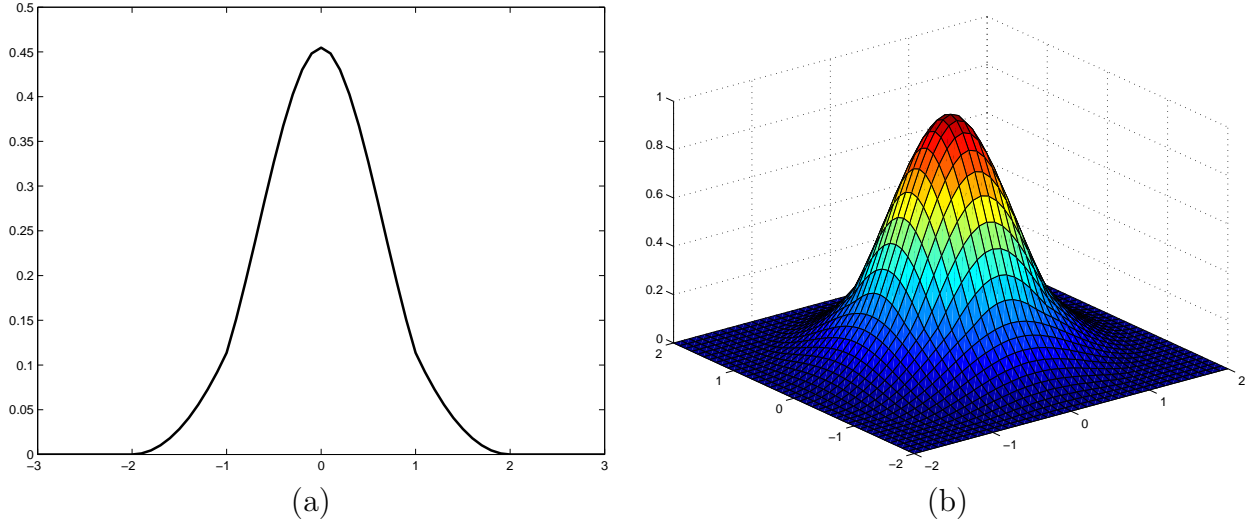


Figura 2.1: Gráfica de la función del kernel en 2 dimensiones (a) y 3 dimensiones (b)

Como se puede observar en la figura 2.1, el área donde existe interacción entre las partículas está comprendida entre -2 y 2 cuando la función está centrada en el origen. Es decir, cuando la distancia entre la partícula i (que se está evaluando) y la partícula j es mayor a $2h$, no hay ninguna interacción entre ellas. En caso contrario, cuando la distancia entre ellas es menor de $2h$, entonces, existe interacción y si esta distancia es muy pequeña, la interacción es más grande y fuerte.

Gradiente del kernel

De acuerdo con las ecuaciones (2.11) y (2.13), se trabaja con el gradiente del *kernel*. Por lo tanto, es necesario obtener las derivadas parciales de la función *kernel* (2.14). Las derivadas parciales se efectúan con respecto a las coordenadas (x, y, z) que maneja la distancia entre las partículas $(r_{i,j})$. Para obtenerlas, aplicamos la regla de la cadena empezando por $r_{i,j}$, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} r_{i,j} = \frac{1}{r_{i,j}}(x_i - x_j), \quad \frac{\partial}{\partial y_i} r_{i,j} = \frac{1}{r_{i,j}}(y_i - y_j) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial z_i} r_{i,j} = \frac{1}{r_{i,j}}(z_i - z_j) \quad (2.16)$$

se sustituye $(x_i - x_j)$, $(y_i - y_j)$ y $(z_i - z_j)$ por $\Delta x_{i,j}$, $\Delta y_{i,j}$ y $\Delta z_{i,j}$, correspondiente, en la ecuación (2.16). Por lo tanto, esta ecuación queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} r_{i,j} = \frac{\Delta x_{i,j}}{r_{i,j}}, \quad \frac{\partial}{\partial y_i} r_{i,j} = \frac{\Delta y_{i,j}}{r_{i,j}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial z_i} r_{i,j} = \frac{\Delta z_{i,j}}{r_{i,j}} \quad (2.17)$$

Posteriormente, al aplicar las derivadas parciales a q , tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} q = \frac{1}{h} \frac{\partial r_{i,j}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial y_i} q = \frac{1}{h} \frac{\partial r_{i,j}}{\partial y_i} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial z_i} q = \frac{1}{h} \frac{\partial r_{i,j}}{\partial z_i} \quad (2.18)$$

sustituyendo la ecuación (2.17) en la expresión (2.18), obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} q = \frac{1}{h} \frac{\Delta x_{i,j}}{r_{i,j}}, \quad \frac{\partial}{\partial y_i} q = \frac{1}{h} \frac{\Delta y_{i,j}}{r_{i,j}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial z_i} q = \frac{1}{h} \frac{\Delta z_{i,j}}{r_{i,j}} \quad (2.19)$$

Por último, el gradiente del *kernel* (2.14), en función de sus derivadas parciales queda de la siguiente manera:

$$\nabla_i W(\mathbf{r}, h), \text{ cuando } 0 \leq q < 1 = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} W(\mathbf{r}, h) = -\frac{C}{h^2} (3 - \frac{9}{4}q) \Delta x_{i,j} , \\ \frac{\partial}{\partial y_i} W(\mathbf{r}, h) = -\frac{C}{h^2} (3 - \frac{9}{4}q) \Delta y_{i,j} , \\ \frac{\partial}{\partial z_i} W(\mathbf{r}, h) = -\frac{C}{h^2} (3 - \frac{9}{4}q) \Delta z_{i,j} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\nabla_i W(\mathbf{r}, h), \text{ cuando } 1 \leq q < 2 = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} W(\mathbf{r}, h) = -\frac{3}{4} \frac{C}{h \cdot r_{i,j}} (2 - q)^2 \Delta x_{i,j} , \\ \frac{\partial}{\partial y_i} W(\mathbf{r}, h) = -\frac{3}{4} \frac{C}{h \cdot r_{i,j}} (2 - q)^2 \Delta y_{i,j} , \\ \frac{\partial}{\partial z_i} W(\mathbf{r}, h) = -\frac{3}{4} \frac{C}{h \cdot r_{i,j}} (2 - q)^2 \Delta z_{i,j} \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\nabla_i W(\mathbf{r}, h), \text{ cuando } q \geq 2 = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} W(\mathbf{r}, h) = 0 , \\ \frac{\partial}{\partial y_i} W(\mathbf{r}, h) = 0 , \\ \frac{\partial}{\partial z_i} W(\mathbf{r}, h) = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Las ecuaciones (2.20, 2.20 y 2.21), se dividen en los tres casos que plantea la función de interpolación (2.14). Estas ecuaciones son las que se tienen que considerar al momento de resolver el gradiente del *kernel*. Otro aspecto importante que se tiene que considerar dentro de la ecuación (2.11) es el término de la viscosidad artificial.

2.2.3. Viscosidad artificial

En la ecuación de movimiento (2.11), se contempla un fluido no viscoso. Esto produce que el fluido presente oscilaciones y colisiones no físicas en la simulación. Para resolver este problema que existe en el fluido, se introduce un término denominado **viscosidad artificial**. Existen muchas propuestas sobre este término, pero la más usada es la viscosidad *pressure* [28]:

$$\Pi_{i,j} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{i,j} \mu_{i,j} + \beta \mu_{i,j}^2}{\bar{\rho}_{i,j}}, & \text{para } \mathbf{v}_{i,j} \cdot \mathbf{r}_{i,j} < 0; \\ 0, & \text{para otro caso} \end{cases} \quad (2.23)$$

donde

$$\mu_{i,j} = \frac{h \mathbf{v}_{i,j} \cdot \mathbf{r}_{i,j}}{\mathbf{r}_{i,j}^2 + 0.001h^2}, \quad \bar{\rho}_{i,j} = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j) \quad \text{y} \quad \bar{c}_{i,j} = \frac{1}{2}(c_i + c_j) \quad (2.24)$$

la variable c describe el promedio de la velocidad del sonido. Las constantes α y β son constantes de viscosidad, las cuales toman valores de $0.1 - 0.01$ y 0 , respectivamente [24]. La constante α produce valores viscosos en el volumen del fluido. Por otro lado, la constante β , amortigua las colisiones entre partículas cuando la velocidad de la partícula es muy alta.

En el denominador de la primera expresión en (2.24) se contempla el término $0.001h^2$ para evitar divergencias cuando la distancia entre las partículas i y j sea mínima. La expresión de la viscosidad artificial, se introduce en la ecuación de movimiento (2.11). Por lo tanto, ésta queda de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} = - \sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{i,j} \right) \cdot \nabla_i W_{i,j} \quad (2.25)$$

Al introducir la viscosidad artificial en la ecuación (2.11), además de evitar los efectos de oscilaciones y colisiones no reales, se incluye la disipación de energía (fricción) entre las partículas al momento de existir colisiones entre ellas.

Por último, para completar la ecuación de movimiento (2.25), se agregan las fuerzas externas que existen en las partículas del fluido. La fuerza externa contempla los efectos de las superficies de fronteras y los de la gravedad G . Por lo tanto, la ecuación (2.25) queda se la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} = - \sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{i,j} \right) \cdot \nabla_i W_{i,j} + \mathbf{F} \quad (2.26)$$

Cabe aclarar que las fuerzas externas se normalizan con respecto a la masa de las partículas, por lo que al final las fuerzas externas se convierten en aceleraciones externas.

2.2.4. Análisis dimensional

Una forma segura de comprobar que la expresión (2.26) entrega resultados correctos, es realizar un análisis dimensional, con el fin de confirmar que las unidades de los valores que arroja dicha ecuación sean las adecuadas. Además, saber qué unidades maneja la viscosidad artificial. Entonces, se propone que la fuerza externa de las partículas sea la fuerza de gravedad \mathbf{G} . De tal forma, cada variable involucrada en esta expresión, tendrá las siguientes unidades:

$$m = M$$

$$p = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$$

$$\rho = M \cdot L^{-3}$$

$$\mathbf{G} = L \cdot T^{-2}$$

donde M , T y L representan la masa (kilogramos), el tiempo (segundos) y la distancia (metros), respectivamente. Sustituyendo los valores y simplificando los términos en la ecuación (2.26), tenemos:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} = M \left(M^{-1} \cdot L^5 \cdot T^{-2} \right) \cdot \nabla W_{i,j} + L \cdot T^{-2} \quad (2.27)$$

Por lo tanto, se puede deducir que las unidades que maneja la viscosidad artificial son:

$$M^{-1} \cdot L^5 \cdot T^{-2}.$$

Por otro lado, se sabe que el *kernel* (2.14) con el que trabaja este método está en función de la distancia entre las partículas ($r_{i,j}$), y la distancia de suavizado (h). Por lo tanto, las unidades para ambas son L . Además, éste trabaja en diferentes dimensiones, por lo cual, se tiene que especificar en el escalar C que multiplica al *kernel* en qué dimensión se trabajará. Para este caso se propone el espacio tridimensional, por lo que C es igual a $\frac{1}{h^3}$, entonces, sustituyendo este valor en la ecuación (2.27) tenemos:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} = M \left(M^{-1} \cdot L^5 \cdot T^{-2} \right) \cdot \nabla \left(\frac{1}{h^3} \right) + L \cdot T^{-2} \quad (2.28)$$

Al obtener las derivadas parciales del *kernel* con respecto a la distancia, la expresión (2.28) queda:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} = M \left(M^{-1} \cdot L^5 \cdot T^{-2} \right) \cdot L^{-4} + L \cdot T^{-2} \quad (2.29)$$

Resolviendo la ecuación (2.29), obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} = L \cdot T^{-2} \quad (2.30)$$

De acuerdo al resultado obtenido, podemos comprobar que los valores que entrega la ecuación de movimiento (2.26), cuentan con las unidades correctas, que son las mismas que las unidades que utiliza la aceleración (*metros/segundos²*).

Hasta este punto, se ha descrito el modelado del método HSP así como las ecuaciones de movimiento y de continuidad que son las expresiones importantes para la implementación de éste. Sin embargo, existe un inconveniente, ya que en este trabajo se desea simular un fluido incompresible y el modelado anteriormente descrito funciona correctamente para fluidos compresibles. Es por ello que se tiene que adaptar este método a fluidos incompresibles mediante una ecuación llamada **ecuación de estado**.

2.3. Fluidos incompresibles utilizando el HSP

Dentro de la mecánica de fluidos se encuentran dos clases de fluidos: los compresibles y los incompresibles. Cuando la densidad de un fluido es invariable en todo el volumen de éste y a lo largo de todo su movimiento, es decir, no existe ninguna compresión o dilatación del fluido, entonces se habla de un fluido incompresible [17]. Se tienen que tomar en cuenta dos aspectos importantes en la solución de los fluidos incompresibles: el primero es la conservación de la masa y el segundo es la conservación del momento [36].

Algunos fluidos se pueden considerar como *fluidos ligeramente compresibles* (tal es el caso del agua), lo que permite que estos fluidos puedan ser representados por medio de fluidos artificiales incompresibles. Esta propuesta es aprovechada por el método HSP para hacer una aproximación de un líquido a un fluido artificial, el cual se considera ligeramente compresible. Para lograr esto, se necesita que la velocidad del sonido sea lo suficientemente grande para que las fluctuaciones de la densidad sean insignificantes [26]. Por lo tanto, se introduce una ecuación que ligue la presión con la densidad de tal forma que, pequeñas variaciones de densidad, se produzcan fuertes variaciones en la presión (lo que ocurre físicamente en un líquido). A esta ecuación se le llama *ecuación de estado*. La ecuación de estado que frecuentemente se utiliza cuando la presión atmosférica es despreciable es la de *Cole* [4]:

$$P = B \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (2.31)$$

donde ρ_0 es la densidad de referencia (por ejemplo, 1000 para el agua). Si las constantes γ y B toman valores de 7 y 3000 respectivamente, provocan que la presión del agua sea por debajo de las 10^5 atmósferas. Con esto, se busca que el valor de B provoque que la velocidad del sonido sea lo suficientemente grande, de tal forma que la densidad relativa tenga fluctuaciones pequeñas, es decir:

$$\frac{|\delta\rho|}{\rho} \sim \frac{v^2}{c_s^2} \quad (2.32)$$

donde v es la máxima velocidad del fluido. Por otro lado, si $\frac{v}{c_s} < 0.1$, se puede asegurar que $\frac{|\delta\rho|}{\rho} \sim 0.01$. Entonces, la ecuación de la velocidad del sonido que se relaciona con la densidad de referencia es la siguiente:

$$c_s^2 = \frac{\gamma B}{\rho_0} \quad (2.33)$$

Por lo tanto, si $B = 100\rho_0 v^2 / \gamma$, las fluctuaciones de la densidad relativa pueden tomar valores aproximadamente a 0.01. La velocidad máxima del fluido se puede aproximar por medio de $v^2 = 2gH$, donde g es la constante gravitacional y H es área de trabajo del fluido, que por lo regular se considera un cuadrado [24].

La principal desventaja de utilizar la ecuación de estado (2.31) es la repercusión en la estabilidad numérica del método, restringiendo que el paso de integración sea pequeño al momento de simular el fluido. Esto es debido a la forma en que trabaja el HSP, ya que este método agrupa las partículas para obtener los valores de la aceleración y continuidad de cada una de ellas, dando como resultado que las presiones de algunas partículas lleguen a ser negativas [25], ocasionando valores erróneos en pasos de integración grandes. Esta desventaja se tiene que tomar en cuenta en el momento de la implementación ya que puede ser la principal causa de una simulación errónea, a pesar de que el método numérico esté bien programado.

2.4. Implementación del HSP

Una vez descrito el método HSP, junto con su modelado, ecuaciones de movimiento (2.26), de continuidad (2.13) y de estado (2.31), se puede realizar la implementación de éste para poder obtener la simulación de un fluido.

2.4.1. Estructura de datos para las partículas

Este método se basa en partículas (como se había mencionado anteriormente), las cuales pueden tener los siguientes atributos: velocidad, posición, densidad, masa, tiempo de vida, temperatura, tamaño, etc. Dentro de estos atributos, los más importantes que debe contener cada partícula, son: **la velocidad** y **la posición**. Considerando que el número de partículas que forman a un fluido son demasiadas, dependiendo de qué tan complejo y real sea éste, se propone realizar una estructura la cual contenga las principales características de las partículas, con el fin de que exista un orden y agrupamiento más fácil. A continuación se muestra dicha estructura:

Partícula
-Aceleración
-Velocidad
-Posición
-Densidad
-Presión

Figura 2.2: Estructura propuesta para las partículas.

Como se observa en la figura 2.2 se utilizan cinco características, las cuales se van actualizando a lo largo del tiempo en la simulación del fluido. La aceleración es un punto clave para obtener la velocidad y la posición de cada partícula, ya que:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} = \mathbf{a} \quad (2.34)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \mathbf{v} \quad (2.35)$$

donde \mathbf{a} es la aceleración, \mathbf{v} la velocidad y \mathbf{r} la posición de la partícula. Obviamente, estos atributos se deben manejar como vectores, ya sea para dos o tres dimensiones. La presión y la densidad, por sus propiedades físicas, se manejan en forma escalar.

Las características de las partículas que no se actualizarán a lo largo de la simulación, es decir, las que tendrán un valor constante, son la masa y la velocidad del sonido. Para obtener la masa para cada partícula partimos del volumen del fluido $V = \frac{m}{\rho}$. De ahí, despejamos la masa y nos queda $m = V \cdot \rho$. El volumen del fluido se calcula con respecto

al espacio que ocupa inicialmente el fluido. Por lo regular, se considera a éste como un cubo de dimensiones H , donde H es el largo de un lado de dicho cubo. La densidad ρ se toma como densidad de referencia, dependiendo del fluido que se esté considerando simular. Para este caso, se considera el agua, por lo que su densidad de referencia es de 1000 kg/m^3 . Entonces, multiplicando la densidad de referencia por el volumen del fluido se obtiene la masa total del fluido. Por último, se divide la masa total de fluido entre el número de partículas que conforman a éste, dando como resultado la masa para cada partícula del fluido. Por otro lado, la velocidad del sonido se puede obtener fácilmente de la ecuación (2.33). Entonces, para formar el sistema de partículas (fluido), se tiene que hacer un arreglo de N partículas (donde N es el número de partículas en el sistema), cuyo tipo de dato a utilizar tenga esta estructura.

2.4.2. Diagrama general del sistema dinámico

Teniendo la estructura de datos de la figura 2.2 para las partículas, se procede a realizar un esquema general para el fluido. Con esto se podrá dar una idea general de los datos que se tienen que utilizar así como las funciones principales para llevar a cabo la simulación.

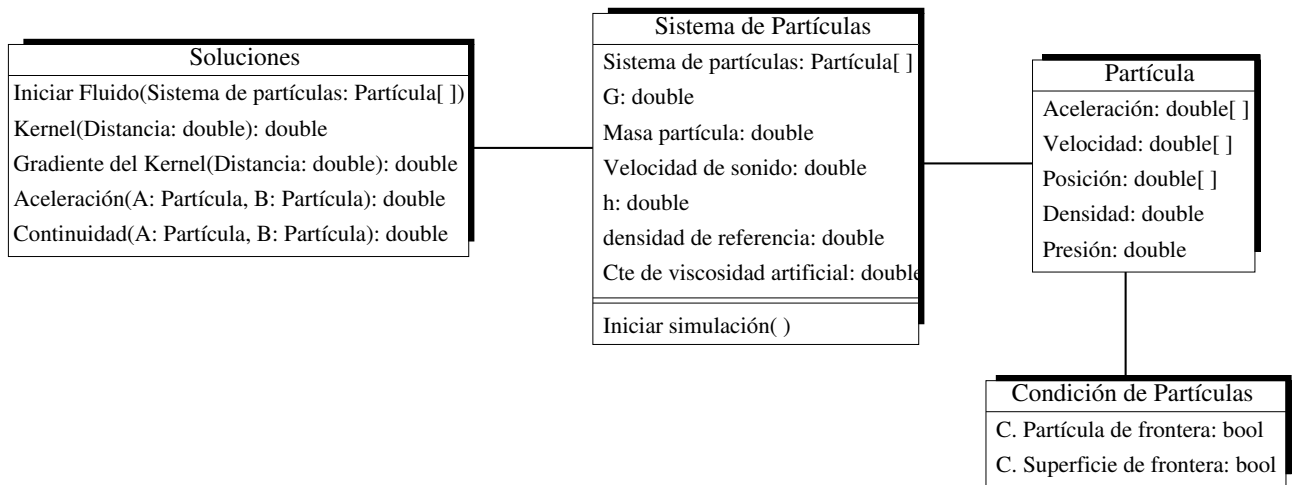


Figura 2.3: Esquema general del sistema dinámico.

Las funciones que se utilizan para resolver las ecuaciones de movimiento, de continuidad, la información del gradiente, así como la posición inicial de las partículas dentro de su área de trabajo, se encuentran localizadas en el bloque llamado *Soluciones*. Este bloque tiene que estar disponible en todo momento para que al unir el fluido con el objeto deformable, se simplifique la tarea y se tenga un orden sobre las herramientas y funciones que utiliza el fluido.

El *Sistema de Partículas* es el bloque principal del fluido, el cual contendrá un vector o arreglo de las partículas que conforman al fluido. Como se puede observar, cada uno de los elementos de éste será de la estructura *Partícula* (como se había comentado anteriormente). A su vez, en este bloque se guardarán las constantes principales que se utilizan en las ecuaciones que describen el comportamiento del fluido. Por ejemplo, la constante de gravedad G , la distancia de suavizado h , la densidad de referencia ρ_0 , entre otras. Por otro lado, contiene la función principal que ejecutará toda la simulación del fluido, la cual invocará a las funciones que están contenidas en el bloque *Soluciones*. Por último se incluye un bloque llamado *Condición de Partículas*, el cual contempla las condiciones para las partículas de frontera (lo cual se abordará en el siguiente capítulo), las cuales delimitarán el espacio de trabajo del fluido.

2.4.3. Algoritmos propuestos

Con el diagrama 2.3 se facilita la implementación de la dinámica del fluido, así como su simulación. Las ecuaciones que describen al fluido contienen cierta independencia entre sí, por lo que se puede realizar por separado su programación. Con esto se obtendría cierta similitud al esquema planteado en el diagrama 2.3. La forma de llevar a cabo la implementación del fluido es dividiéndola en varios algoritmos, los cuales se dediquen específicamente a obtener cada una de las características de las partículas. De esta manera, se tiene la ventaja de encontrar y solucionar de forma más rápida errores eventuales de programación. Entonces, se proponen pues los siguientes algoritmos para describir el comportamiento del fluido.

Primero, se calcula la aceleración y la continuidad para cada partícula, ya que estos datos son los más importantes de las partículas, ya que de ellos se desprenden los demás datos tales como la velocidad, posición y densidad. Para calcular la aceleración y la continuidad se necesitan a los vecinos de la partícula que se estén evaluando.

Algoritmo 1 Calcula aceleración y continuidad de las partículas

Entrada: Sistema de partículas P_i , número de partículas N

Requerimientos: $N > 0$ y $1 \leq i \leq N$

- 1: **for all** P_i tal que $1 \leq P_i \leq N$ **do**
 - 2: Búsqueda de vecinos para P_i
 - 3: Calcula la aceleración de P_i usando la ecuación (2.26)
 - 4: Calcula el cambio de densidad para P_i utilizando la expresión de continuidad (2.13)
 - 5: **end for**
-

Una vez calculada la aceleración de cada partícula se procede a actualizar las características primordiales de éstas (velocidad, posición y densidad). Para esto se utiliza el método numérico “salto de rana” [10]. Este método, además de su sencillez de implementación, entrega excelentes resultados para este tipo de ecuaciones con derivadas de primer orden.

Algoritmo 2 Actualiza posición, velocidad y densidad de las partículas

Entrada: Sistema de partículas P_i , número de partículas N

Requerimientos: $N > 0$ y $1 \leq i \leq N$

- 1: **for all** P_i tal que $1 \leq P_i \leq N$ **do**
 - 2: Actualiza la posición, velocidad y densidad de P_i mediante el método numérico “salto de rana”
 - 3: **end for**
-

Finalmente, se calcula la presión que existe en cada partícula y que a su vez, hace que el fluido sea *ligeramente compresible*.

Algoritmo 3 Calcula la presión de cada partícula

Entrada: Sistema de partículas P_i , número de partículas N

Requerimientos: $N > 0$ y $1 \leq i \leq N$

- 1: **for all** P_i tal que $1 \leq P_i \leq N$ **do**
 - 2: Calcula la presión para P_i mediante la ecuación de estado (2.31)
 - 3: **end for**
-

Con base en estos algoritmos (1, 2 y 3), se puede formar el algoritmo principal que hará uso de éstos.

Algoritmo 4 Algoritmo principal para el método HSP

- 1: $t_0 \leftarrow$ tiempo inicial del sistema
 - 2: $\Delta_t \leftarrow$ incremento de tiempo en cada ciclo
 - 3: $T \leftarrow$ tiempo final del sistema
 - 4: **while** $t_0 \leq T$ **do**
 - 5: Calcula aceleración y continuidad de cada partícula utilizando el algoritmo 1
 - 6: Actualiza posición, velocidad y densidad de las partículas por medio del algoritmo 2
 - 7: Calcula presión de cada partícula con base en el algoritmo 3
 - 8: $t_{0+} = \Delta_t$
 - 9: **end while**
-

La simulación del fluido se llevará a cabo cada Δ_t segundos. Con base en lo que se ha comentado (ver sección “Fluidos incompresibles utilizando el HSP”), el paso de integración tiene que ser pequeño para que la simulación del fluido no se vuelva inestable debido a la ecuación de estado (2.31). Por lo tanto, se propone que el valor de Δ_t sea igual a 0.0002 segundos. Esta simulación continuará hasta que el tiempo de inicio llegue a ser igual o superior al valor del tiempo final. Para el caso de la simulación con el objeto deformable, no se contemplará el tiempo final T , ya que éste estará dado por el usuario.

2.4.4. Método de búsqueda de vecinos para una partícula

Como se puede observar, el algoritmo principal 4 para la simulación del fluido es sencillo y fácil para su implementación. El punto fuerte pero también débil de estos algoritmos, radica en el algoritmo 1 que realiza la búsqueda de los vecinos para cada partícula. Esta función es primordial para mejorar o empeorar el rendimiento de los algoritmos. La búsqueda de los vecinos para cada partícula es esencial para poder solucionar las ecuaciones de movimiento y de continuidad, ya que éstas involucran a la función *kernel* y para resolverla se necesita de los vecinos de la partícula que se esté evaluando.

Como una primera aproximación a la búsqueda de los vecinos, se puede realizar una búsqueda exhaustiva. Al efectuar este tipo de búsqueda, su complejidad sería de $O(n^2)$, donde n es el número de partículas en el sistema; como se observa, el costo computacional es elevado.

Para resolver este problema, se propone realizar una cuadrícula dentro del área de trabajo del fluido, en donde cada celda de ésta tendrá una longitud de $2h$. Dicha longitud representa el diámetro de la zona de influencia del *kernel* (ver figura 2.4). Con esto se asegura que las partículas que estén adentro de esta celda se considerarán vecinas unas de otras, evitando el número de comparaciones entre estas partículas.

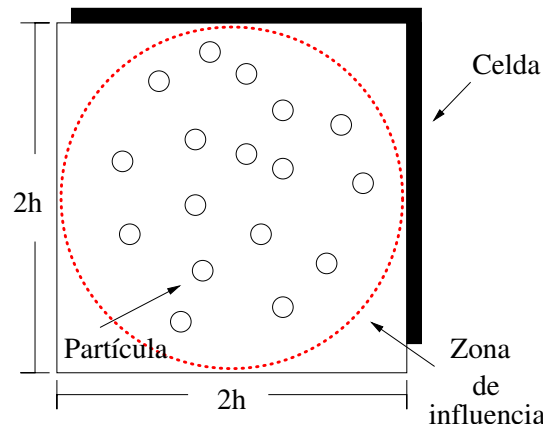
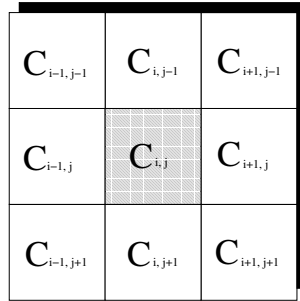


Figura 2.4: Partículas dentro de cada celda

Posteriormente, se realiza la búsqueda de los vecinos para cada partícula. A diferencia de la búsqueda exhaustiva, ésta se realiza solamente en las celdas vecinas de la celda en donde se encuentra la partícula que se está evaluando. En cada celda vecina se tiene que ir comprobando que la distancia entre la partícula a evaluar y la partícula que se considere vecina, no exceda el valor de $2h$. La forma en que se trabaja con esta malla, es mediante el sistema de barrido. Es decir, se toma una celda para identificar cada partícula, ubicando de esta manera a sus partículas vecinas y posteriormente se le calculan sus características. Este proceso se realiza para cada celda de la malla.

Figura 2.5: Vecindario de la celda $C_{i,j}$

Para manejar el control de las partículas dentro de las celdas, se realiza lo siguiente: a cada celda se le asigna un apuntador hacia una lista, la cual contiene todas las partículas que se encuentran posicionadas dentro de dicha celda (ver figura 2.6). El número de listas será igual al número de celdas que se manejen dentro de la malla. El tipo de listas que se utilizan son: *listas simplemente ligadas*, debido a que se necesita guardar solamente el índice de cada partícula.

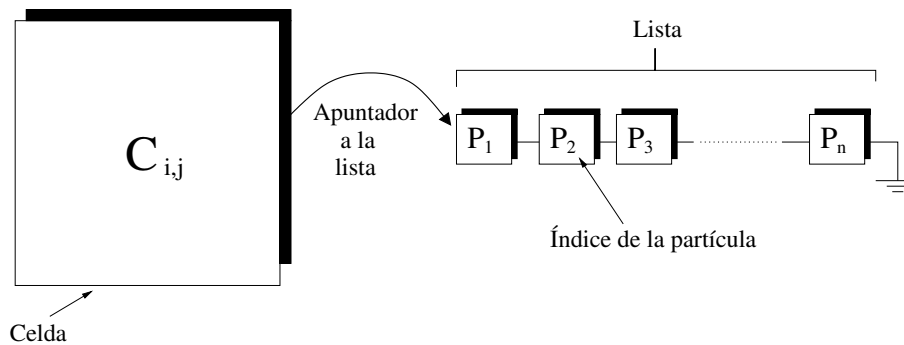


Figura 2.6: Manejo de las partículas dentro de cada celda

Como se sabe, las partículas del fluido se desplazan dentro de su área de trabajo cada Δ_t segundos, por lo que las listas de cada celda se deben estar actualizando, es decir, cada lista debe efectuar un registro de todas las partículas que se encuentren ubicadas dentro de la celda correspondiente a dicha lista.

Como se puede observar, son menores las comprobaciones efectuadas en la búsqueda de las partículas vecinas, por lo que el tiempo de búsqueda así como su complejidad se reducen considerablemente. De esta forma, se muestra el esquema general para resolver el problema de los vecinos de cada partícula.

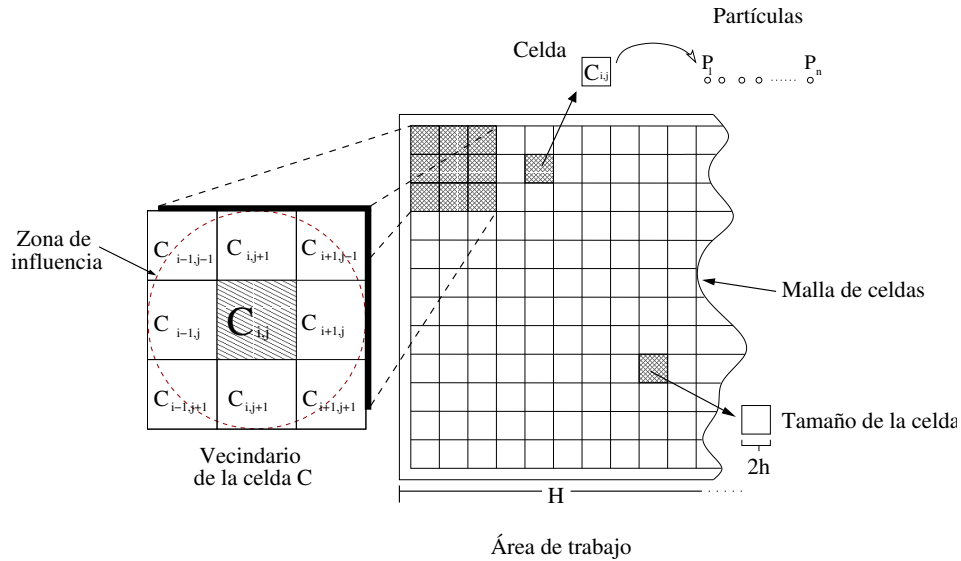


Figura 2.7: Esquema general para resolver la búsqueda de partículas vecinas en dos dimensiones

La descripción anterior está enfocada para el espacio bidimensional por simplicidad de análisis. Para el espacio tridimensional se aplica el mismo método de búsqueda, considerando cubos (volúmenes) en lugar de cuadrados (planos). Los cubos que formarían a la malla tendrán un tamaño de $2h$ en cada lado.

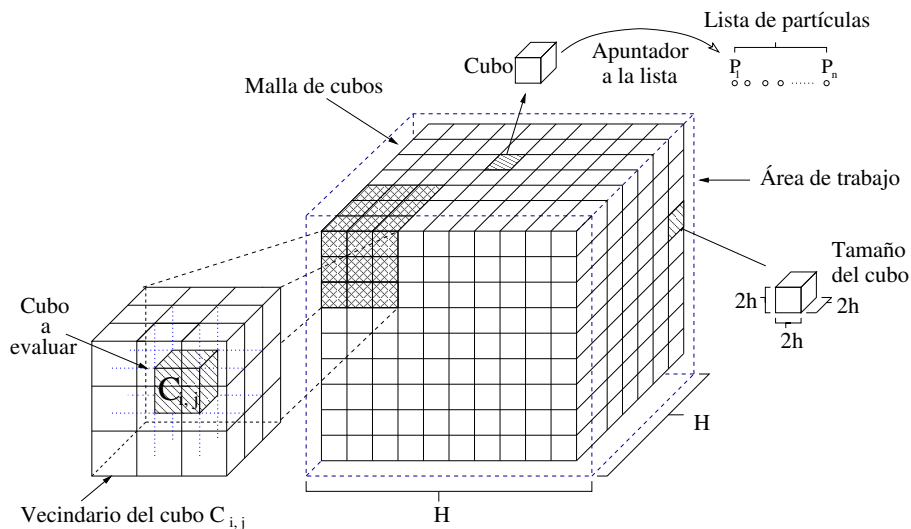


Figura 2.8: Esquema general para resolver la búsqueda de partículas vecinas en tres dimensiones

Capítulo 3

Condiciones de Frontera

En el capítulo anterior se describió cómo modelar un fluido incompresible utilizando el método HSP, así como las ecuaciones principales que describen el comportamiento de éste y su implementación numérica. Como se pudo observar, la implementación del fluido estaba enfocada solamente a éste como tal, sin considerar restricción u obstáculos en su trayecto. Para obtener resultados reales en la simulación de un fluido se tiene que establecer en primer lugar un espacio de trabajo. Estableciendo dicho espacio, se pueden agregar objetos que realicen la función de obstáculos en la simulación del fluido, ya que su realización sería de forma similar al del área de trabajo.

El espacio de trabajo del fluido así como obstáculos localizados dentro de éste, se pueden modelar utilizando dos técnicas diferentes [19]:

- Partículas de frontera
- Superficies de frontera

La elección de la técnica para modelar las condiciones de frontera está basada en la complejidad del espacio de trabajo así como de los obstáculos, es decir, qué resulta más fácil y práctico utilizar para la construcción de éstas. En ocasiones es más rápido realizar la implementación del espacio u obstáculos utilizando las *partículas de frontera* que implementarlas con las *superficies de frontera*, pero el precio a pagar es el aumento de partículas dentro del sistema dinámico, provocando el incremento del tiempo de cómputo en el cálculo de las características de cada una de ellas.

A continuación se mencionará cada una de estas técnicas así como su forma de incluirlas dentro de la simulación del fluido.

3.1. Partículas de frontera

Las partículas de frontera se utilizan mucho en las simulaciones de fluidos para delimitar el área de trabajo de éste. Esto es debido a que su introducción dentro de la simulación del fluido es más fácil y rápida. La diferencia entre las partículas del fluido y las partículas de frontera radica principalmente en la actualización de sus características. En la estructura de datos de la figura 2.2 descrita en el capítulo anterior, se toman en cuenta cinco principales características de las partículas que forman al fluido. Ahora bien, para este caso, las partículas de frontera sólo necesitan tres atributos, los cuales son:

Partícula de Frontera
-Posición
-Densidad
-Presión

Figura 3.1: Atributos que utilizan las partículas de frontera

Los atributos mencionados en la figura 3.1 son suficientes para las partículas de frontera, ya que estas partículas no se requiere actualizar su aceleración, velocidad ni posición por medio del cálculo de la ecuación de movimiento (2.26) descrita en el capítulo anterior. Esto es debido a que las partículas de frontera son estáticas, es decir, su posición de estas partículas es fija durante la simulación del fluido (como se indica en la figura 3.2). Sin embargo, para evitar que las partículas del fluido se salgan del área de trabajo, es necesario estar actualizando en cada paso de integración la densidad y la presión de las partículas de frontera, ya que estos atributos ayudan a repeler las partículas del fluido. La densidad y la presión de las partículas de frontera se actualizan por medio de la expresión de continuidad (2.13) y la ecuación de estado (2.31) respectivamente, las cuales fueron abordadas en el segundo capítulo.

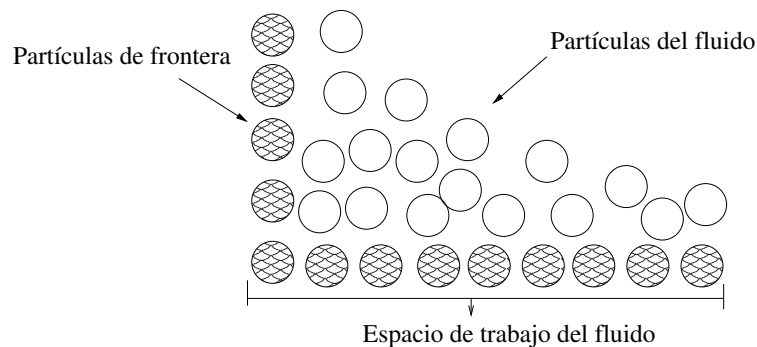


Figura 3.2: Sistema dinámico incluyendo partículas de frontera

Para implementar las partículas de frontera en la simulación del fluido, se tienen que etiquetar las partículas de frontera, con el fin de diferenciar unas de otras. Este punto se tomó en cuenta en el momento de realizar el diagrama general del sistema dinámico descrito en la figura 2.3 del capítulo anterior. Por otro lado, los algoritmos descritos en la sección de “Implementación del HSP” del segundo capítulo deben tomar en cuenta a las partículas de frontera, por lo que los algoritmos 1 y 2 se tienen que modificar, ya que éstos, al momento de efectuar el cálculo y la actualización de las características respectivamente, lo realizan tomando en cuenta el total de todas las partículas involucradas en el sistema dinámico sin distinguir las partículas. Por lo tanto, dichos algoritmos quedan de la siguiente manera:

Algoritmo 5 Calcula aceleración y continuidad de las partículas

Entrada: Sistema de partículas P_i , número total de partículas del sistema dinámico N_t

Requerimientos: $N_t > 0$, $1 \leq i \leq N_t$ y C es una partícula de frontera

```

1: for all  $P_i$  tal que  $1 \leq P_i \leq N_t$  do
2:   Búsqueda de vecinos para  $P_i$ 
3:   if  $P_i \neq C$  then
4:     Calcula la aceleración para  $P_i$  usando la ecuación (2.26)
5:   end if
6:   Calcula el cambio de densidad de  $P_i$  utilizando la expresión de continuidad (2.13)
7: end for

```

Como se observa, el recorrido se realiza para todas las partículas del sistema dinámico (N_t), donde N_t es igual a la suma de las partículas del fluido (N_p), más las partículas de frontera (N_f). Por otro lado, se hace una búsqueda de vecinos para todas las partículas. Esta búsqueda se tiene que aplicar para calcular la aceleración y/o la continuidad de las partículas del fluido. Como se comentó anteriormente, para las partículas de frontera no es necesario calcular su aceleración pero sí su continuidad.

Para la búsqueda de los vecinos de una partícula también se debe de considerar a las partículas de frontera, como se esquematiza en la figura 3.3. De esta forma es posible conocer si las demás partículas del fluido están en la frontera o no, ya que al momento de hacer el cálculo de la aceleración y la continuidad para la partícula del fluido dada, se involucran las presiones y las densidades que ejercen las partículas de frontera sobre la partículas del fluido evitando así que éstas salgan del espacio de trabajo.

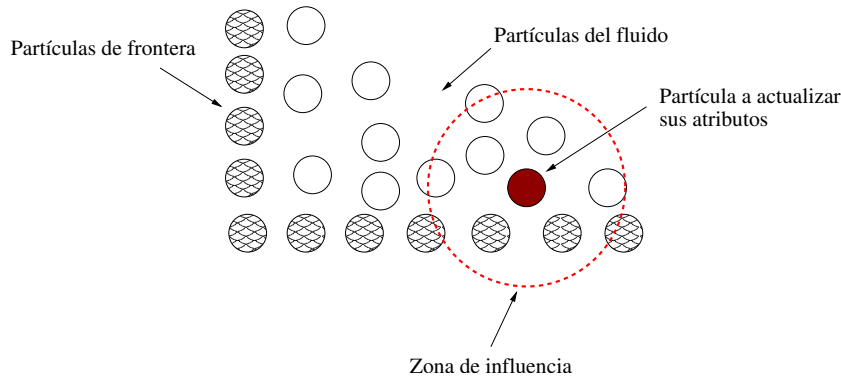


Figura 3.3: Búsqueda de vecinos incluyendo las partículas de frontera

Una vez efectuado el cálculo de la aceleración para las partículas del fluido y el cálculo de la continuidad para todas las partículas del sistema dinámico, se actualizan las características de todas éstas. Este proceso es efectuado por el algoritmo 6.

Algoritmo 6 Actualiza posición, velocidad y densidad de las partículas

Entrada: Sistema de partículas P_i , número total de partículas del sistema dinámico N_t

Requerimientos: $N_t > 0$, $1 \leq i \leq N_t$ y C es una partícula de frontera

- 1: **for all** P_i tal que $1 \leq P_i \leq N_t$ **do**
 - 2: **if** $P_i \neq C$ **then**
 - 3: Actualiza la posición y la velocidad de P_i mediante el método numérico “salto de rana”
 - 4: **end if**
 - 5: Actualiza la densidad para P_i utilizando el método numérico “salto de rana”
 - 6: **end for**
-

En el algoritmo 6, al igual que en el algoritmo 5, se realiza un recorrido sobre todas las partículas para actualizar su aceleración y posición. Al momento de actualizar las características de las partículas, se tiene que hacer la diferencia entre las partículas del fluido y las de frontera. Para ello, se condiciona la actualización de los atributos **posición** y **velocidad** ya que éstos se tienen que actualizar únicamente en las partículas del fluido.

Los algoritmos 3 y 4 quedarían intactos, porque el cálculo de la presión (algoritmo 3) se tiene que efectuar en todas las partículas del fluido y el algoritmo principal (algoritmo 4) no realiza modificaciones sobre los atributos de las partículas.

Al implementar las partículas de frontera en el sistema dinámico se tiene la desventaja de que el número de partículas dentro del sistema se eleva dependiendo de qué tan complejo sea el espacio de trabajo así como los obstáculos que se quieran introducir dentro del fluido. El elevar el número de partículas en el sistema dinámico implica más tiempo de cómputo en el cálculo de las características de las partículas (como se observó en el algoritmo 5), haciendo que la velocidad de la simulación disminuya, alejándose del tiempo real.

3.2. Superficies de frontera

Las superficies de frontera son una mejor alternativa a las partículas de frontera para reducir el tiempo de simulación. Éstas son superficies compuestas por formas geométricas planas (en el espacio bidimensional) o por poliedros (en espacio tridimensional) como se representa en la figura 3.4. Para el caso del espacio tridimensional, los poliedros se pueden construir utilizando cualquiera de los siguientes métodos: mallas de triángulos o mallas de simplejos. A diferencia de las partículas de frontera, las superficies de frontera no aumentan el número total de partículas del fluido, ya que se utilizan los modelos matemáticos que describen la superficie de las figuras geométricas. Por otro lado, las superficies cuentan con un solo atributo, su **posición**, la cual no se actualiza, ya que para cuerpos no deformables la superficie se considera fija en todo momento de la simulación del fluido.

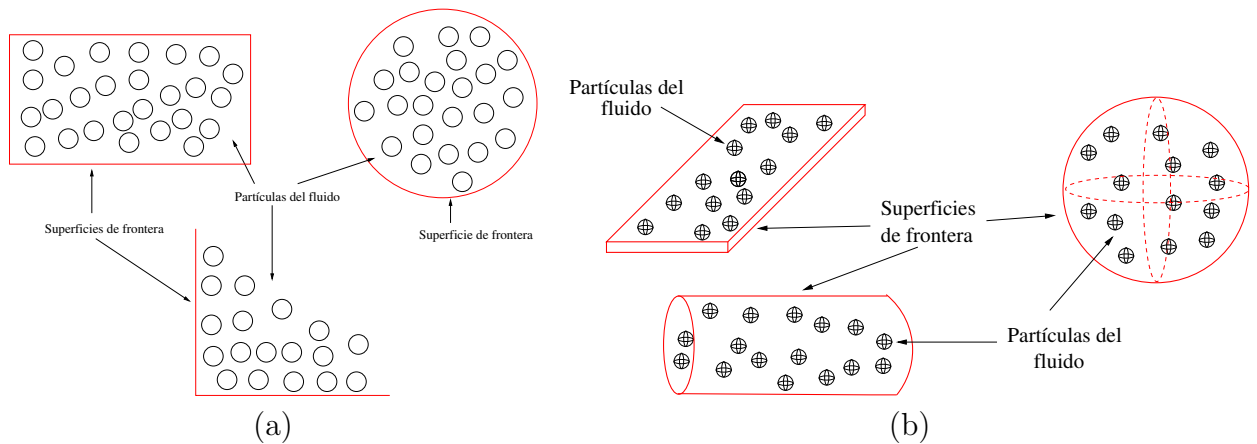


Figura 3.4: Superficies de frontera bidimensionales (a) y/o tridimensionales (b)

La forma de trabajar con las superficies de frontera (como se observa en la figura 3.5), es totalmente diferente de las partículas de frontera, ya que las superficies introducen una **fuerza externa con la superficie** en la partícula del fluido, capaz de mantener a dicha partícula dentro del espacio de trabajo. Esta fuerza debe tener una magnitud igual o mayor que la fuerza interna de la partícula, pero en dirección contraria. La forma en que se sabe cuando se tiene que aplicar dicha fuerza en la partícula, es detectando el choque entre la partícula del fluido y la superficie de frontera; para esto se utilizan los **detectores de colisiones**.

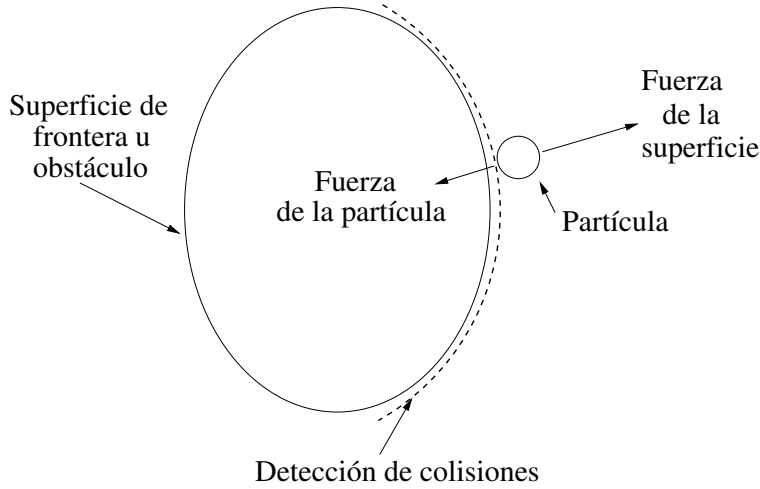


Figura 3.5: Detección de colisiones y fuerza externa aplicada sobre la partícula del fluido

3.2.1. Fuerzas externas en la partícula del fluido

Como se había comentado, las superficies de frontera inyectan una fuerza externa en las partículas del fluido cuando éstas chocan contra la superficie. Para calcular esta fuerza se parte de la ecuación de movimiento (2.26) para una partícula dentro del fluido utilizando el método HSP.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_i = - \sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{i,j} \right) \cdot \nabla_i W_{i,j} + \mathbf{F}_{int} + \mathbf{F}_{ext} \quad (3.1)$$

donde la fuerza interna (\mathbf{F}_{int}), es la fuerza de gravedad y la fuerza externa (\mathbf{F}_{ext}) o fuerza de colisión (\mathbf{F}_c) para este caso, es la fuerza que se inyecta a la partícula dada la colisión existente en la superficie. Cabe mencionar que estas fuerzas deben estar expresadas por unidad de masa ($\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F}_c/m$), por lo que en realidad son aceleraciones.

Ahora se desarrollará el tratamiento de las fuerzas para una partícula que choca contra una superficie.

Se puede modelar la fuerza que la superficie ejerce a la partícula con dos componentes $\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_f$, una perpendicular a la superficie (\mathbf{F}_d), debida principalmente a los esfuerzos elásticos de deformación mecánica de la superficie y una componente tangencial a la superficie (\mathbf{F}_f) debida principalmente a los esfuerzos de fricción. Esta última tendrá la dirección tangencial de la velocidad de la partícula al momento del choque, pero en sentido contrario.

Así pues, es necesario definir estas direcciones. Esto puede hacerse definiendo los vectores unitarios en estas direcciones.

Fuerza normal a la superficie

Sea $\lambda_N \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario en la dirección normal a la superficie de contacto.

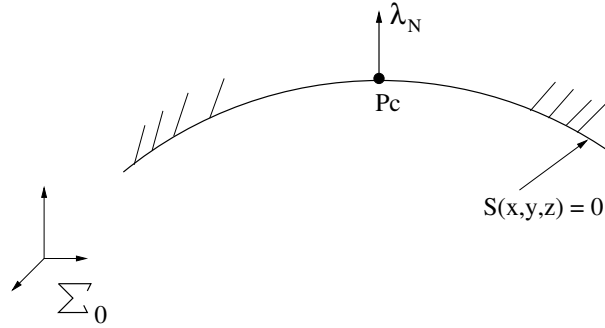


Figura 3.6: Esquema de la fuerza normal a la superficie

Sea $S(x, y, z) = 0$ una función en el espacio euclidiano tridimensional con coordenadas cartesianas, que define una superficie cualquiera. Sea el punto $\mathbf{P}_c = (x_c, y_c, z_c)^T$, el punto en el espacio euclidiano donde ocurre el choque, con coordenadas x_c , y_c y z_c con respecto a un referencial inercial Σ_0 .

El vector λ_N puede ser calculado a partir del gradiente normalizado de la superficie $S(x, y, z)$ en el punto \mathbf{P}_c :

$$\lambda_N \doteq \frac{\nabla_s(\mathbf{P}_c)}{\|\nabla_s(\mathbf{P}_c)\|} = \begin{pmatrix} \lambda_{xN} \\ \lambda_{yN} \\ \lambda_{zN} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

donde $\nabla_s = \left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial z} \right)^T$ y $\|\lambda_N\| = 1$

Por las características de las superficies, el vector unitario λ_N apuntará hacia la dirección cóncava de la superficie $S(\mathbf{P}_c)$, por lo que el signo debe ajustarse dependiendo de la partícula, si está de un lado o del otro.

Se puede suponer que este vector normal apunta hacia el lado de la superficie con el que la partícula ha chocado.

La fuerza de deformación normal

De acuerdo a la figura 3.7 definimos la posición de deformación de la partícula al chocar con la superficie como $\mathbf{X} = \mathbf{P} - \mathbf{P}_c$, donde $\mathbf{P}(x, y, z)$ es la posición de la partícula en el espacio. La posición normal a la superficie puede calcularse como la magnitud (escalar) de dicha deformación en la dirección del vector unitario normal como:

$$\mathbf{X}_N = \|\mathbf{X}_N\| \lambda_N = \lambda_N \|\mathbf{X}_N\| \quad (3.3)$$

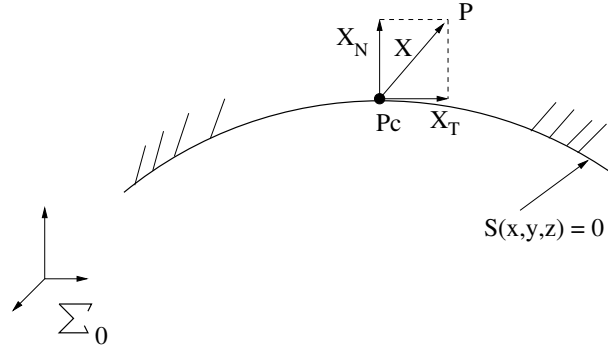


Figura 3.7: Esquema de la fuerza de deformación

La magnitud de este vector de deformación es obtenido por la proyección geométrica del vector de deformación total sobre la dirección normal a la superficie, es decir, usando el producto punto o reescribiendo la relación por medio de álgebra lineal: $\|\mathbf{X}_N\| = \lambda_N \cdot \mathbf{X} = \lambda_N^T \mathbf{X}$. Así, la deformación tangencial se obtiene por la relación siguiente:

$$\mathbf{X}_N = \lambda_N \lambda_N^T \mathbf{X} = \left[\lambda_N \lambda_N^T \right] \mathbf{X} \quad (3.4)$$

donde el operador lineal está dado por:

$$\left[\lambda_N \lambda_N^T \right] = \begin{bmatrix} \lambda_{xN}^2 & \lambda_{xN} \lambda_{yN} & \lambda_{xN} \lambda_{zN} \\ \lambda_{xN} \lambda_{yN} & \lambda_{yN}^2 & \lambda_{yN} \lambda_{zN} \\ \lambda_{xN} \lambda_{zN} & \lambda_{yN} \lambda_{zN} & \lambda_{zN}^2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Con la siguiente propiedad:

$$\left[\lambda_N \lambda_N^T \right]^2 = \|\lambda_N\|^2 \left[\lambda_N \lambda_N^T \right] = \left[\lambda_N \lambda_N^T \right] \quad (3.6)$$

De la misma manera, se puede calcular una velocidad normal, usando velocidades en lugar de posición. Así se define una velocidad de deformación como: $\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{P}} - \dot{\mathbf{P}}_c$, donde $\dot{\mathbf{P}}$ y $\dot{\mathbf{P}}_c$ son las velocidades lineales de la partícula y del punto de contacto, respectivamente, de una superficie rígida (si la superficie se considera rígida y sin movimiento, la velocidad del punto de contacto es nula, $\dot{\mathbf{P}}_c = 0$). Entonces la componente de la velocidad de contacto, normal a la superficie es:

$$\dot{\mathbf{X}}_N = \lambda_N \lambda_N^T \dot{\mathbf{X}} = \left[\lambda_N \lambda_N^T \right] \dot{\mathbf{X}} \quad (3.7)$$

Entonces, la fuerza que la partícula ejerce sobre la superficie puede modelarse por $\mathbf{F}_{dp} = k_s \mathbf{X}_N + b_s \dot{\mathbf{X}}_N$, donde la k_s y b_s son coeficientes de rigidez y disipación viscosa de la superficie de contacto, respectivamente. *Los signos de los términos de la fuerza \mathbf{F}_{dp} están dados por la hipótesis que el vector unitario normal a la superficie es positivo apuntando hacia el interior del cuerpo cuya superficie es la superficie de contacto de la partícula.* Por

la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce la superficie a la partícula es entonces la fuerza de misma magnitud, pero de sentido opuesto. Ésta es calculada entonces como:

$$\mathbf{F}_d = -k_s \mathbf{X}_N - b_s \dot{\mathbf{X}}_N \quad (3.8)$$

Haciendo las sustituciones adecuadas, esta fuerza puede ser calculada únicamente con una sola proyección al espacio normal de la superficie en el punto de contacto por:

$$\mathbf{F}_d = -k_s \mathbf{X}_N - b_s \dot{\mathbf{X}}_N = -\left[\lambda_N \lambda_N^T\right] (k_s \mathbf{X} + b_s \dot{\mathbf{X}}) \quad (3.9)$$

Los coeficientes de la superficie deben ser calculados en función del material de contacto. El coeficiente de rigidez debe ser equivalente al coeficiente de deformación elástica del material en cuestión $k_s = k_e$. El coeficiente de disipación viscosa es una aproximación lineal de la disipación energética durante el choque de la partícula. Así un coeficiente $b_s \geq 2\sqrt{k_s m_p}$, donde m_p representa la masa de la partícula, equivalente a un material “absorbente”. Esto quiere decir que la velocidad de la partícula durante el choque, normal a la superficie, será completamente absorbida por el material, dando como resultado que la partícula quede “pegada” a la superficie de contacto. Por el contrario, coeficientes $b_s < 2\sqrt{k_s m_p}$, representan materiales no absorbentes, donde las partículas serán rebotadas después del choque [12].

Esta noción puede ser verificada bajo el siguiente razonamiento. Supongamos que sólo hay una partícula y que la ecuación de ésta está definida por la segunda ley de Newton:

$$\frac{d}{dt}(m_p \dot{\mathbf{X}}) = \sum \mathbf{F}_{ext} \quad (3.10)$$

donde \mathbf{F}_{ext} representa la suma de todas las fuerzas exógenas a la partícula que modifican su comportamiento. Para el caso de la partícula durante el choque éstas están dadas por la suma $\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_f$. Sin embargo, se sabe que las fuerzas de deformación y de fricción son perpendiculares. Si la masa de la partícula m_p es constante, la variación de la cantidad de movimiento de la partícula ($m_p \dot{\mathbf{X}}$) queda como:

$$m_p \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_f \quad (3.11)$$

Separando la componente normal a la superficie de contacto por el operador $\left[\lambda_N \lambda_N^T\right]$, la ecuación (3.11) queda como: $\left[\lambda_N \lambda_N^T\right] m_p \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_d$. Donde se asume que el producto $\left[\lambda_N \lambda_N^T\right] \mathbf{F}_f = 0$, ya que la fuerza de fricción es ortogonal a la fuerza de deformación.

Sustituyendo la expresión de la fuerza de deformación (3.8) en la ecuación de movimiento de la partícula (3.11) en la dirección normal de la superficie queda de la siguiente forma:

$$\left[\lambda_N \lambda_N^T\right] m_p \ddot{\mathbf{X}} = -k_s \mathbf{X}_N - b_s \dot{\mathbf{X}}_N \quad (3.12)$$

Reordenando los términos y sustituyendo la aceleración en la dirección normal a la superficie, ésta última queda de la forma lineal de segundo orden:

$$m_p \ddot{\mathbf{X}}_N + b_s \dot{\mathbf{X}}_N + k_s \mathbf{X}_N = 0 \text{ Con contacto} \quad (3.13)$$

$$m_p \ddot{\mathbf{X}} = 0 \text{ Sin contacto} \quad (3.14)$$

La solución de la primera ecuación es exponencialmente estable al origen (deformación nula de la superficie de contacto). Sin embargo, si el contacto se pierde antes que esta ecuación llegue a su estado estacionario, la ecuación de movimiento estará regida por la segunda ecuación. Entonces, el tipo de absorción estará dado por la relación de los coeficientes m_p , b_s y k_s que definen el tipo de solución de la ecuación de segundo orden en respuestas subamortiguada, críticamente amortiguada y sobreamortiguada [35]. Respuestas del tipo amortiguada o sobreamortiguada no permitirán salir a la partícula de la superficie, mientras que la respuesta subamortiguada sí lo hará durante el primer sobretiro de la respuesta. El valor crítico del coeficiente de disipación para el cual la respuesta es críticamente amortiguada puede obtenerse por inspección de la ecuación de segundo orden. Esta es: $b_{s,crit} = 2\sqrt{k_s m_p}$. Para obtener una respuesta subamortiguada es necesario que el coeficiente de disipación sea definido como:

$$b_s \doteq 2\xi\sqrt{k_s m_p} \quad (3.15)$$

donde ξ es la relación de amortiguamiento y su valor debe ser estrictamente menor a 1:

$$\xi < 1 \quad (3.16)$$

Fuerza de fricción tangencial

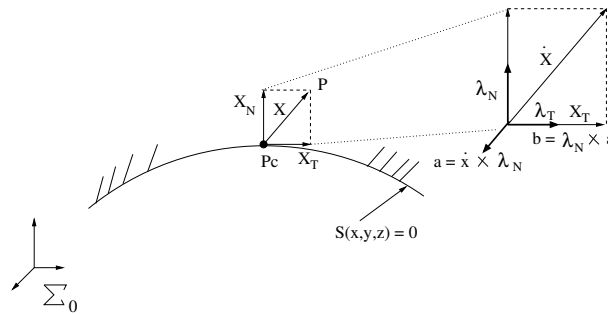


Figura 3.8: Esquema de la fuerza de fricción en la superficie

Para determinar la fuerza de fricción sobre la superficie tangencial de contacto, hay que determinar la dirección en la que ocurre este fenómeno. Así que lo primero es calcular el vector unitario con la dirección de la velocidad tangencial de la partícula, en la superficie de contacto. Para ello definimos dos vectores auxiliares (ver figura 3.8) \mathbf{a} y \mathbf{b} de la siguiente manera. El vector \mathbf{a} debe ser perpendicular al vector normal λ_N y a la componente

tangencial de la velocidad $\dot{\mathbf{X}}_T$. Como es así, también es perpendicular al vector de la velocidad relativa de la partícula $\dot{\mathbf{X}}$, por lo que puede ser calculado como el producto vectorial (producto cruz) de la velocidad relativa de la partícula y el vector normal como: $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{X}} \times \lambda_N$. El segundo vector auxiliar \mathbf{b} se define en la dirección de la velocidad tangencial por el producto cruz entre el vector normal λ_N y el vector auxiliar \mathbf{a} como $\mathbf{b} = \lambda_N \times \mathbf{a}$. Así, este vector tiene magnitud cualquiera, pero la dirección adecuada, en el sentido y dirección de la velocidad tangencial de la partícula sobre la superficie de contacto:

$$\mathbf{b} = \lambda_N \times \left(\dot{\mathbf{X}} \times \lambda_N \right) = -\lambda_N \times \left(\lambda_N \times \dot{\mathbf{X}} \right) \quad (3.17)$$

$$\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{\dot{\mathbf{X}}_T}{\|\dot{\mathbf{X}}_T\|} \quad (3.18)$$

Entonces, el vector unitario en la dirección tangencial puede definirse como:

$$\lambda_T \doteq \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \quad (3.19)$$

de donde se deduce que la magnitud de este vector es efectivamente la unidad $\|\lambda_T\| = 1$. Con este vector, se puede calcular la componente tangencial de la velocidad relativa, mediante el mismo razonamiento usado para las componentes normales, reemplazando el vector unitario normal por el vector unitario tangencial:

$$\dot{\mathbf{X}}_T = \lambda_T \lambda_T^T \dot{\mathbf{X}} = \left[\lambda_T \lambda_T^T \right] \dot{\mathbf{X}} \quad (3.20)$$

Entonces, la fuerza de fricción tangencial al contacto de la partícula con la superficie, puede modelarse muy simplemente como la fuerza de Coulomb, en el sentido contrario a la velocidad de contacto, por la ecuación $\mathbf{F}_f = \mu_k \|\mathbf{F}_N\| (-\lambda_T)$. Donde μ_k es el coeficiente de fricción dinámico entre la superficie y la partícula. Por otro lado, \mathbf{F}_N es la fuerza normal con la que la partícula interacciona con la superficie. Esta última no es otra sino la fuerza de deformación de la superficie (ecuación 3.9). Entonces, la fuerza de fricción puede calcularse como:

$$\mathbf{F}_f = -\mu_k \|\mathbf{F}_d\| \frac{\dot{\mathbf{X}}_T}{\|\dot{\mathbf{X}}_T\|} \quad (3.21)$$

Esta relación puede calcularse sin necesidad de evaluar la componente de velocidad tangencial, ya que el vector unitario tangencial puede ser calculado tanto por la componente de la velocidad $\dot{\mathbf{X}}_T$ como por el vector auxiliar \mathbf{b} .

Sin embargo, un resultado interesante es saber que el vector auxiliar \mathbf{b} es, de hecho, la componente tangencial de la velocidad relativa de la partícula:

$$\mathbf{b} = \dot{\mathbf{X}}_T \quad (3.22)$$

Demostración de $\mathbf{b} = \dot{\mathbf{X}}_T$

La prueba de la igualdad (3.22) se deduce del siguiente razonamiento: reescribiendo el producto cruz de dos vectores cualquiera ($\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$), como la multiplicación de una matriz, hecha con los componentes de uno de los dos vectores, por el segundo vector como: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a} \times] \mathbf{b}$. El operador matricial $[\mathbf{a} \times]$, hecho con los componentes del vector \mathbf{a} , queda definido a partir del resultado descriptivo del producto cruz como:

$$[\mathbf{a} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{a}_z & \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z & 0 & -\mathbf{a}_x \\ -\mathbf{a}_y & \mathbf{a}_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Este operador, tiene entre otras, las siguientes propiedades:

1. $[\mathbf{a} \times] = -[\mathbf{a} \times]^T$ Es una matriz antisimétrica (singular).
2. $[\mathbf{a} \times]^T [\mathbf{a} \times] = [\mathbf{a} \times] [\mathbf{a} \times]^T = -[\mathbf{a} \times]^2$ Este producto es una matriz simétrica.
3. $[\mathbf{a} \mathbf{a}^T] - [\mathbf{a} \times]^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{I}$ Los espacios definidos por los operadores $[\mathbf{a} \mathbf{a}^T]$ y $[\mathbf{a} \times]^2$ son ortogonales entre sí.
4. $[\mathbf{a} \times]^4 = -\|\mathbf{a}\|^2 [\mathbf{a} \times]^2$ La proyección del espacio $[\mathbf{a} \times]^2$ sobre sí mismo es proporcional al negativo de la magnitud de \mathbf{a} .

Entonces, el vector auxiliar \mathbf{b} cuya dirección es la misma que la componente tangencial de la velocidad relativa de la partícula puede escribirse como:

$$\mathbf{b} = -\lambda_N \times \left(\lambda_N \times \dot{\mathbf{X}} \right) = -[\lambda_N \times] [\lambda_N \times] \dot{\mathbf{X}} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{b} = -[\lambda_N \times]^2 \dot{\mathbf{X}} \quad (3.25)$$

donde el cuadrado de la matriz del producto cruz del vector normal es:

$$[\lambda_N \times]^2 = \begin{bmatrix} -\left(\lambda_{yN}^2 + \lambda_{zN}^2 \right) & \lambda_{xN} \lambda_{yN} & \lambda_{xN} \lambda_{zN} \\ \lambda_{xN} \lambda_{yN} & -\left(\lambda_{xN}^2 + \lambda_{zN}^2 \right) & \lambda_{yN} \lambda_{zN} \\ \lambda_{xN} \lambda_{zN} & \lambda_{yN} \lambda_{zN} & -\left(\lambda_{xN}^2 + \lambda_{yN}^2 \right) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

De la definición del vector unitario tangencial y de la última forma de escribir el vector auxiliar \mathbf{b} , el vector tangencial puede ser calculado a partir de la siguiente relación:

$$\lambda_T = \frac{-[\lambda_N \times]^2 \dot{\mathbf{X}}}{\|[\lambda_N \times]^2 \dot{\mathbf{X}}\|} \quad (3.27)$$

Por otro lado, el componente tangencial del vector de velocidad se puede calcular como (siguiendo el mismo razonamiento que para la componente normal):

$$\dot{\mathbf{X}}_T = \lambda_T \lambda_T^T \dot{\mathbf{X}} = [\lambda_T \lambda_T^T] \dot{\mathbf{X}} \quad (3.28)$$

Entonces, el operador $[\lambda_T \lambda_T^T]$ puede reescribirse como se muestra a continuación:

$$[\lambda_T \lambda_T^T] = \frac{[\lambda_N \times]^2 \dot{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{X}}^T [\lambda_N \times]^2}{\|[\lambda_N \times]^2 \dot{\mathbf{X}}\|^2} = \frac{[\lambda_N \times]^2 \dot{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{X}}^T [\lambda_N \times]^2}{\dot{\mathbf{X}}^T [\lambda_N \times]^2 \dot{\mathbf{X}}} \quad (3.29)$$

donde se han usado algunas propiedades (2 y 4), del operador $[a \times]$, descritas anteriormente.

Usando esta igualdad y el hecho que el producto $\dot{\mathbf{X}}^T [\lambda_N \times]^2 \dot{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}$ es un escalar, la componente tangencial de la velocidad relativa puede finalmente reescribirse simplemente como:

$$\dot{\mathbf{X}}_T = [\lambda_T \lambda_T^T] \dot{\mathbf{X}} = -[\lambda_N \times]^2 \dot{\mathbf{X}} \quad (3.30)$$

Este resultado concuerda con la propiedad 3, la cual dice que los espacios definidos por los vectores λ_T y λ_N son ortogonales. De hecho, se puede ocupar esta propiedad para reducir el número de operaciones si ya se conoce el operador $[\lambda_N \lambda_N^T]$, para calcular el operador ortogonal $[\lambda_N \times]^2$ como:

$$-[\lambda_N \times]^2 = [\mathbf{I} - \lambda_N \lambda_N^T] \quad (3.31)$$

Comparando la ecuación (3.30) y la definición del vector auxiliar \mathbf{b} (ecuaciones 3.17 y 3.25), es evidente que estos vectores son el mismo.

$$\dot{\mathbf{X}}_T = \mathbf{b} \quad (3.32)$$

3.2.2. Detección de colisiones

Una vez que se plantearon las fuerzas involucradas en la fuerza de colisión de la ecuación de movimiento de la partícula (3.1), lo que falta es detectar cuándo la partícula del fluido colisiona contra la superficie de frontera u obstáculos, así como también la forma de implementarlo dentro de los algoritmos descritos en el capítulo anterior. Las superficies que se consideran como superficies de frontera son: líneas rectas (para el caso bidimensional) y un cilindro (para el caso tridimensional). Por otra parte, en la simulación tridimensional del fluido, se agregarán dos obstáculos por separado en el espacio de trabajo de éste. Dichos obstáculos serán formados utilizando mallas de simplejos (que pueden modelarse como mallas de triángulos), para uno y mallas de triángulos para otro.

Colisiones contra superficies de frontera

Para el espacio bidimensional, se trabajan las superficies de frontera representadas por medio de dos líneas rectas, paralelas una de otra, simulando la vista de un tubo o cilindro de lado lateral en dos dimensiones, tal como se muestra en la figura 3.9.

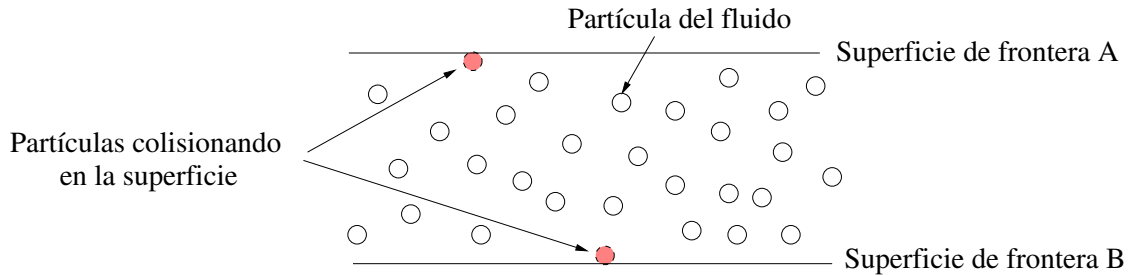


Figura 3.9: Superficies de frontera para el caso bidimensional

Como se puede observar en la figura 3.9, la forma de detectar la colisión de una partícula es sencilla, ya que dicha detección se basa en preguntar si la posición de la partícula es superior a la posición de la recta (A) o si es inferior a la posición de la recta (B). En cualquiera de los dos casos que cumpla la condición, entonces existe una colisión entre la partícula y la frontera. Por último, el gradiente normalizado de la superficie para (A) es igual a $(0, 1)$ y para (B) es $(0, -1)$. Estos valores se obtuvieron al derivar la ecuación de la recta cuando el valor de la abscisa es constante, $y - cte = 0$ para el caso (A) y $y + cte = 0$ para el caso (B).

Para el caso de la superficie de frontera en el espacio tridimensional, se propone un cilindro (véase la sección “Descripción” del primer capítulo), el cual está compuesto de una base y una altura H_c . La base está formada por una circunferencia de radio R . Ésta se aprovecha para hacer la detección de colisiones a lo largo de la superficie del cilindro.

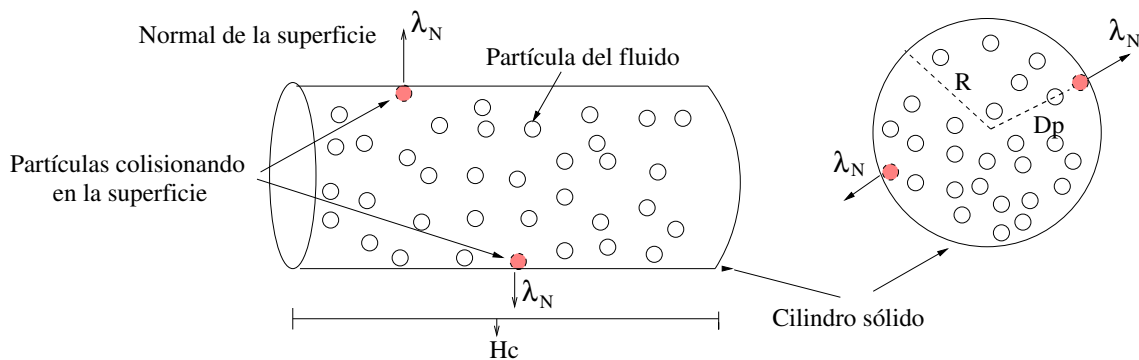


Figura 3.10: Superficies de frontera para el caso tridimensional

La forma de saber si existe una colisión en el cilindro es usando la distancia que hay entre la partícula y el centro del cilindro. Si la distancia D_p es mayor o igual al radio de la circunferencia de la base, por lo tanto, existe una colisión en éste como se muestra en la figura 3.10. Para obtener la normal de la superficie del cilindro, se realiza lo siguiente:

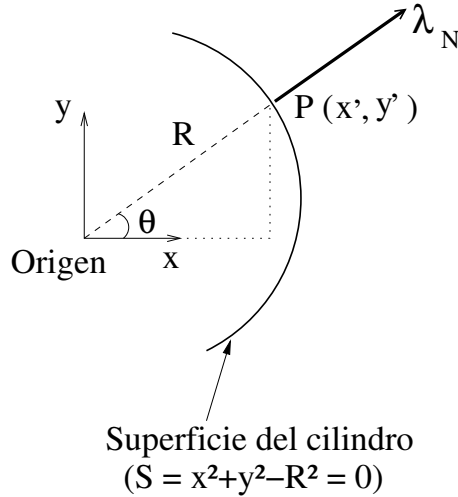


Figura 3.11: Normal de la superficie del cilindro

De acuerdo a la figura 3.11, se sabe que las coordenadas paramétricas de un cilindro están dadas por:

$$x = R \cdot \cos \theta \quad (3.33)$$

$$y = R \cdot \text{sen } \theta \quad (3.34)$$

$$z = z \quad (3.35)$$

para $z \in [0, H_c]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$

Por lo tanto, la normal de la superficie del cilindro esta dada por:

$$\lambda_N = (\cos \theta, \text{sen } \theta, 0)^T \quad (3.36)$$

donde $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$.

Pero como se sabe, el valor del radio R de la circunferencia y la posición del punto sobre ésta, se pueden calcular directamente el $\cos \theta$ y el $\text{sen } \theta$, sin necesidad de calcular θ .

$$\lambda_N = \begin{pmatrix} \frac{x}{R} \\ \frac{y}{R} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Colisiones contra obstáculos

Lo anterior fue enfocado a las superficies de frontera, pero como se había comentado, en la simulación tridimensional del fluido, se pretende introducir obstáculos dentro del espacio de trabajo de éste (véase la sección “Descripción” del primer capítulo). Entonces, el primer obstáculo a tratar será una esfera sólida. La forma de construir dicha esfera es utilizando una malla de triángulos. Como ésta se considera sólida, la malla de triángulos no tendrá el sistema masa-resorte. Para detectar si existen colisiones en ella se compara el radio de la esfera R_e respecto a la distancia que hay entre la partícula y el centro de ésta D_p . Si esta distancia es igual o menor al radio, entonces existe una colisión. Esto se puede realizar sin complicaciones, situando a la esfera en el centro del área de trabajo del fluido, como se muestra en la figura 3.12.

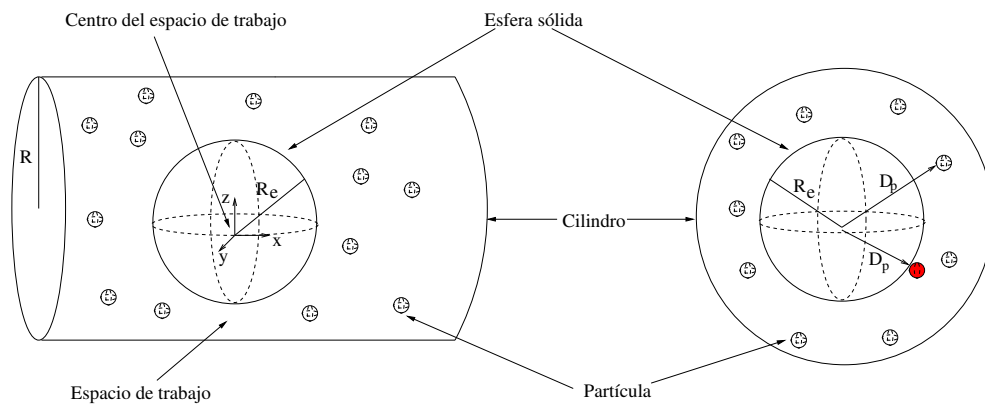


Figura 3.12: Obstáculo en el área de trabajo del fluido

Por otro lado, para obtener el vector normal de la superficie, se parte de la siguiente figura.

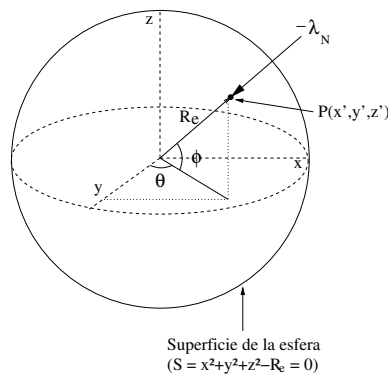


Figura 3.13: Vector normal de la superficie de la esfera

Se sabe que las coordenadas paramétricas de la esfera son:

$$x = R_e \cdot \cos \theta \cos \phi \quad (3.38)$$

$$y = R_e \cdot \sin \theta \cos \phi \quad (3.39)$$

$$z = R_e \cdot \sin \phi \quad (3.40)$$

para $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$

Por lo tanto, la normal de la superficie de la esfera está dada por:

$$\lambda_N = (-\cos \theta \cos \phi, -\sin \theta \cos \phi, -\sin \phi)^T \quad (3.41)$$

donde $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ y $\phi = \tan^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Como se conoce el valor del radio R_e de la esfera y la posición del punto sobre ésta, se pueden calcular directamente la normal de la superficie de la esfera:

$$\lambda_N = - \begin{pmatrix} \frac{x}{R_e} \\ \frac{y}{R_e} \\ \frac{z}{R_e} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Como se observa, la detección de colisiones así como los cálculos para el vector normal de la superficie de la esfera, están enfocados a superficies sólidas, pero ¿qué pasaría si la superficie de la esfera dejara de ser sólida? La esfera, al dejar de ser sólida se iría deformando por medio de las fuerzas que inducen las partículas al colisionar sobre ésta, trayendo como consecuencia que el radio de ésta deje de ser constante. Para poder realizar dicha deformación sobre la esfera se tiene que modelar utilizando las mallas de simplejos [23, 34, 33]. La forma de construir la esfera utilizando estas mallas es por medio de caras, las cuales a su vez están formadas por triángulos (ver figura 3.14). Entonces, se tiene que resolver la manera de trabajar las colisiones en la esfera deformable, así como la deformación de ésta.

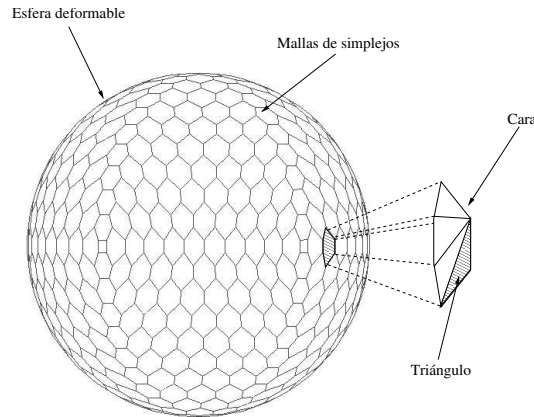


Figura 3.14: Esfera construida mediante mallas de simplejos

Para resolver el problema de las colisiones en la esfera deformable, se propone una detección de colisiones a dos niveles. El primer nivel constará de la creación de una *zona de colisión*, la cual estará formada por medio de una esfera con radio R_z mayor que el radio de la esfera deformable, tal como se muestra en la figura 3.15. Cada partícula que entre a esta zona, formará parte de una lista de partículas candidatas a colisionar en la esfera deformable, independientemente de si éstas chocan o no.

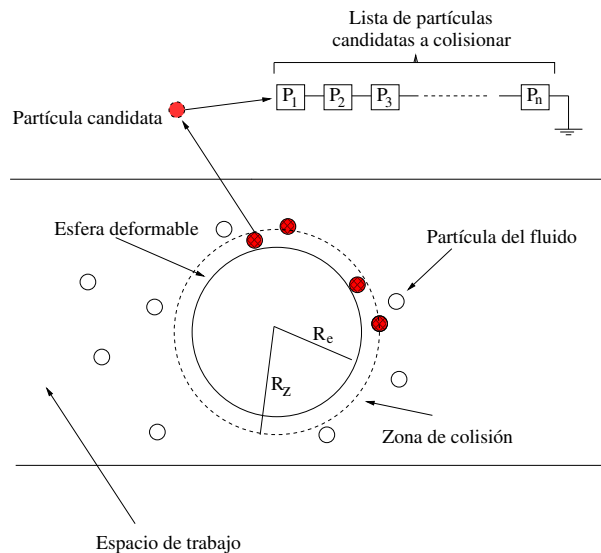


Figura 3.15: Primer nivel de detección de colisiones en la esfera deformable

Como se había comentado anteriormente, la esfera deformable contiene triángulos en cada cara que forma a dicha esfera. Por lo tanto, el segundo nivel de detección de colisiones, consta en comprobar si existen choques de alguna de las partículas candidatas en los triángulos de cada cara (ver figura 3.16). Para esto, se utilizará un detector de

colisiones llamado *SOLID* [7], el cual entrega como resultado el triángulo que pertenece a la i -ésima cara de la esfera donde hubo una colisión.

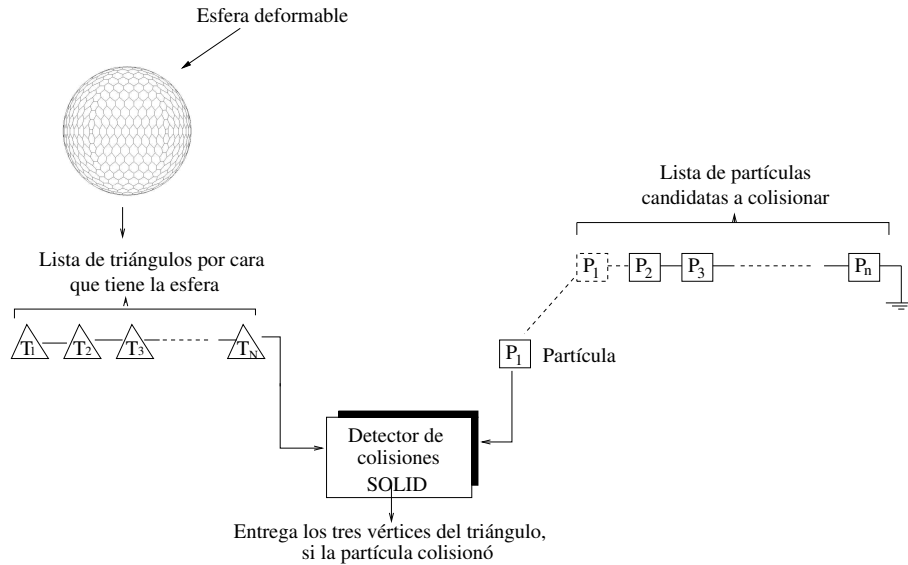


Figura 3.16: Segundo nivel de detección de colisiones en la esfera deformable

Un punto débil de este procedimiento es la comprobación de cada partícula candidata contra los n triángulos que forman cada una de las caras de la esfera deformable, ya que esta comprobación realiza una búsqueda exhaustiva en todos los triángulos para cada partícula.

Por otro lado, el cálculo del vector normal del triángulo de la i -ésima cara de la esfera, se obtiene a partir de la figura 3.17.

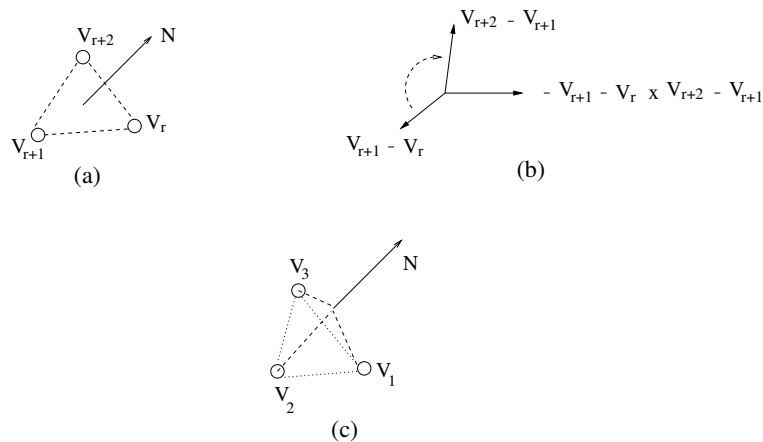


Figura 3.17: Cálculo del vector normal del triángulo

El triángulo se define como un plano, el cual consta de tres vértices vecinos (figura 3.17a). Entonces, para obtener el vector normal se necesitan definir dos vectores a partir de un vértice de referencia v_r (figura 3.17b), es decir, $v_{r+1} - v_r$ y $v_{r+2} - v_{r+1}$. Por lo tanto, al calcular el negativo del producto cruz normalizado de estos vectores se obtiene el vector normal (figura 3.17c). Su dirección de este vector depende del sentido en que se recorran los vértices del triángulo [23].

Una vez detectado el triángulo de la cara en donde existe una colisión, la partícula le transmite su fuerza a dicho triángulo, dando como resultado la deformación de la esfera. La figura 3.18a, muestra la deformación de la esfera, la cual se realiza con base en la fuerza de deformación calculada por la partícula utilizando la ecuación (3.9). A su vez, la dirección de la fuerza de deformación que se aplica al triángulo de la cara es opuesta a la dirección de la normal de la superficie de éste.

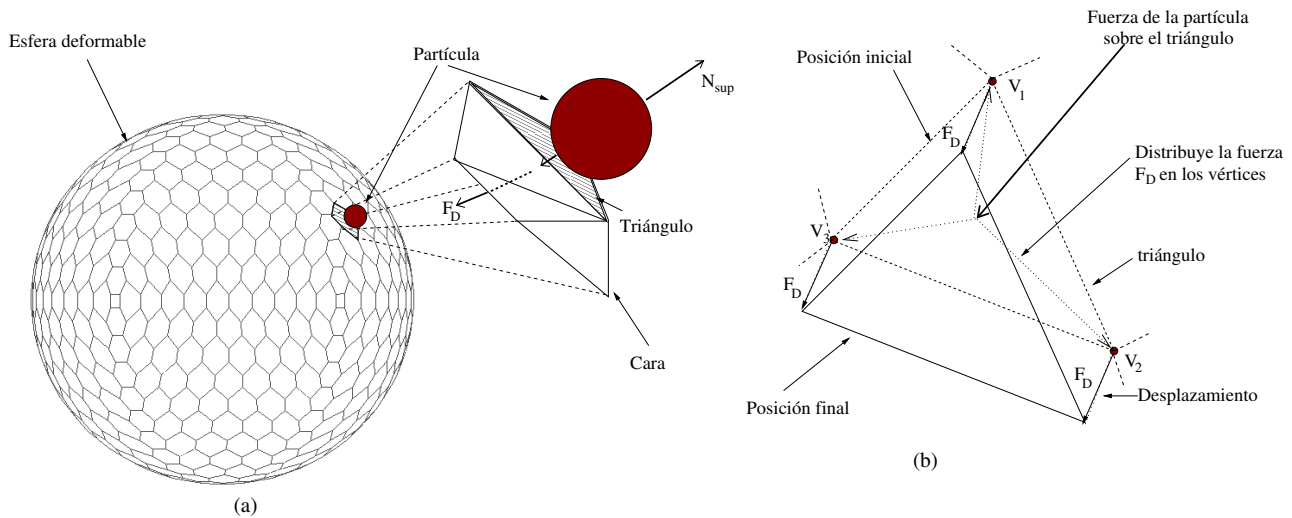


Figura 3.18: Deformación del triángulo debido a una colisión

Como se observa en la figura 3.18b, la fuerza se aplica en los tres vértices del triángulo, haciendo que éste se desplace de su posición inicial, afectando de manera directa a los triángulos adyacentes a éste. Al momento en que la partícula deja de colisionar sobre el triángulo, la fuerza de deformación deja de existir, haciendo que éste vuelva a su posición inicial. Como el fluido consta de muchas partículas, es necesario sumar las fuerzas que existen en el momento en que colisionan varias partículas en un solo triángulo.

3.2.3. Integración de las superficies de frontera en los algoritmos del fluido

Por último, para agregar las superficies de frontera así como los obstáculos en los algoritmos que describen la simulación del fluido (ver algoritmos 1, 2, 3 y 4 de la sección “Implementación del HSP” del segundo capítulo), se realizan cambios al algoritmo principal (algoritmo 4), ya que en los demás, las superficies no tienen que actualizar ningún atributo. Por lo tanto, el algoritmo 4, utilizando superficies de frontera, queda de la siguiente manera:

Algoritmo 7 Algoritmo principal para el método HSP

```

1:  $t_0 \leftarrow$  tiempo inicial del sistema
2:  $\Delta_t \leftarrow$  incremento de tiempo en cada ciclo
3:  $T \leftarrow$  tiempo final del sistema
4:  $\mathbf{F}_c \leftarrow 0$  fuerza de colisión inicial
5:  $L_{pc}$  Lista de partículas candidatas a colisionar
6: while  $t_0 \leq T$  do
7:   Calcula aceleración y continuidad de cada partícula utilizando las ecuaciones 3.1 y 2.13 respectivamente
8:   Actualiza posición, velocidad y densidad de las partículas utilizando el algoritmo 2

9:   Calcula presión de cada partícula mediante el algoritmo 3
10:  if Distancia de la partícula  $>$  Radio de la zona de colisión then
11:    Colocar partícula en lista de candidatas  $L_{pc} \leftarrow P_i$ 
12:  end if
13:  if Existe colisión entre la partícula  $P_i$  y la superficie then
14:    Calcula la fuerza de fricción  $\mathbf{F}_f$  de acuerdo a la ecuación 3.21
15:    Calcula la fuerza de deformación  $\mathbf{F}_d$  de acuerdo a la ecuación 3.9
16:    Calcula la fuerza de colisión  $\mathbf{F}_c = -\mathbf{F}_d + \mathbf{F}_r$ 
17:  else
18:     $\mathbf{F}_c = 0$ 
19:  end if
20:  if  $\mathbf{F}_d > 0$  then
21:    Aplicar fuerza de deformación  $F_d$  al modelo deformable
22:  end if
23:   $t_0 + = \Delta_t$ 
24: end while

```

3.3. Conclusiones

Como se ha mostrado a lo largo de este capítulo, existen dos formas diferentes de construir el área de trabajo del fluido, las cuales son: partículas de frontera o superficies de frontera. La diferencia entre las partículas de frontera y las partículas del fluido radica en los atributos que maneja cada una de ellas. Siendo las partículas de frontera las que cuentan con menos características que las partículas del fluido. La ventaja de utilizar las partículas de frontera es su rápida y fácil implementación dentro de los algoritmos que simulan a un fluidos. Por otra parte, las superficies de frontera se construyen mediante figuras geométricas, ya sea de forma bidimensional o tridimensional. La ventaja de manejar las superficies de frontera es que no incrementa el número total de partículas dentro el fluido, ya que se utilizan modelos matemáticos que describen la superficies de las figuras geométricas.

Al momento de trabajar con las superficies de frontera, se tiene que tomar en cuenta dos aspectos importantes, los cuales son: el manejo de la fuerzas externas que se le inyectan a las partículas del fluido cuando chocan contra éstas y la detección de colisiones entre la partícula del fluido y la superficie de frontera. Las fuerzas externas que están involucradas dentro de las superficies de frontera son: la fuerza de deformación normal, la cual impide que la partícula penetre la superficie de frontera, y la fuerza de fricción tangencial, que tiene como propósito disminuir la velocidad de la partícula en el momento en que hace contacto con la superficie de frontera.

La tarea de detectar una colisión entre la superficie de frontera y una o varias partículas del fluido, depende del tipo de superficie que se esté trabajando. En este capítulo se abordaron dos tipos de superficies: las sólidas y las deformables. Para el tratamiento de la detección de colisiones en las superficies sólidas no existió mayor dificultad, ya que se realizó tomando en cuenta la posición de las figuras geométricas u objetos así como sus características de cada uno de ellos. Por el contrario, para las superficies deformables se tuvo que dar un tratamiento más fino para poder detectar las colisiones, ya que la posición y las características cambian con respecto a los choques de las partículas contra la superficie deformable.

Una vez detectado las colisiones en una superficies deformable, lo siguiente es aplicar una fuerza tal que, ésta deforme a la superficie. Dicha fuerza tiene una magnitud igual pero en sentido contrario a la fuerza externa calculada para la partícula. Esta fuerza que se aplica tanto a la partícula del fluido como a la superficie, hace referencia a la tercera ley de Newton.

Capítulo 4

Resultados

Hasta el momento se tienen descritas las herramientas necesarias (el método HSP, algoritmos y condiciones de frontera), para la implementación de la simulación de un fluido incompresible, ya sea para trabajar solo o con obstáculos. Además, se cuenta también con el modelo deformable (esfera). Por lo tanto, se procede a realizar los objetivos de este trabajo de tesis. Dicho trabajo se fue desarrollando por partes, esto quiere decir, primero se implementó el fluido, posteriormente se colocó a dicho fluido dentro de un tubo (espacio de trabajo) y por último se integraron dentro del tubo dos obstáculos diferentes: uno sólido y otro deformable.

Cabe aclarar que los resultados que se presentan en este capítulo, son simulaciones que no utilizan datos físicos reales mas que el valor de la densidad de referencia del fluido ρ_0 (descrita en la sección “Fluidos incompresibles utilizando el HSP” del segundo capítulo), a la cual se le asigno el valor de la densidad del agua (1000 kg/m^3). Por ende, los resultados de las simulaciones tanto del fluido como la interacción entre éste y los objetos, están basados en hipótesis del comportamiento real del fluido. Es decir, para definir si los resultados que entregan las simulaciones son correctos, se utiliza un razonamiento cualitativo de los resultados que se esperan obtener al final de la simulación, si estos resultados son los esperados, entonces se dice que la simulación es cualitativamente correcta.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en cada parte del desarrollo del trabajo de tesis.

4.1. Rompimiento de una presa

Primero se realizó la implementación de un fluido incompresible. Para verificar si la implementación fue correcta así como los resultados entregados por los algoritmos, se efectuó una simulación de prueba llamada *rompimiento de una presa* [6]. Esta simulación de prueba tiene una configuración como se muestra en la figura siguiente:

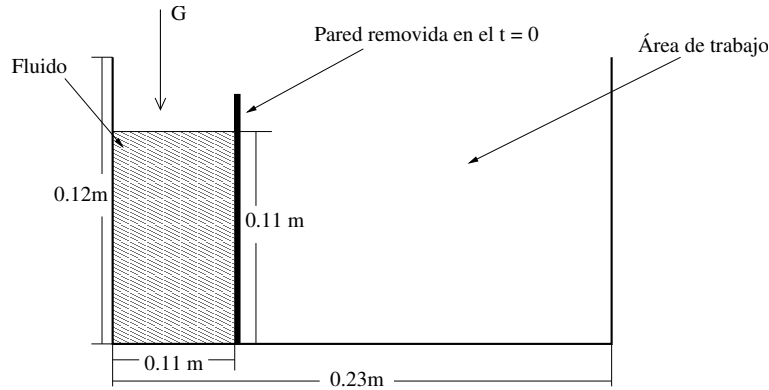
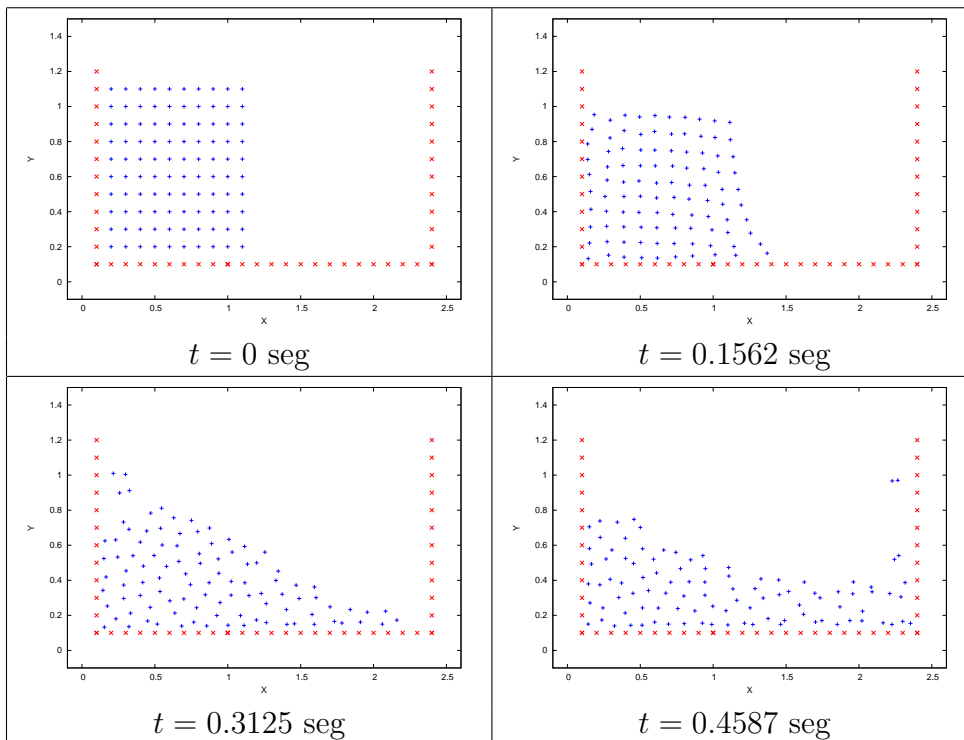
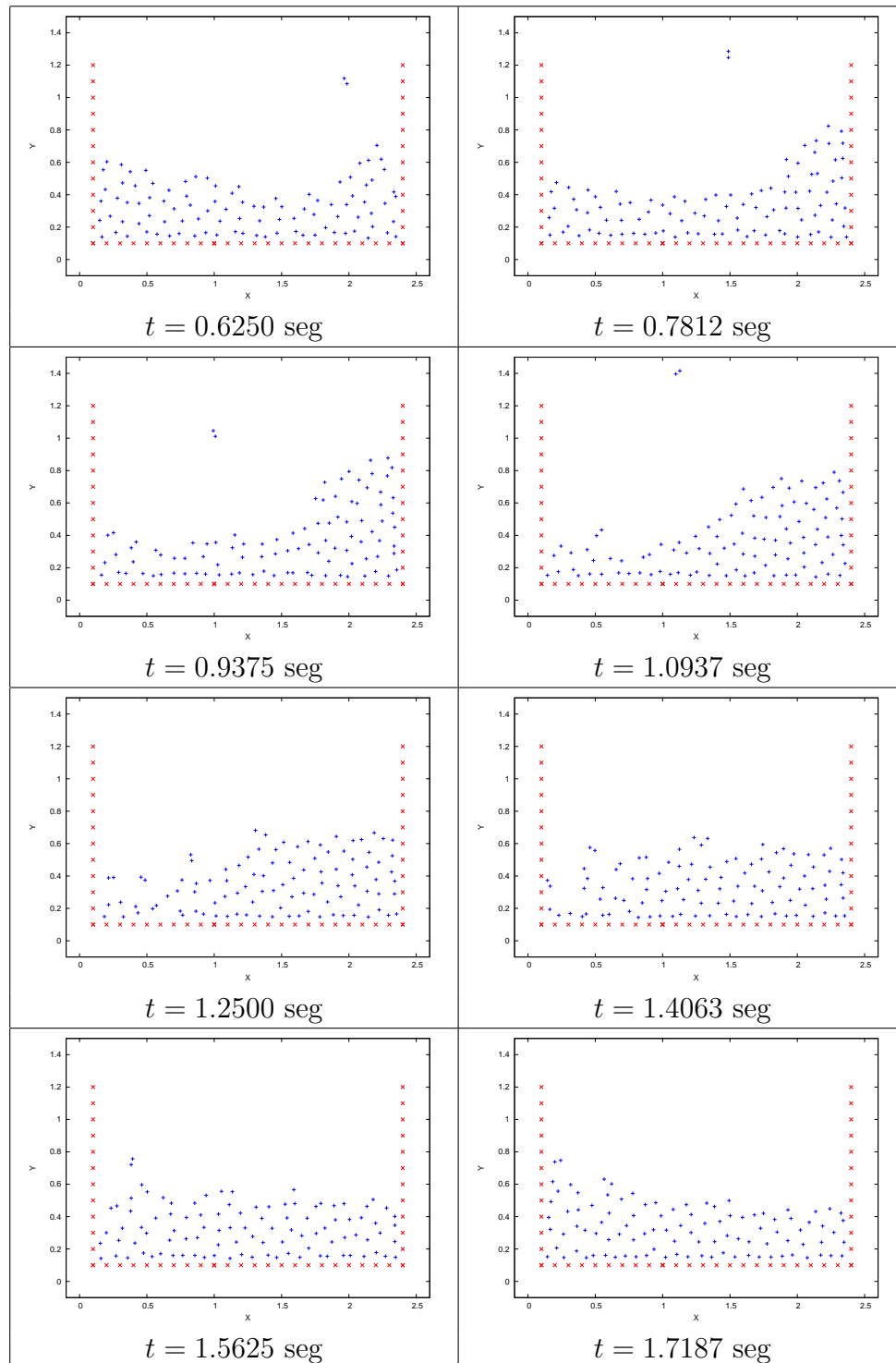


Figura 4.1: Prueba de rompimiento de una presa en el tiempo $t = 0$

Como se observa en la figura 4.1, el fluido es colocado dentro de un espacio limitado, de 0.11 metros por lado, pero el espacio en donde se llevará a cabo esta simulación será de 0.12 metros de alto por 0.23 metros de largo. Para delimitar el área de trabajo del fluido se utilizaron las partículas de frontera. Esto es debido a que la simulación de prueba que presenta Monaghan [24], utiliza dichas partículas. La fuerza externa que se aplica al fluido, es la fuerza de gravedad G (9.8 m/s^2). Al momento de iniciar la simulación, la pared se remueve haciendo que el fluido caiga libremente, simulando una presa rota. Los resultados obtenidos de esta simulación usando los algoritmos implementados (algoritmos 3, 4, 5 y 6), son los siguientes:



Tabla 4.1: Simulación del rompimiento de una presa, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg

Como se puede observar en la tabla 4.1, los resultados obtenidos son los esperados y la simulación es similar a la propuesta por Monaghan [24]. Por lo tanto, se concluye que la implementación de los algoritmos para simular al fluido con partículas de frontera son correctos.

4.2. Colocación del fluido en un tubo

Una vez que se tiene la simulación correcta del fluido incompresible (trabajado con partículas de frontera), lo siguiente es cambiar el espacio de trabajo y la configuración inicial del fluido. El nuevo espacio de trabajo será un tubo (cilindro) infinito, en el cual contendrá un fluido que estará fluyendo constantemente dentro de éste. La forma de simular el tubo infinito es utilizando las *fronteras periódicas* en la entrada y la salida de éste. Estas fronteras se aplican dentro del algoritmo 6 (descrito en el capítulo tres), inyectando las partículas salientes del volumen de control, por el lado contrario al que salen. Otra forma de ver dicho espacio de trabajo, es por medio de un toroide, el cual se llena con un fluido incompresible y se toma una pequeña sección de éste, como se muestra en la siguiente figura:

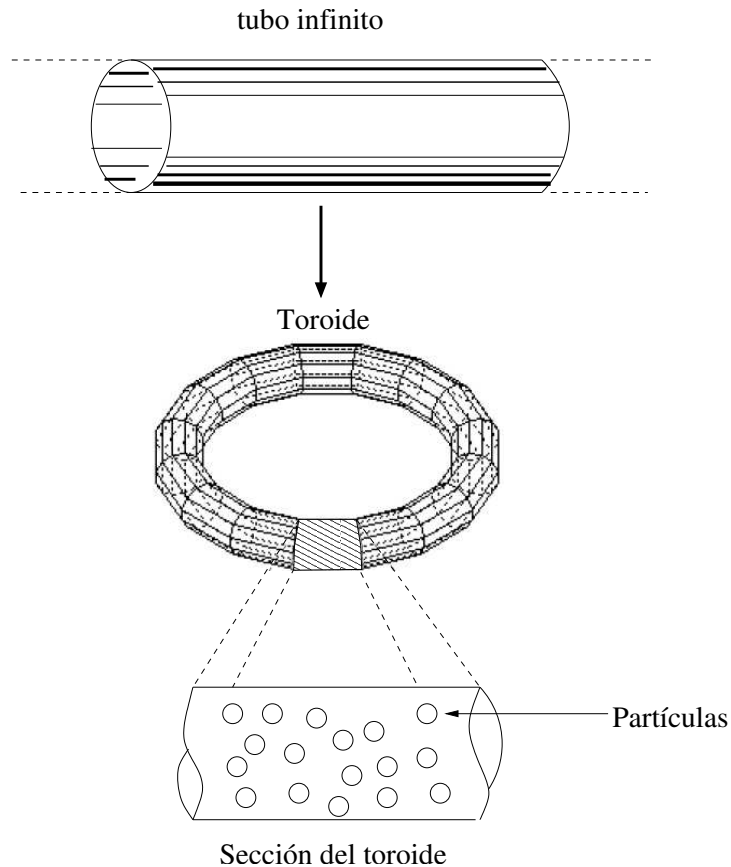
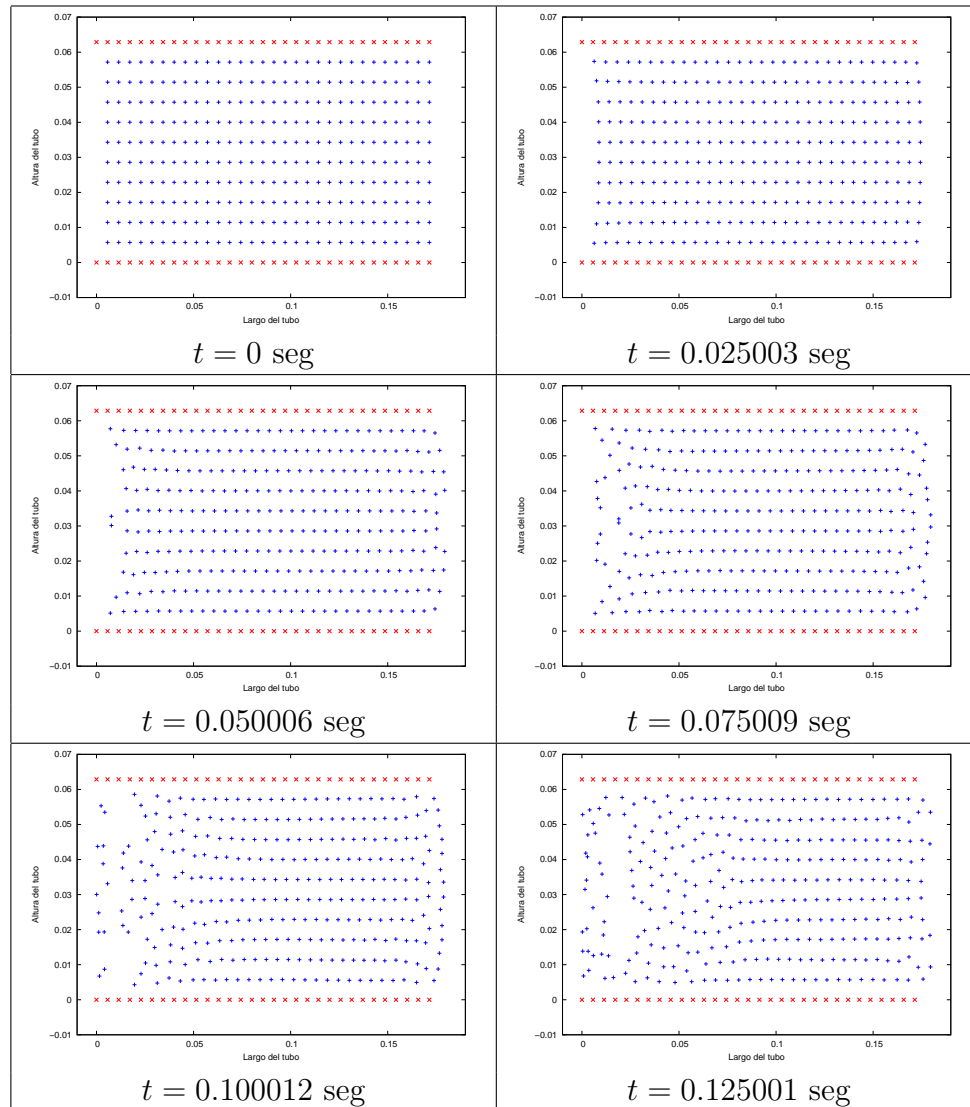


Figura 4.2: Nuevo espacio de trabajo del fluido

La implementación del nuevo espacio de trabajo se realizó utilizando tanto partículas de frontera como superficies de frontera de forma independiente. Es decir, primero se utilizaron las partículas de frontera para representar dicho espacio y, posteriormente, las superficies de frontera. En el caso de las partículas de frontera, se emplearon los mismos algoritmos que se utilizaron en la simulación del rompimiento de una presa. Luego, se realizó una simulación del fluido dentro de su nueva área de trabajo. Los resultados que se obtuvieron son los siguientes:



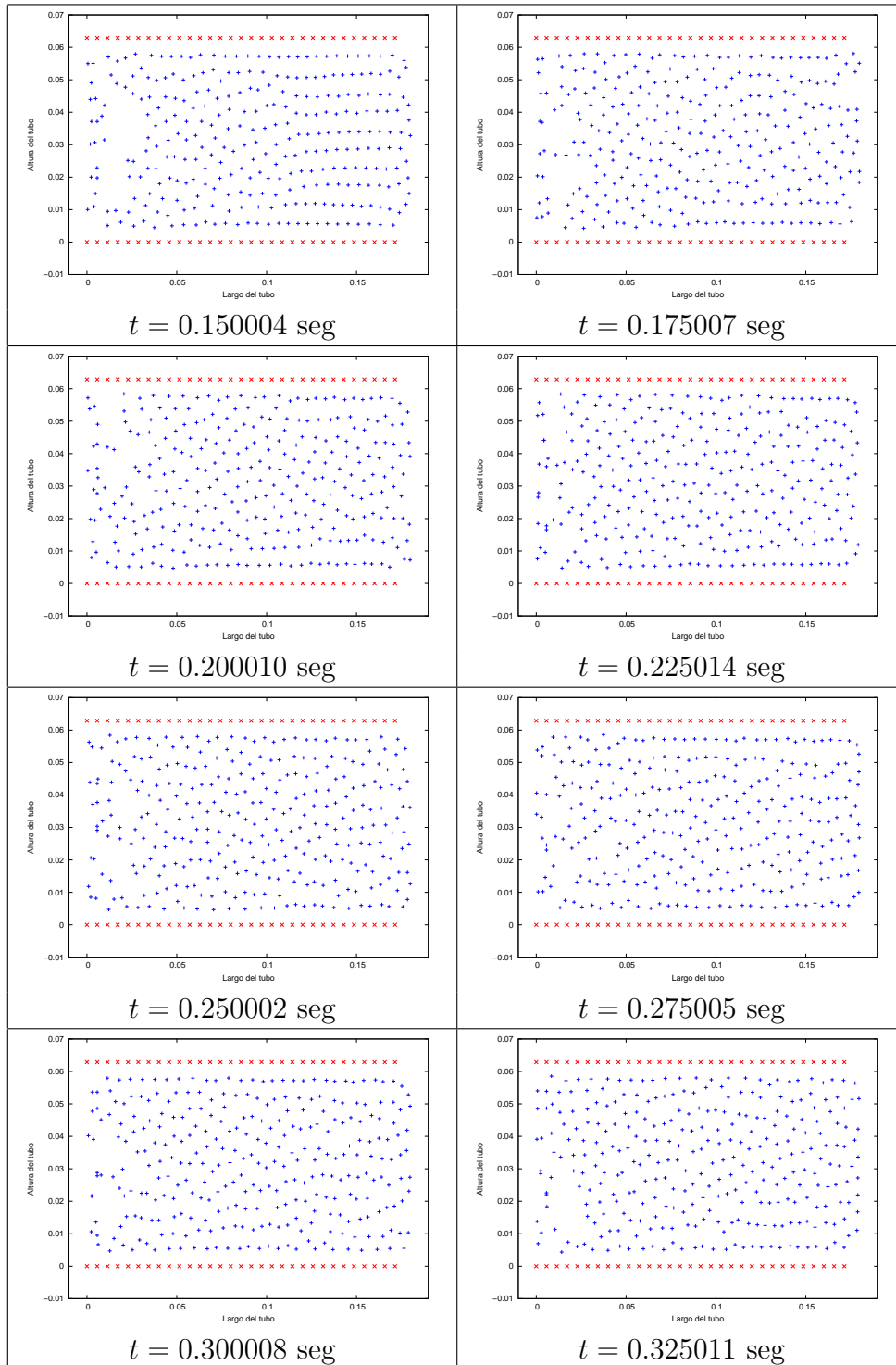
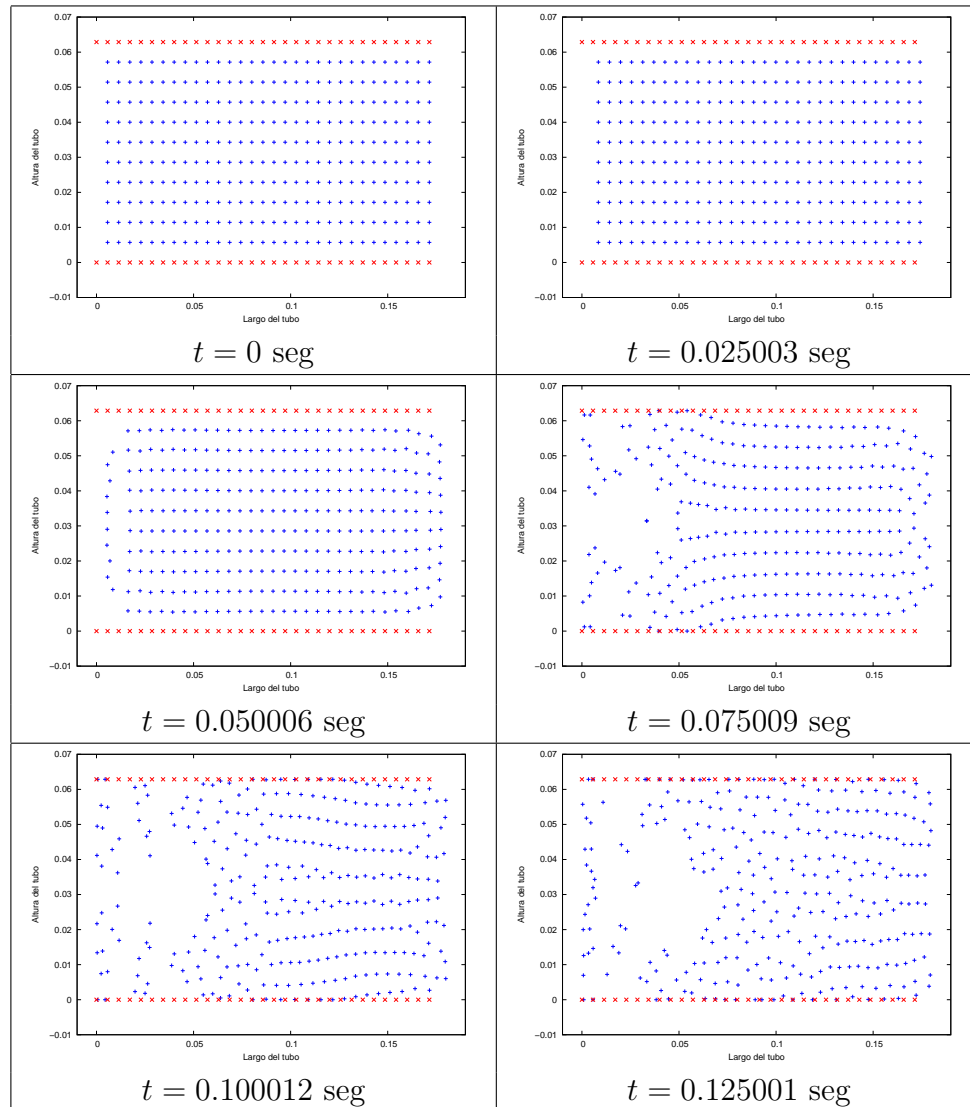


Tabla 4.2: Simulación del fluido dentro de un tubo utilizando partículas de frontera, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg

Lo siguiente es reemplazar a las partículas de frontera por las superficies de frontera y efectuar las mismas simulaciones que se realizaron para el caso de las partículas de frontera. Para el caso de las superficies de frontera, se utilizaron los algoritmos 1, 2, 3 del segundo capítulo y el algoritmo 7 del tercer capítulo. Al introducir el fluido en el área de trabajo formado por superficies de frontera se obtuvieron los siguientes resultados:



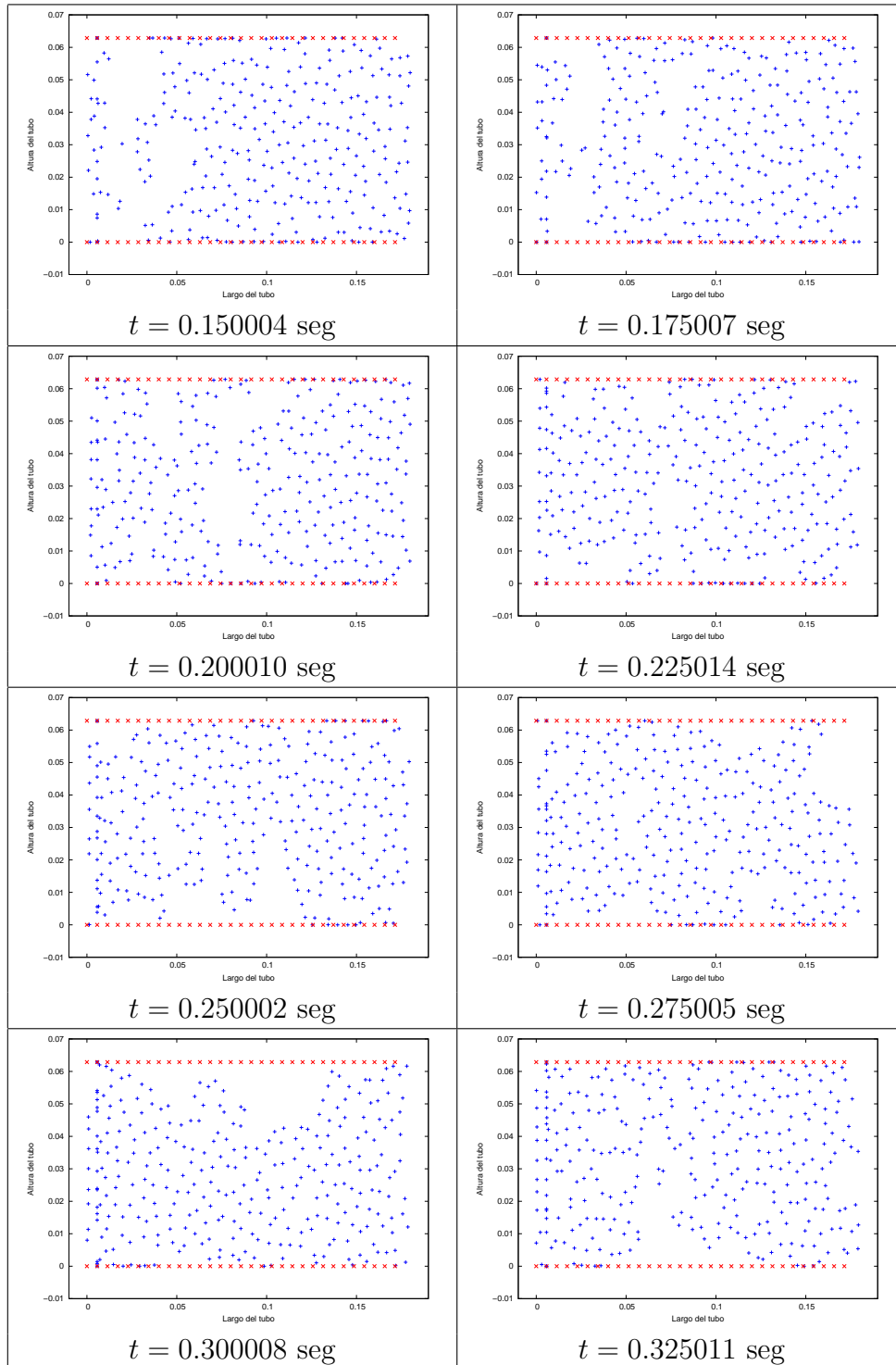


Tabla 4.3: Simulación del fluido dentro de un tubo utilizando superficies de frontera, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg

Como se puede observar en las simulaciones del fluido dentro del tubo utilizando partículas o superficies de frontera, se realizan en un espacio bidimensional. Esto es debido a efectos de simplicidad y fácil análisis de los resultados obtenidos.

4.2.1. Medición de la velocidad y la presión dentro del tubo

Para verificar que los resultados de las simulaciones que se muestran en las tablas 4.2 y 4.4 eran los correctos, se realizaron dos mediciones en cada simulación. La primera medición se efectúa mediante las velocidades promedio de las partículas del fluido en diferentes secciones longitudinales del tubo y la segunda es mediante las presiones promedio de las partículas del fluido en distintas secciones transversales. A continuación se muestra la manera en cómo se encuentra seccionado el tubo, para obtener dichas mediciones:

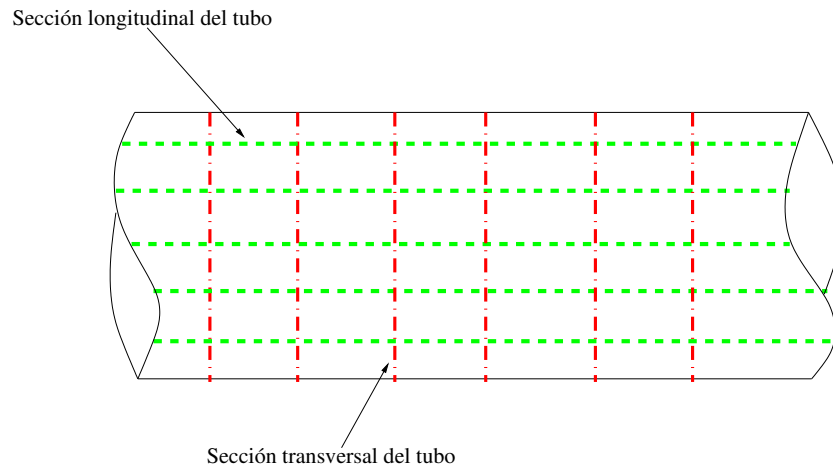


Figura 4.3: Secciones longitudinales y transversales del tubo para medir velocidades y presiones de las partículas

Al medir las velocidades de las partículas en diferentes secciones del tubo, se tiene que observar que dichas velocidades disminuyan conforme se acerquen a las fronteras del tubo, haciendo que las partículas con mayor velocidad sean las del centro de éste. Este efecto pasa en la realidad, ya que en las superficies internas del tubo existen fricciones, las cuales reducen la velocidad de algunas partes del fluido. Por otro lado, el propósito de obtener las presiones promedio de las partículas del fluido, es observar que la presión del fluido vaya disminuyendo a medida que éste salga de tubo.

Al realizar la simulación del fluido utilizando partículas de frontera y obtener las velocidades promedio en las diferentes secciones longitudinales, se procede a graficar las velocidades con respecto a estas secciones, por lo que se obtienen lo siguiente:

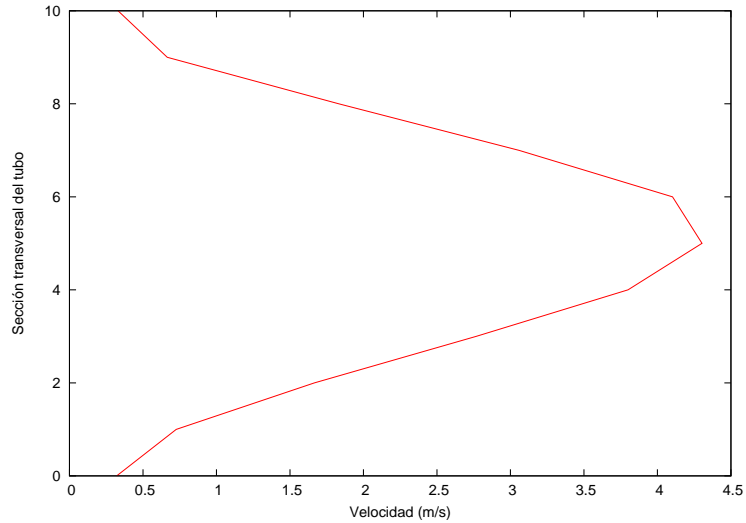


Figura 4.4: Velocidad de la partícula v_s secciones longitudinales del tubo utilizando partículas de frontera

Como se aprecia en la gráfica 4.4, los resultados entregados por la simulación del fluido dentro del tubo, utilizando partículas de frontera son los esperados. Para terminar de comprobar que efectivamente el fluido se comporta de manera correcta dentro del nuevo espacio de trabajo, se efectúa la medición de las presiones promedio de las partículas. Una vez que haya finalizado la simulación del fluido, se realiza la gráfica de las presiones promedio con respecto a las secciones transversales del tubo. A continuación se presenta dicha gráfica:

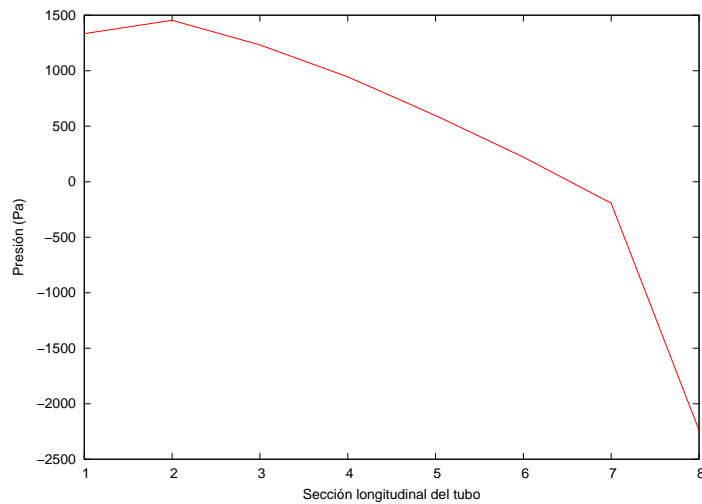


Figura 4.5: Presión del fluido v_s secciones transversales del tubo utilizando partículas de frontera

Analizando las gráficas 4.4 y 4.5, se concluye que los resultados obtenidos en la simulación del fluido dentro de un tubo utilizando partículas de frontera son cualitativamente correctos, de acuerdo a las mediciones esperadas. De igual manera que en el caso de las partículas de frontera, se procede a realizar las gráficas tanto de la velocidad promedio como de la presión promedio de la simulación del fluido dentro del tubo utilizando superficies de frontera, esperando obtener gráficas similares a las gráficas 4.4 y 4.5.

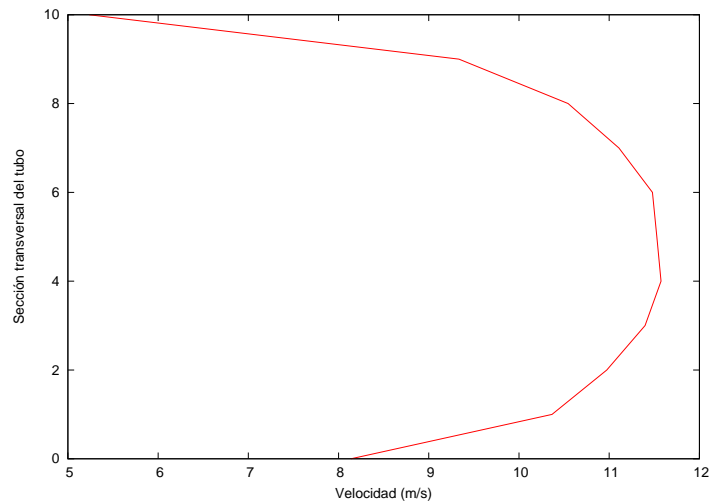


Figura 4.6: Velocidad de la partícula v_s secciones longitudinales del tubo utilizando superficies de frontera

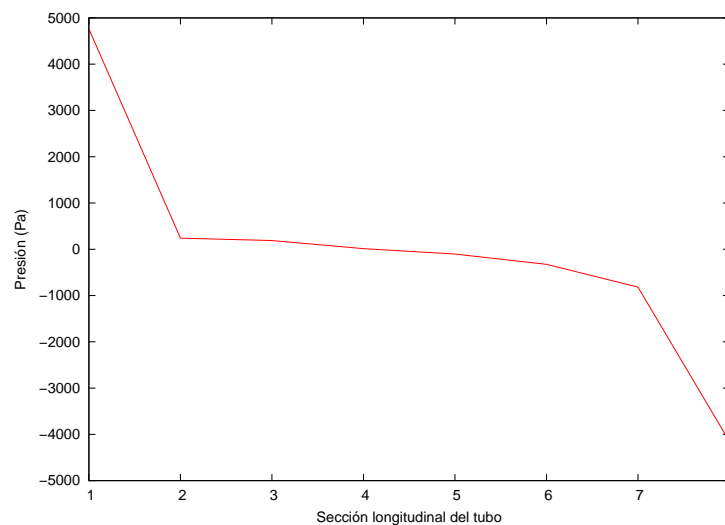


Figura 4.7: Presión del fluido v_s secciones transversales del tubo utilizando superficies de frontera

Como se puede observar, las gráficas 4.6 y 4.7 son cualitativamente similares a las gráficas 4.4 y 4.5. Con base a los resultados correctos que se han obtenido de las simulaciones del fluido utilizando partículas de frontera y la comparación satisfactoria de las

gráficas de las mediciones de las simulaciones anteriores, se puede concluir que los algoritmos utilizados para la simulación del fluido usando superficies de frontera trabajan de manera correcta.

4.3. Simulación en espacio tridimensional

Hasta el momento se han mostrado los resultados obtenidos de las simulaciones que trabajan en un espacio bidimensional. El motivo del por qué se empezó a simular el fluido dentro del tubo en el espacio bidimensional, fue por su fácil y rápida implementación. Además de que el análisis de los resultados es sencillo así como la visualización de los datos entregados en las simulaciones. El siguiente paso es adecuar el fluido y las condiciones de frontera en un espacio tridimensional. Este cambio de espacio es simple, ya que se tiene que agregar la variable de profundidad llamada “z” a las características y algoritmos que describen el comportamiento del fluido.

Para las simulaciones tridimensionales, se utilizaron las superficies de frontera para representar únicamente el área de trabajo del fluido, ya que la representación del fluido requiere tiempo de cómputo, por lo que, al no utilizar las partículas de frontera, se reduce el costo y el tiempo de cómputo que se utilizará para la representación del fluido de forma tridimensional.

Las simulaciones que se presentan en esta sección, están enfocadas en la interacción entre el fluido y los obstáculos. Éstos se colocaron en el centro del espacio de trabajo del fluido (tubo). Los objetos con los que el fluido interactuó fueron: una esfera sólida y una esfera deformable. A continuación se muestran los resultados de las simulaciones realizadas.

4.3.1. Interactuando con una esfera sólida

El primer obstáculo que se introdujo dentro del área de trabajo del fluido fue una esfera sólida. El propósito de introducir la esfera en dicha área, fue verificar que la superficie de frontera del obstáculo inyecte de manera correcta las fuerzas externas (abordadas en el capítulo anterior), en las partículas del fluido que hayan colisionado sobre ésta, evitando así que las partículas penetren a la esfera sólida cuando éstas choquen contra ella. Al simular la interacción entre el fluido y la esfera sólida en el espacio de trabajo del fluido, se obtuvieron los siguiente resultados:

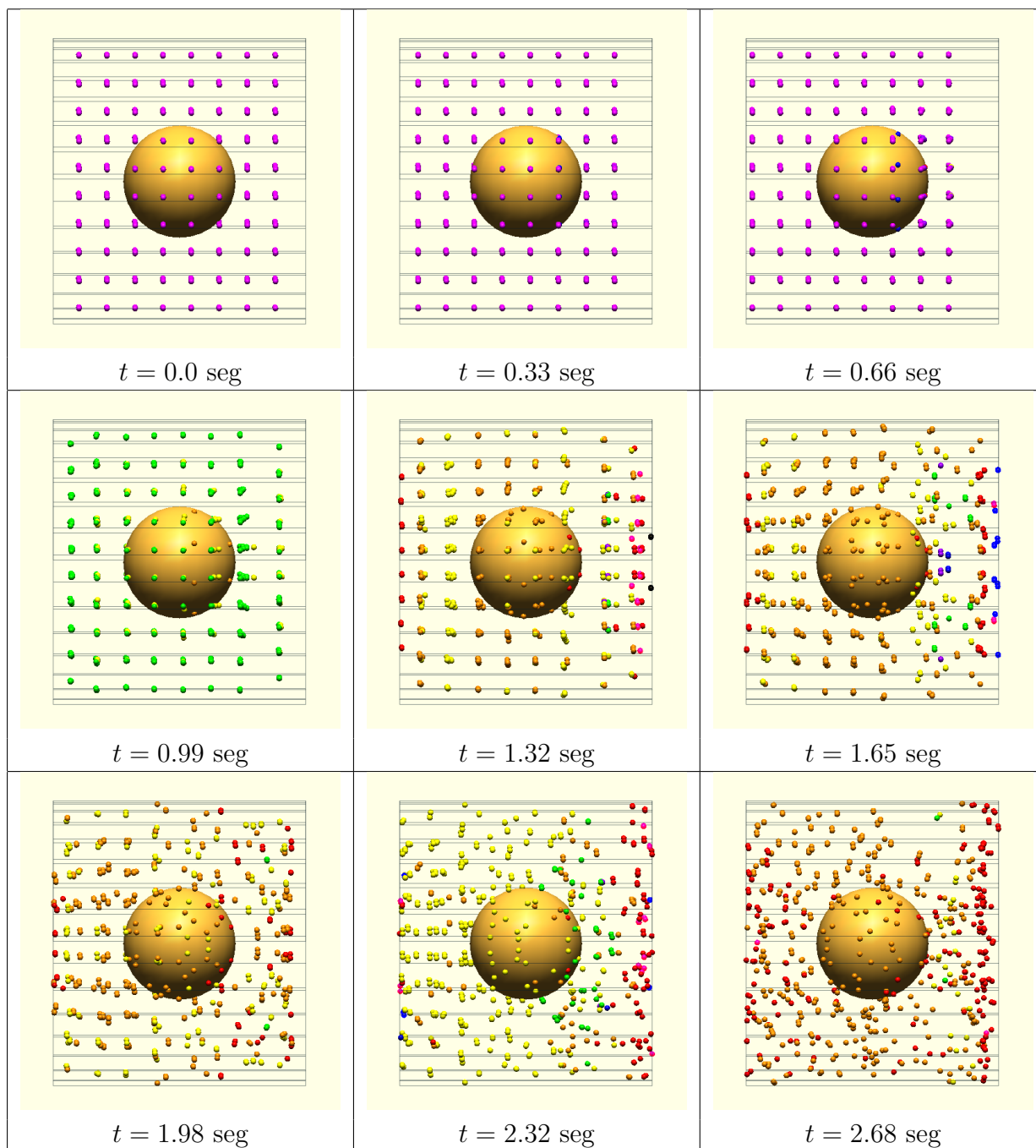


Tabla 4.4: Simulación del fluido interactuando con una esfera sólida, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg

En esta simulación, la representación de las partículas fue mediante su velocidad. Es decir, que las partículas se iban coloreando de acuerdo a la velocidad que llevaban, donde la velocidad más baja está representada por el color rojo y la más alta es por medio del color blanco. El objetivo de visualizar de este modo las partículas fue el observar que las partículas del fluido no atravesen a la esfera sólida. De acuerdo con los resultados

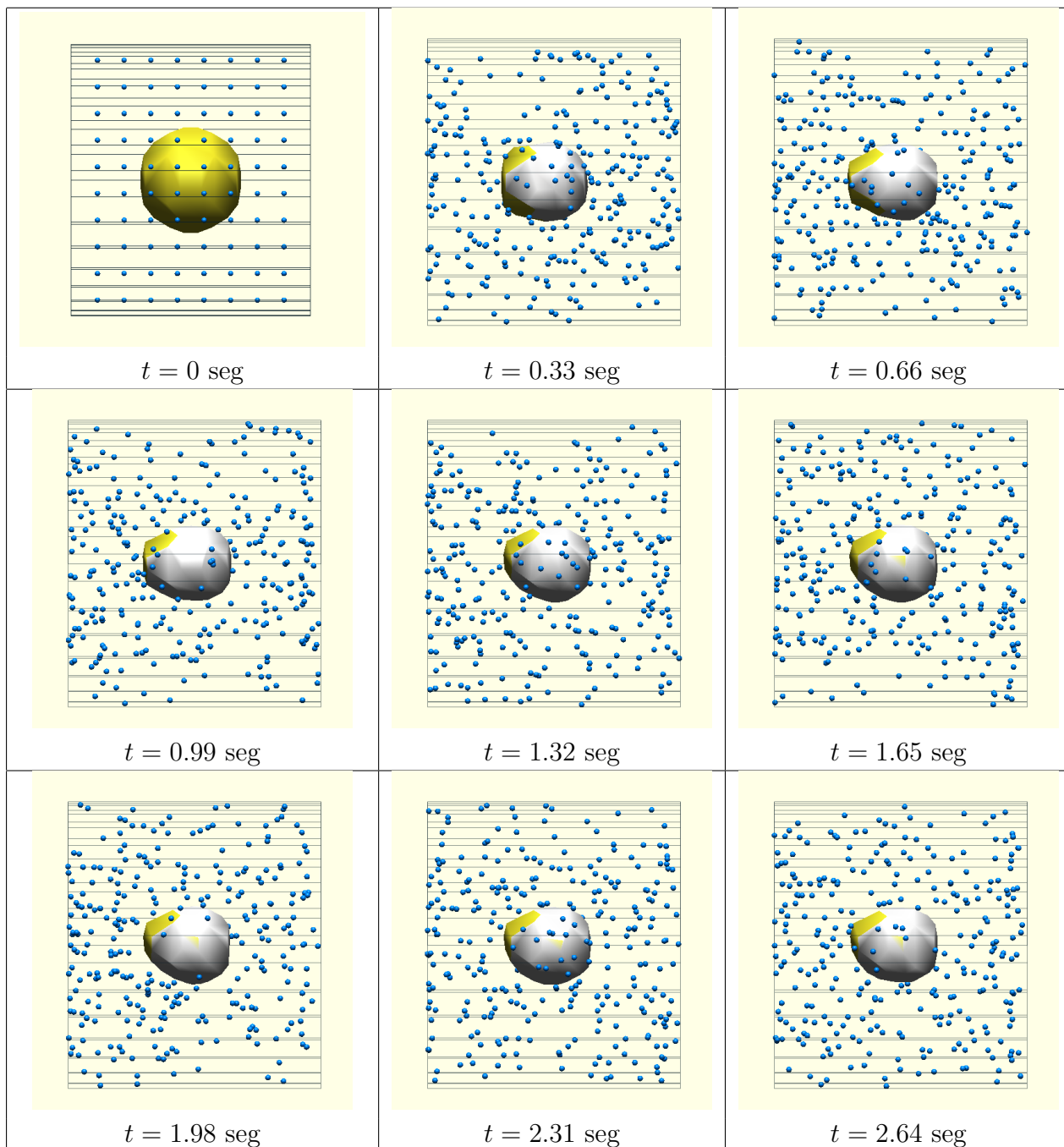
mostrados en la tabla 4.4, se observa que las partículas que colisionan contra la esfera disminuyen drásticamente su velocidad, haciendo notar dos aspectos. El primero, que las partículas que colisionan contra la superficie de la esfera no la atraviesan sino al contrario, rebotan en ella. El segundo aspecto sucede cuando las partículas chocan contra la esfera, ya que la velocidad de éstas se reduce considerablemente. Esto se aprecia cuando la partícula cambia al color rojo o su aproximado.

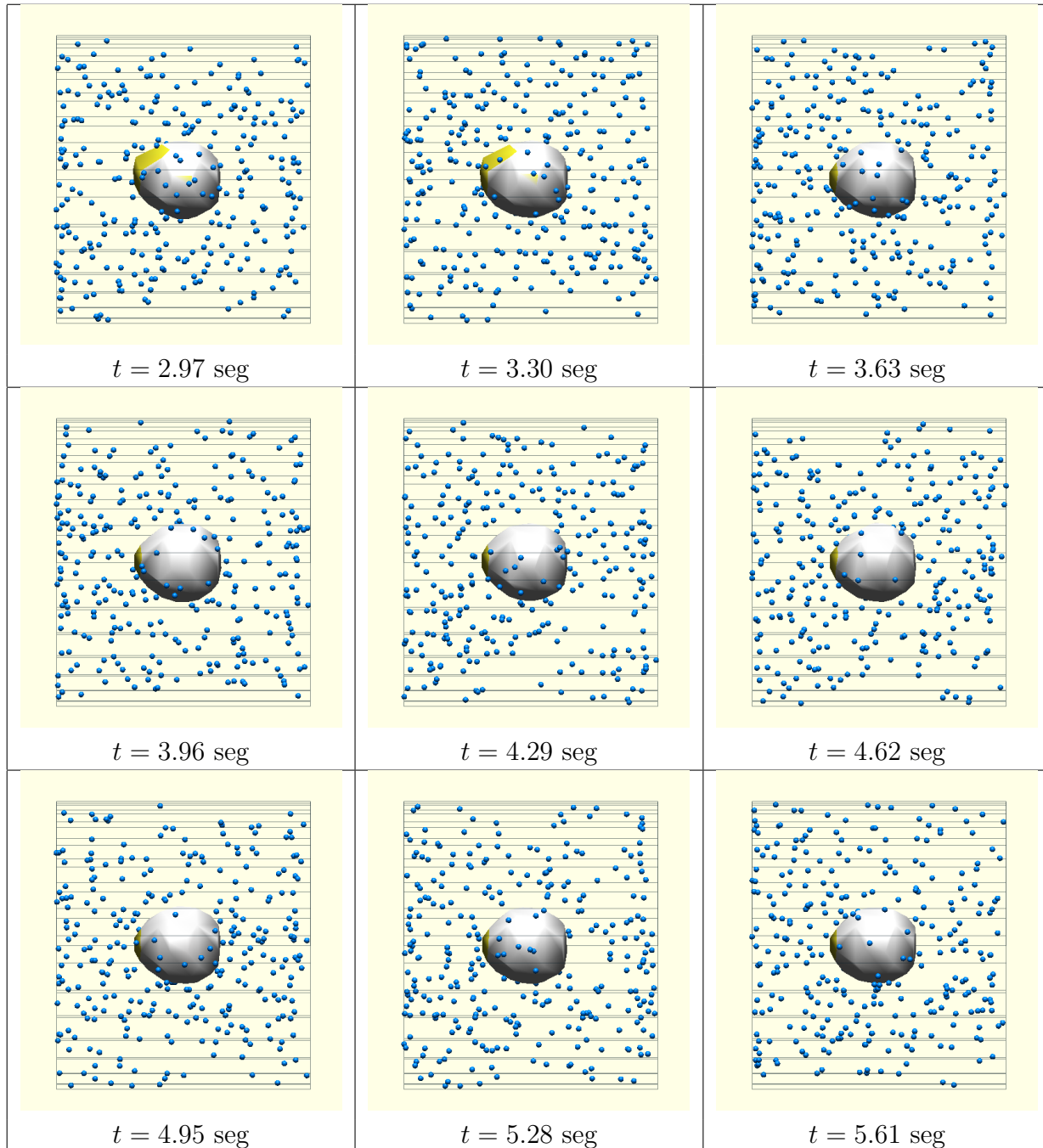
4.3.2. Interactuando con una esfera deformable

Una vez comprobado que la simulación del fluido, su espacio de trabajo y la interacción entre el fluido y un objeto sólido, trabajan de manera correcta en el espacio tridimensional, se procedió a efectuar la simulación principal de este trabajo, la cual consta de introducir un objeto deformable dentro del área de trabajo del fluido. La esfera deformable se ubica en el centro del espacio de trabajo del fluido. Al momento de colisionar las partículas sobre la superficie de la esfera, éstas deformarán a la superficie mas no afectarán la posición de la esfera.

El resultado que se espera obtener al final de cada simulación realizada, es llegar a transformar la esfera en una elipsoide o un esferoide, semejante a una gota de agua. Se toca el término “gota de agua”, ya que una gota de agua sin fuerzas exteriores forma una esfera perfecta, pero al aplicar la fuerza de gravedad en esa esfera de agua, a lo largo de una trayectoria, la esfera de agua llega a formar la gota. En estas simulaciones se utiliza el mismo concepto, se coloca la esfera deformable en el centro del tubo, al momento de iniciar la simulación, el fluido será quien introduzca las fuerzas externas sobre la esfera deformable. Se puede suponer que la esfera deformable es quien esta cayendo dentro del tubo. Una “gota de agua” puede llegar a tomar la forma de una esferoide, esto se debe a los roces de aire que tiene la gota de agua.

Como la esfera deformable está construida por medio de mallas de simplejos, ésta cuenta con diferentes resoluciones. Esto quiere decir que la definición o la representación de la esfera puede ser detallada (mediana) o escueta (baja). Por otro lado, las fuerzas de las partículas que se aplicaron sobre la superficie de la esfera, fueron diferentes. Al momento en que se realizó una simulación del fluido con la esfera deformable de baja resolución y una fuerza de una milésima parte de la fuerza de deformación de la partícula, se obtuvieron los siguientes resultados:





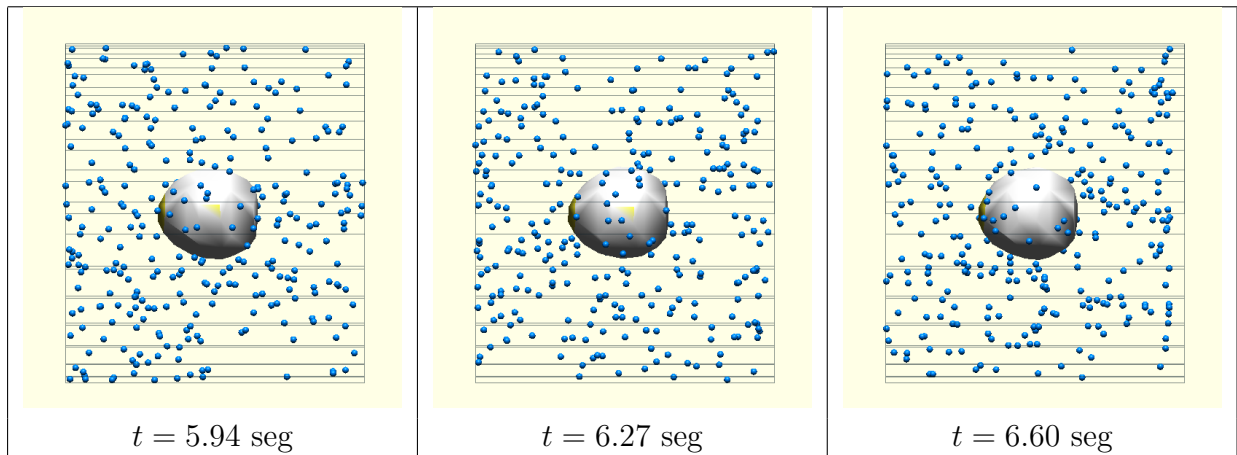
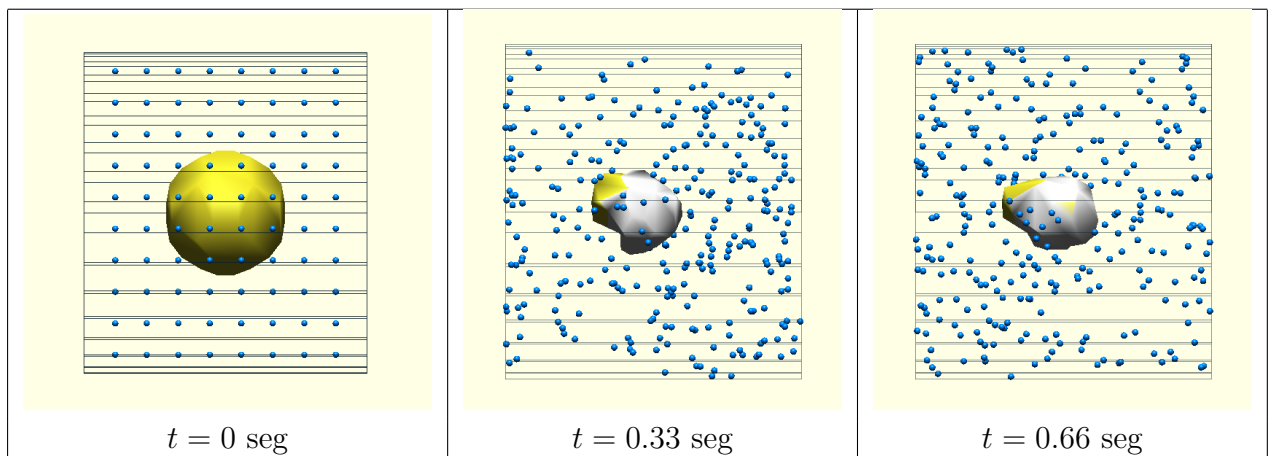
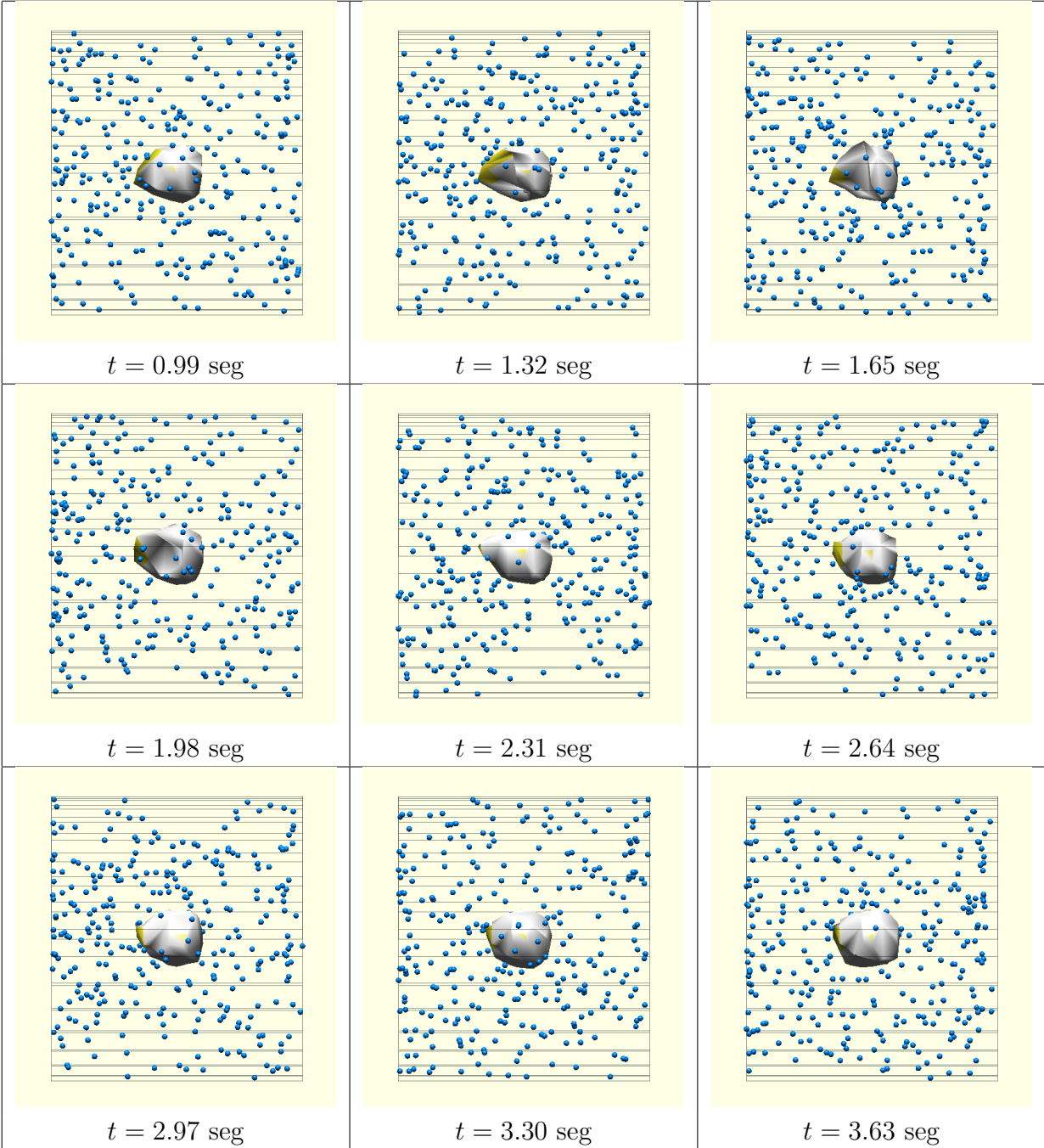


Tabla 4.5: Simulación del fluido interactuando con una esfera deformable y una fuerza igual a $\frac{1}{1000}F_D$, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg

Como se puede observar en la tabla 4.5, la esfera es deformada por las partículas hasta un punto en que su forma llega a ser una esferoide. Por ende, se puede concluir que tanto la implementación como la simulación del fluido junto con el obstáculo deformable son cualitativamente correctos, de acuerdo con los resultados esperados. Ahora, si se incrementa la fuerza de las partículas a dos milésimas partes de la fuerza de deformación se observa que la esfera deformable no logra formar la misma figura que la simulación anterior. Esto se debe a que las fuerzas de las partículas son grandes, por lo que destroran rápidamente a la esfera (ver tabla 4.6).





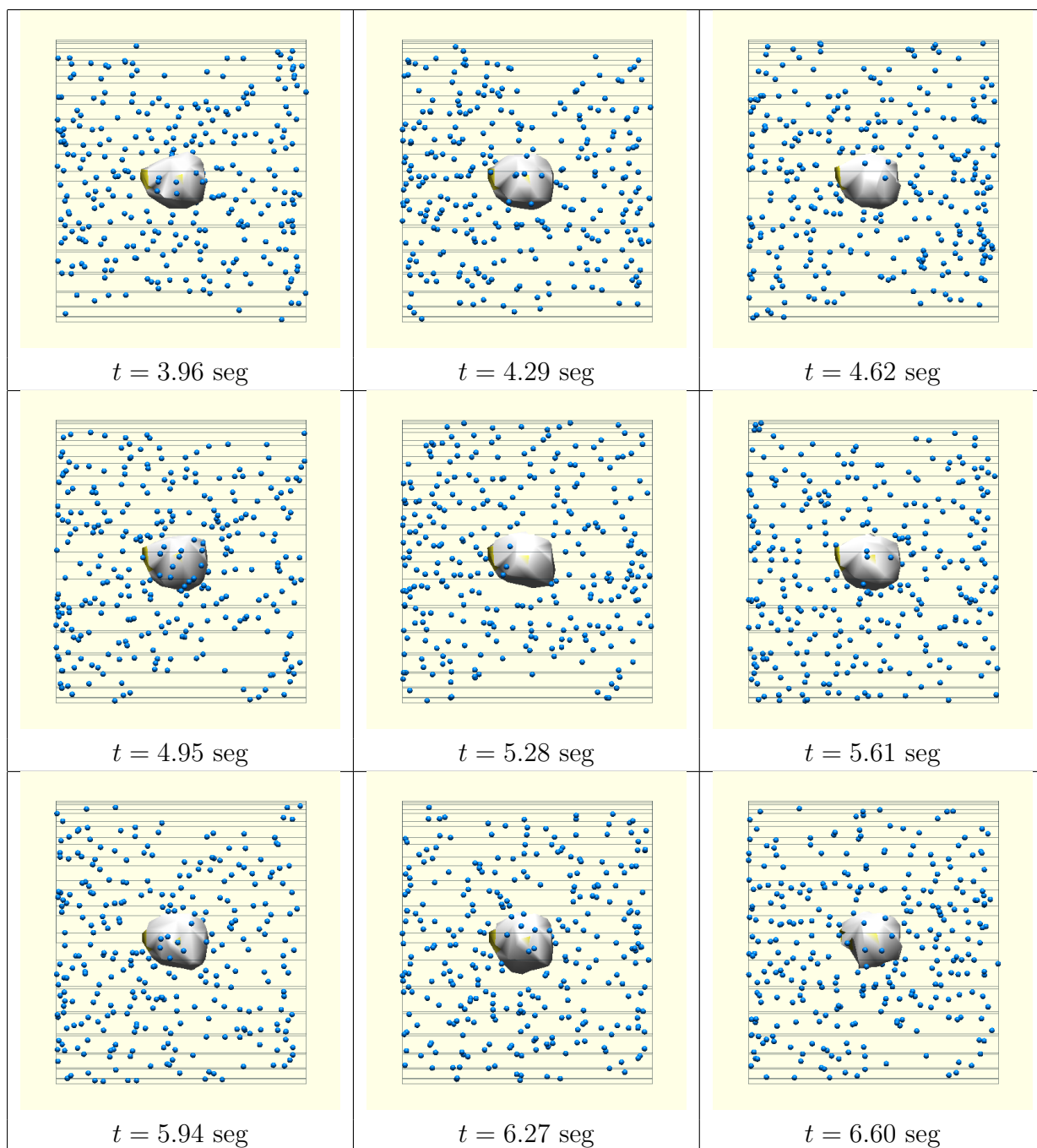
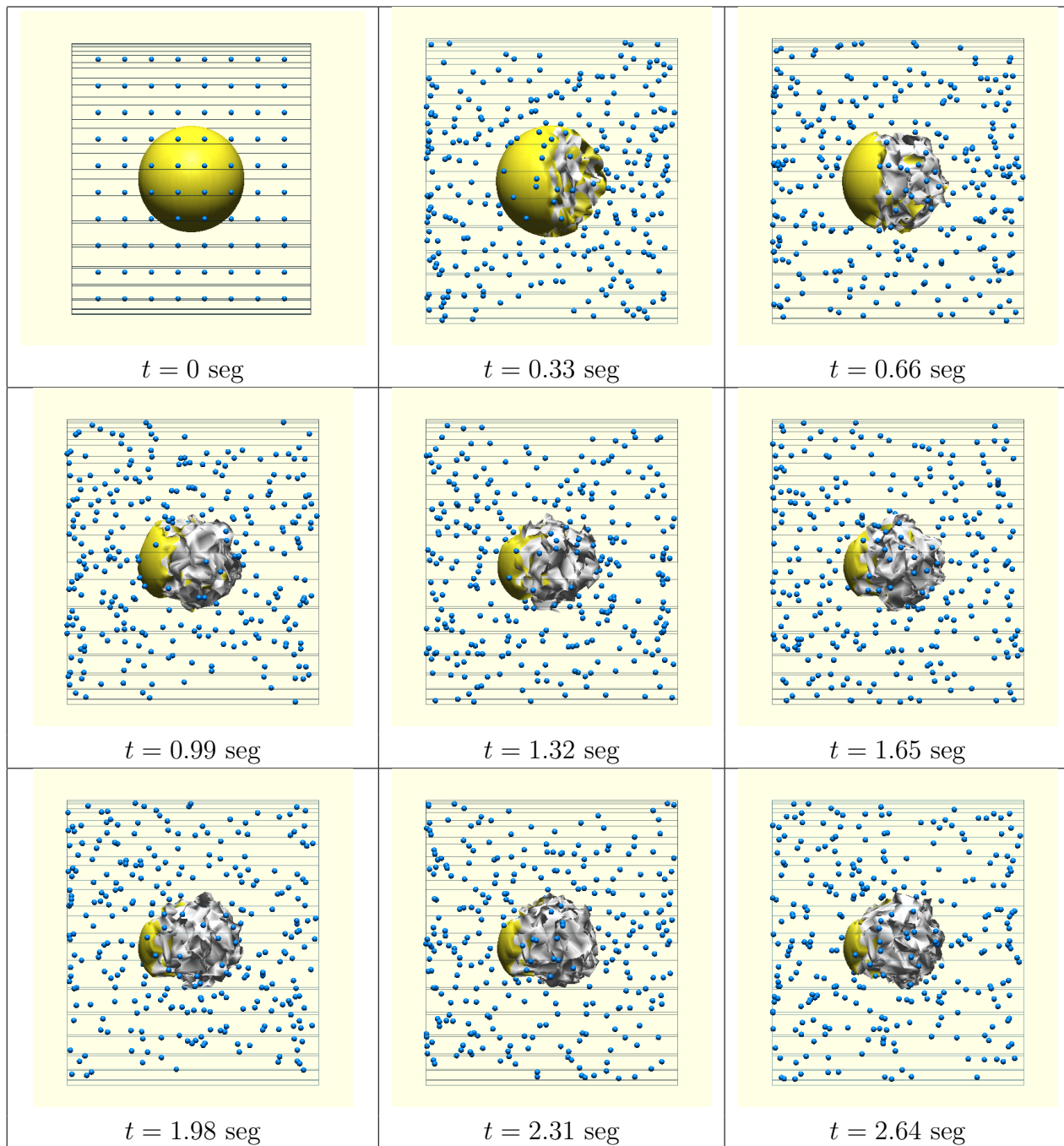
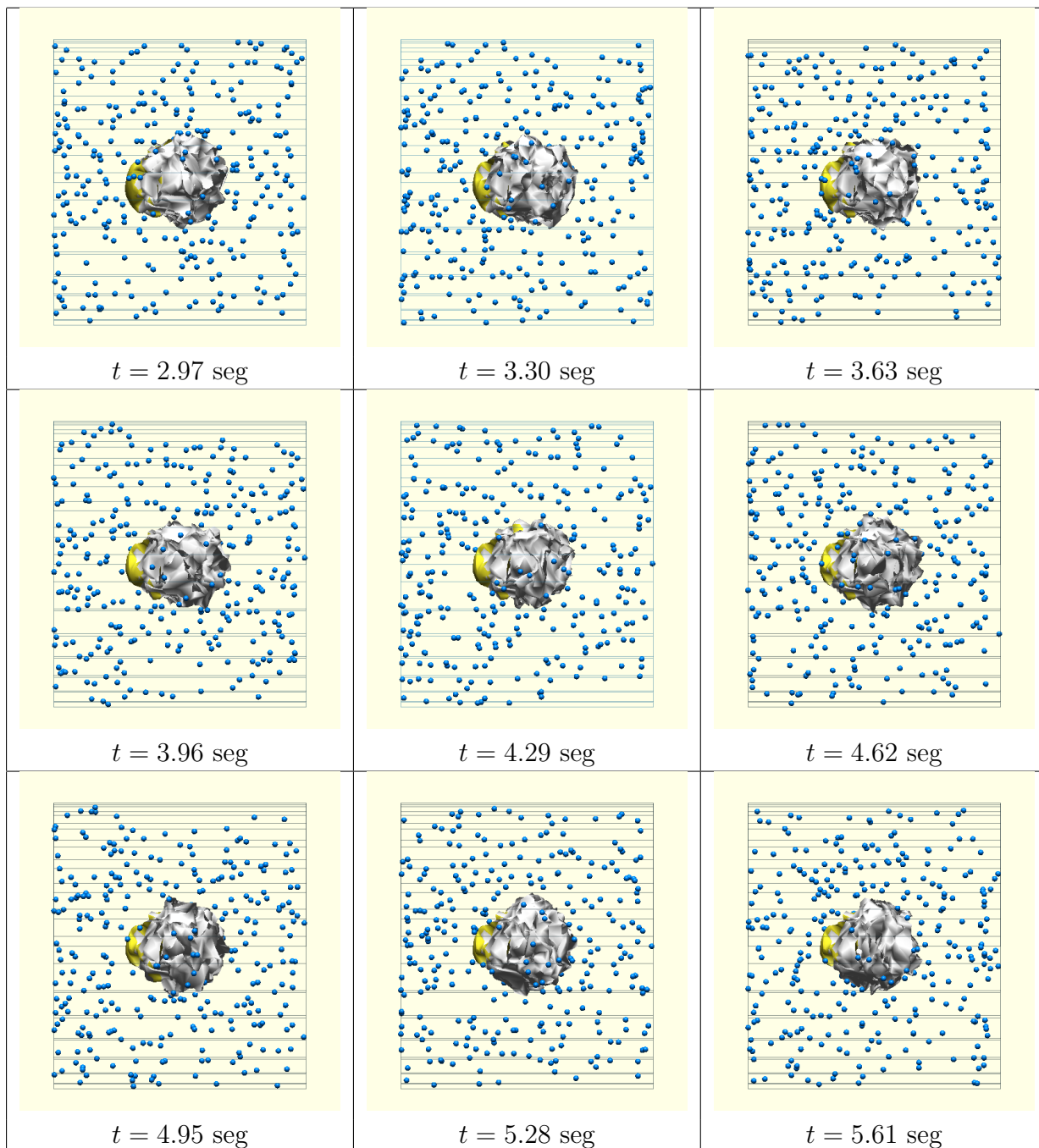


Tabla 4.6: Simulación del fluido interactuando con una esfera deformable y una fuerza de $\frac{1}{500}F_D$, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg

En el caso de las dos simulaciones anteriores, éstas se realizaron utilizando la esfera con baja resolución. Lo siguiente es simular el fluido con la misma esfera deformable pero con mediana resolución. La fuerza que se le aplica a la superficie de la esfera fue de una milésima parte de la fuerza de deformación de las partículas. Esta fuerza es la misma que se utilizó para la primera simulación con la esfera deformable. A continuación se muestran los resultados obtenidos en dicha simulación:





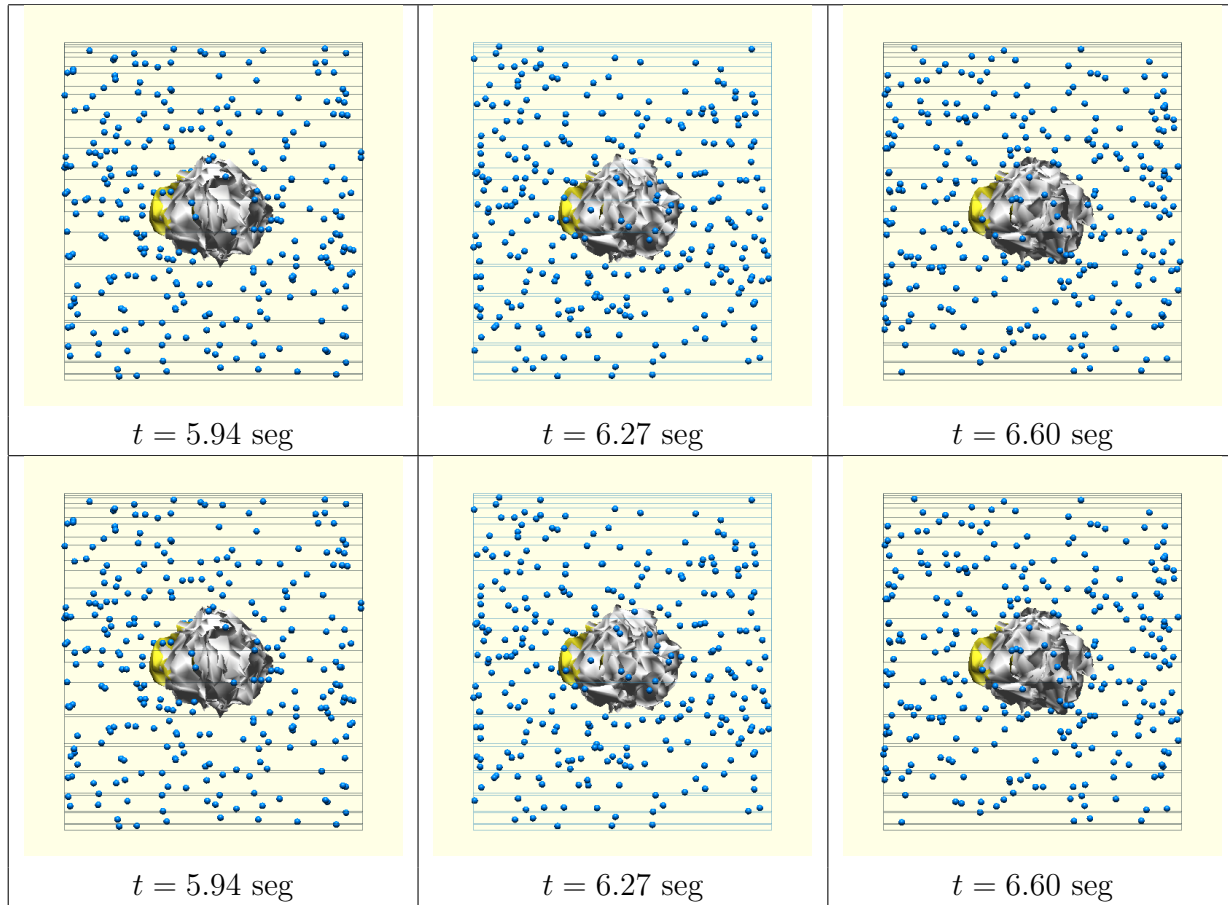
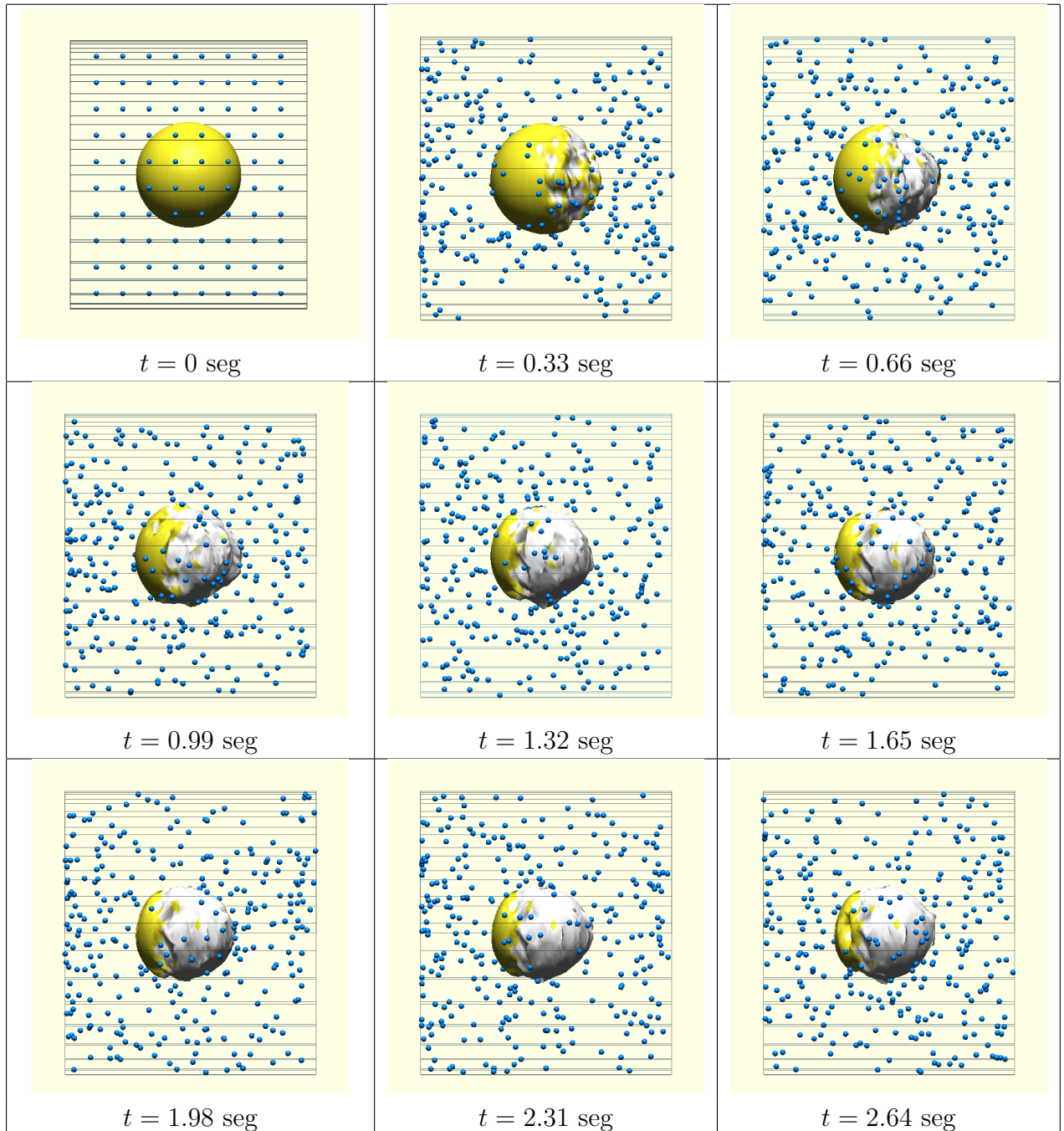
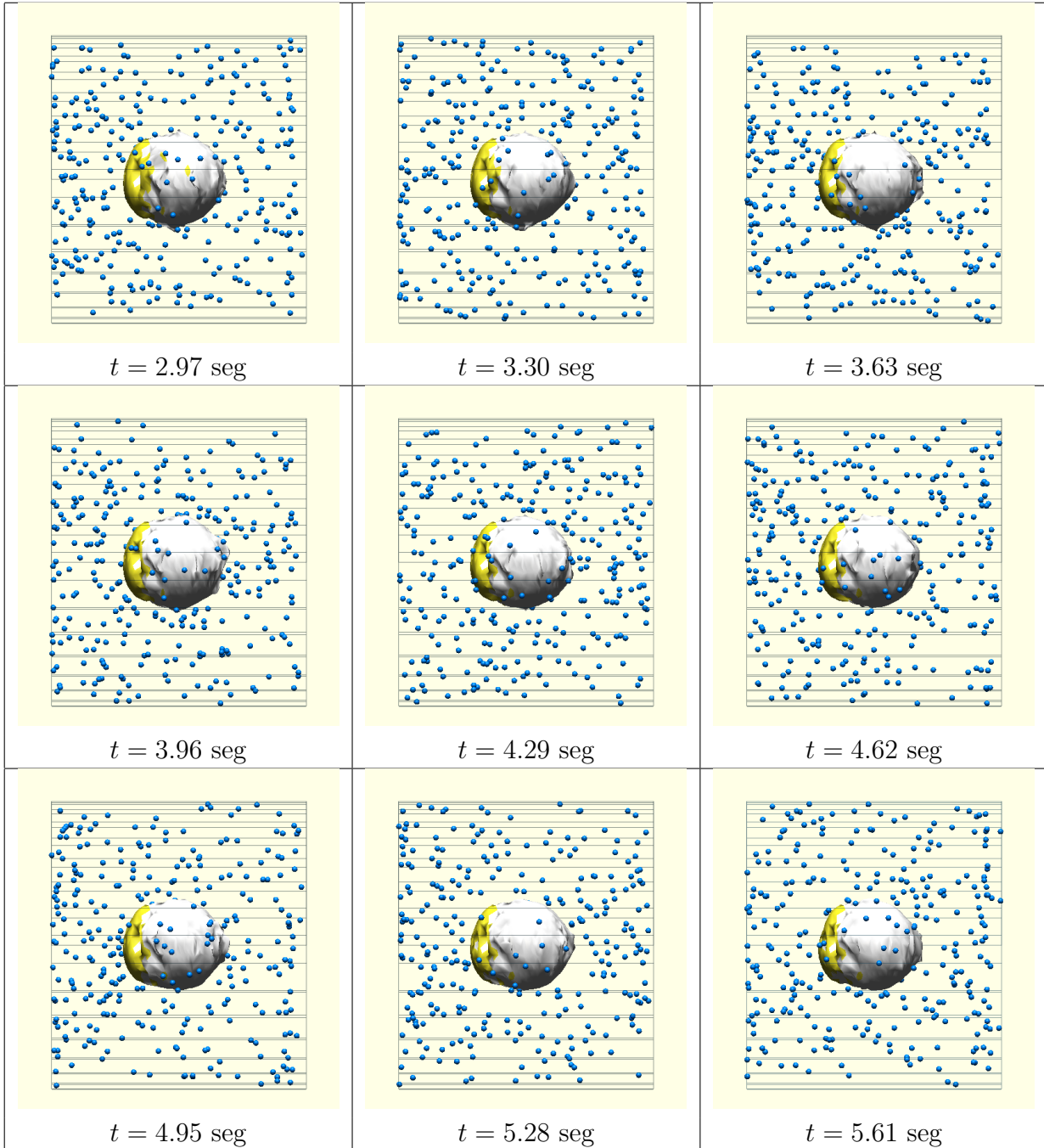


Tabla 4.7: Simulación del fluido interactuando con una esfera deformable y una fuerza igual a $\frac{1}{1000}F_D$, con un $\Delta_t = 0.0002 \text{ seg}$

Como se observa, la fuerza de las partículas es muy grande para la superficie de la esfera, ya que al momento de colisionar las partículas en la esfera, éstas destroran el frente de la esfera, dando como resultado que la esfera no llegue a la forma de gota de agua. Ahora, si la fuerza de las partículas se decrementa a la mitad de la fuerza inicial, es decir, cinco diezmilésimas partes de la fuerza de deformación de las partículas y se efectúa de nuevo la simulación, se obtienen los siguientes resultados:





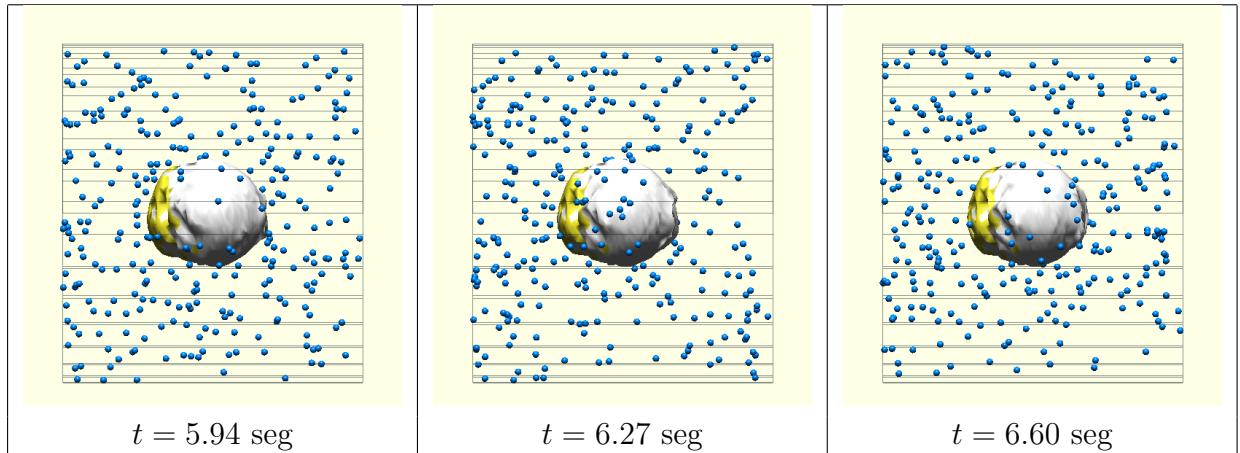


Tabla 4.8: Simulación del fluido interactuando con una esfera deformable y una fuerza igual a $\frac{1}{2000}F_D$, con un $\Delta_t = 0.0002$ seg

Por lo que se puede observar, al momento de reducir la fuerza de deformación de las partículas, se logra conseguir que la esfera deformable tenga la forma de una gota de agua, por lo que esta fuerza es la correcta.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo a Futuro

5.1. Conclusiones

Las conclusiones se han dividido en dos partes, *aportaciones* y *limitaciones*.

5.1.1. Aportaciones

Las principales aportaciones de este trabajo de tesis son las siguientes:

- *Modelado del espacio de trabajo del fluido con superficies de frontera.* Esto es un punto importante ya que la mayoría de los trabajos mencionados en el estado del arte, trabajan con partículas de frontera.
- *Uso del modelo deformable mediante mallas de simplejos.* Esto, a diferencia de los trabajos citados anteriormente, que modelan a los objetos utilizando mallas de triángulos.
- *Visualización de la deformación de un objeto de baja resolución de forma inmediata.* Por lo regular, las simulaciones de fluidos interactuando con objetos demandan suficiente tiempo de cómputo, por lo que la simulación tiene que ser grabada para su posterior reproducción. Para este caso, las simulaciones no necesitan grabarse, ya que los resultados se pueden observar mientras se está llevando a cabo la simulación.

5.1.2. Limitaciones

La principal limitación de este trabajo es la representación en tiempo real de la deformación del objeto deformable con una resolución mediana o alta. Esto es debido a que la construcción de la esfera utilizando cualquiera de estas dos resoluciones aumenta el número de triángulos considerablemente dando como resultado que el tiempo de búsqueda en la detección de la colisión entre la partícula del fluido y la superficie de la esfera sea elevado, trayendo como consecuencia que la simulación sea lenta, de tal forma que el análisis de los resultados obtenidos sea por medio de un vídeo.

Pero a pesar de la limitación que tiene este trabajo, se puede considerar como el inicio de una serie de trabajos a futuro los cuales involucren fluidos incompresibles y objetos deformables.

Unos ejemplos sencillos en dónde se podría aplicar este trabajo es en la simulación de tsunamis, ya que un fluido (la ola de agua), afecta el comportamiento de un objeto sólido semirrígido (edificio) al punto de su ruptura. De esta forma, se pueden desarrollar estructuras de edificios capaces de soportar grandes olas. También este trabajo puede ser utilizado para desarrollar un simulador de cirugías virtuales, ya que los elementos principales son los modelos deformables y los fluidos. Además, se podría simular el comportamiento de un robot bajo el agua, como por ejemplo en la superficie de un submarino.

5.2. Trabajo a futuro

Como se mencionó en la sección anterior, este trabajo tiene muchas expectativas, pero para ello se tienen que realizar algunas optimizaciones y extensiones a éste.

Dentro de las optimizaciones que se tienen que considerar, está en primer lugar *la búsqueda de vecinos para una partícula*. Esta búsqueda es un punto importante para mejorar el desempeño de los algoritmos que describen el comportamiento del fluido, por lo que se tienen que encontrar e implementar nuevas estructuras de datos para las partículas, que permitan reducir el tiempo de búsqueda.

Las detecciones de colisiones entre una partícula y las superficies, son otro punto peculiar a tratar. A pesar de que se utiliza un detector de colisiones potente (SOLID), éste trabaja con los triángulos del objeto, es decir, prueba cada triángulo formado por las mallas de simplejos para verificar en cuál triángulo hubo una colisión. Es ahí el punto débil de este detector, la búsqueda del triángulo donde existió una colisión. Por lo que al igual que en la búsqueda de vecinos para una partícula, se requiere de optimizar la búsqueda de los triángulos o en su defecto, implementar o utilizar otro detector de colisiones.

Dentro de los resultados obtenidos en la deformación del modelo deformable, se utilizaron fuerzas de deformación, las cuales se calcularon de acuerdo a la ecuación de deformación elástica (explicada en el capítulo tres), pero dicha fuerza era muy grande ocasionando que los resultados no fueran los esperados, por lo que se estuvo tomando empíricamente porcentajes de esta fuerza para aplicarla a la superficie. Es por esta razón que se tiene que analizar y obtener un modelo matemático para la fuerza de deformación en la superficie, necesaria para deformar a un cuerpo sin llegar a destrozarlo y obteniendo los resultados deseados. Además, hace falta relacionar los números que se dan como entrada a la simulación con valores de variables físicas reales. Esto posiblemente requeriría de trabajo de laboratorio para encontrar esos valores. Por ejemplo, en la figura 4.5 que se presenta en

el cuarto capítulo, se demuestra que se tiene un cambio de presión en la entrada y salida del tubo, pero no tienen ningún significado físico los valores negativos para la presión.

También se deben incorporar restricciones en el objeto deformable, tales como: mantener el volumen constante o rellenar el mismo objeto con otro fluido incompresible de diferente densidad que el primero.

Por último, se puede sincronizar el tiempo de integración del fluido a que sea $1/30$ seg, el tiempo de muestreo para el vídeo. Se seguiría la teoría de perturbaciones singulares [16]. Esto es, si lo que nos interesa es el resultado final de la simulación sobre el objeto deformable (el estado estable) y no visualizar toda la respuesta transitoria del sistema.

Apéndice A

Interfaz de Usuario

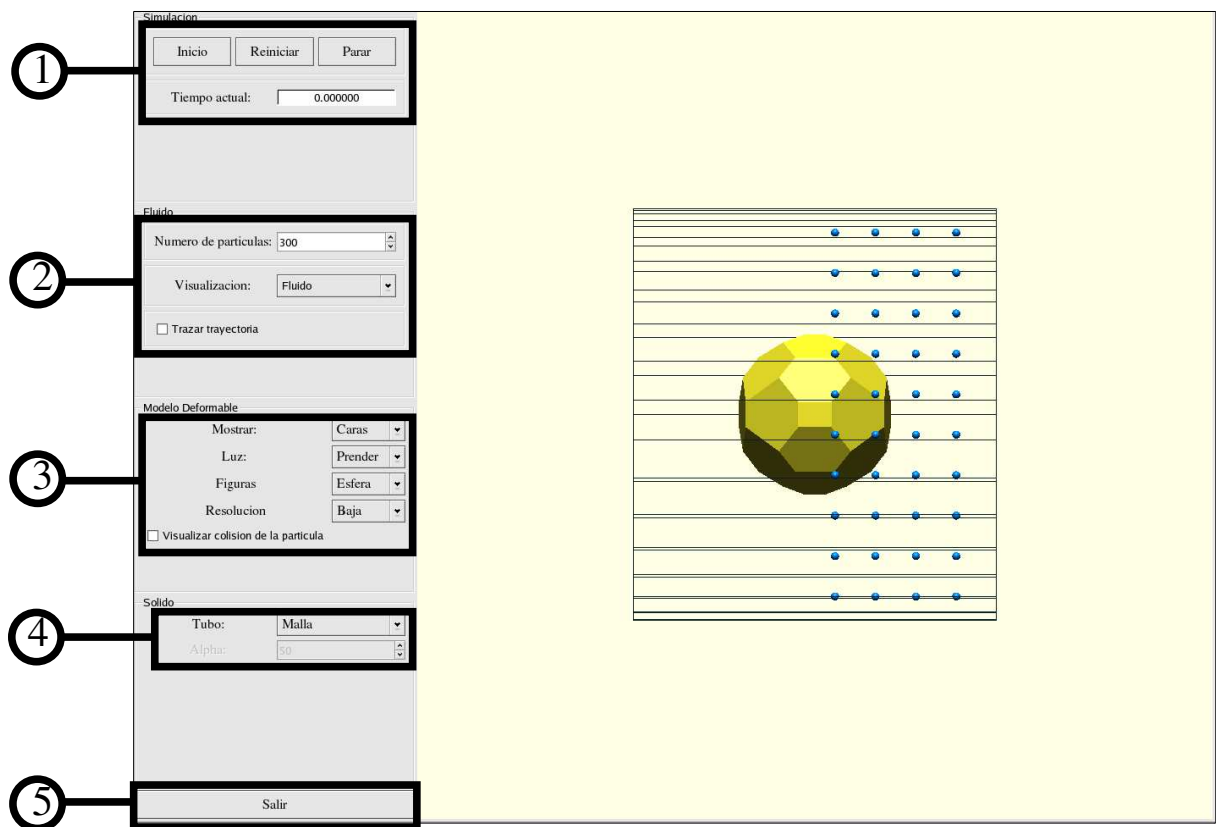


Figura A.1: Interfaz gráfica.

La interfaz de usuario (figura A.1) está dividida en cinco secciones para su fácil uso. Las primeras cuatro secciones agrupan componentes que manipulan a los distintos objetos que se encuentran en la simulación. A continuación se describirán cada uno de las secciones, así como los elementos que se encuentran dentro de éstas.

1. Esta sección controla la simulación de la interacción entre el fluido y el objeto presente. La simulación es controlada por medio de los botones:
 - *Inicio*, el cual como su nombre lo indica, inicia la simulación.
 - *Reiniciar*, coloca tanto al fluido como al objeto en su posición inicial, restableciendo los valores implicados en la simulación.
 - *Parar*, éste detiene la simulación actual mas no la termina, ya que si se oprime el botón de “Inicio”, la simulación continúa su curso.
2. Ésta manipula todo lo referente a la visualización del fluido. Las formas de visualizar al fluido son las siguientes:
 - *Número de partículas*, controla el número de partículas que se desean observar en la simulación.
 - *Visualización*, como se había comentado anteriormente, podemos visualizar al fluido de dos formas diferentes, la primera es utilizando *fluido*, la cual representa a las partículas con el color azul y la segunda es por medio de *Velocidad*, que colorea a las partículas dependiendo de la velocidad de éstas. La escala de colores que se utiliza para visualizar las partícula es: rojo, naranja, amarillo, verde, azul, violeta, morado y blanco, donde el color rojo indica que la partícula cuenta con una velocidad baja con respecto a las demás y la velocidad alta está representada por medio del color blanco.
 - *Trazar trayectoria*, esta opción permite trazar la trayectoria de las partículas que se encuentran en el espacio de trabajo.
3. Esta sección se encuentra enfocada a la visualización del objeto deformable. Se puede representar al objeto de las siguientes maneras:
 - *Mostrar*, cuenta con las opciones de representar al objeto por medio de sus *caras*, utilizando una *malla* o mediante *simplejos*. Esta última opción fue la que se utilizó para presentar los resultados de las simulaciones.
 - *Luz*, da el efecto de realismo a los objetos ubicados dentro del área de trabajo de la interfaz.
 - *Figuras*, muestra la figura que se está usando para la simulación. Por el momento sólo se introdujo la esfera.
 - *Resolución*, define la calidad de la construcción de la esfera. Los objetos formados utilizando las mallas de simplejos, pueden ser representados mediante una resolución baja, mediana o alta.
 - *Visualizar colisión de la partícula*, esta opción permite observar en qué cara del objeto colisionan las partículas.

4. Esta sección está dirigida a la visualización del tubo. Las formas en que se puede observar al tubo dentro del área de trabajo de la interfaz son las siguientes:
 - *Malla*, muestra la malla que se utiliza para construir al tubo.
 - *Caras*, muestra al tubo como un sólido. Al elegir esta opción, se activa la opción *Alpha*, la cual controla la transparencia del tubo.
5. Al oprimir el botón *Salir* se termina el programa.

Bibliografía

- [1] Gingold R. A. and J.J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non spherical stars. *Royal Astronomical Society, Monthly Notices*, 181:375–389, 1977.
- [2] S Abril Pérez. Utilización del método sph en la simulación del sloshing. 2005. Universidad de la Rioja, Technical Report No. 822.
- [3] J.D. Anderson. *Computational Fluid Dynamics, The Basics with Applications*. McGraw-Hill, 1995.
- [4] G.K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1974.
- [5] Luis Cueto Felgueroso Landeira, Mosqueira Martínez Gonzalo, Ignasi Colominas Ezponda, Fermín Navarrina Martínez, and Manuel Casteleiro Maldonado. Análisis de formulaciones numéricas sph para la resolución de problemas de flujo con superficie libre. *V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Madrid, Spain*, pages 1–18, 2002.
- [6] Luis Cueto Felgueroso Landeira, Mosqueira Martínez Gonzalo, Ignasi Colominas Ezponda, Fermín Navarrina Martínez, and Manuel Casteleiro Maldonado. Una formulación numérica sin malla basada en los métodos sph con ponderación de galerkin. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, (1):1–35, 2005.
- [7] Christer Ericson. *Real-Time Collision Detection*. Morgan Kaufmann, 2005.
- [8] J.E. Ramírez Flores and L.G. de la Fraga. Basic three-dimensional objects constructed with simplex meshes. *First International Conference on Electrical and Electronics Engineering*, (166-171), 2004.
- [9] David A. Fulk and Dennis W. Quinn. An analysis of 1-d smoothed particle hydrodynamics kernels. *Journal of Computational Physics*, 126(1):165–180, 1996.
- [10] Alejandro L. Garcia. *Numerical Methods for Physics*. Prentice Hall, 1999.

- [11] S. Gibson and B. Mirtich. A survey of deformable modeling in computer graphics. 1997. S. Gibson and B. Mirtich. A Survey of Deformable Modeling in Computer Graphics, Tech. Report No. TR-97-19, Mitsubishi Electric Research Lab., Cambridge, MA, November 1997.
- [12] Herbert Goldstein. *Mecánica Clásica*. Editorial Reverté, S.A., 1987.
- [13] M. Gómez Gesteira, R. A. Dalrymple, A. J. C. Crespo, and D. Cerqueiro. Uso de la técnica sph para el estudio de la interacción entre olas y estructuras. *Fundación para el Fomento de la Ingeniería del Agua*, 11(2):147–170, 2004.
- [14] Jin Hongbin and Ding Xin. On criteria for smoothed particle hydrodynamics kernels in stable field. *Journal of Computational Physics*, 202(2):699–709, 2005.
- [15] D.A. Jones and D. Belton. Smoothed particle hydrodynamics: Applications within dsto. 2006. Defence Science and Technology Organisation - Australia [<http://dspace.dsto.defence.gov.au/dspace-oai/request>] (Australia), Technical Report No. DSTO-TR-1922.
- [16] Hassan Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1999.
- [17] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Mecánica de Fluidos*. Reverté, S.A., 1991.
- [18] Andersson Lars. Real-time fluid dynamics for virtual surgery. Master's thesis, Chalmers University of Technology, 2005.
- [19] Youquan Liu, Xuehui Liu, and Enhua Wu. Real-time 3d fluid simulation on gpu with complex obstacles. In *PG '04: Proceedings of the Computer Graphics and Applications, 12th Pacific Conference on (PG'04)*, pages 247–256. IEEE Computer Society, 2004.
- [20] L.B Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astrophysics Journal*, 82:1013–1024, 1977.
- [21] Trina M. Roy. Physically-based fluid modeling using smoothed particle hydrodynamics. Master's thesis, University of Illinois at Chicago, 1995.
- [22] J. G. Moctezuma Ramírez, Vicente Parra Vega, and L. G. de la Fraga. Real time manipulation of deformable objects made with simplex meshes. *5th International Symposium on Robotics and Automation*, pages 147–150, 2006.
- [23] Julio Guadalupe Moctezuma Ramírez. Manipulación tridimensional de objetos deformables virtuales. Master's thesis, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2006.
- [24] J. J. Monaghan. Simulating Free Surface Flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, 110:399–406, 1994.

- [25] J. J. Monaghan. Sph without a tensile instability. *J. Comput. Phys.*, 159(2):290–311, 2000.
- [26] J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Rep. Prog. Phys.*, 68:1703–1759, 2005.
- [27] J.J. Monaghan and J.C. Lattanzio. A Refined Method for Astrophysical Problems. *Astron. Astrophysics*, 149:135–143, 1985.
- [28] J.P. Morris. An overview of the method of smoothed particle hydrodynamics. 1995. Universitat Kaiserslautern. Internal Report.
- [29] Matthias Müller, Simon Schirm, and Matthias Teschner. Interactive blood simulation for virtual surgery based on smoothed particle hydrodynamics. *Technol. Health Care*, 12(1):25–31, 2004.
- [30] Matthias Müller, Simon Schirm, Matthias Teschner, Bruno Heidelberger, and Markus Gross. Interaction of fluids with deformable solids. *Comput. Animat. Virtual Worlds*, 15(3-4):159–171, 2004.
- [31] Simon Premoze, Tolga Tasdizen, James Bigler, Aaron Lefohn, and Ross T. Whitaker. Particle-based simulation of fluids. *EUROGRAPHICS*, 22(3), 2003.
- [32] J.E. Priego de los Santos and M.J. Porres de la Haza. La triangulación de delaunay aplicada a los modelos digitales del terreno. *X congreso de métodos cuantitativos, sistemas de información geográfica y teledetección*, 2006.
- [33] Jorge Eduardo Ramírez Flores. Modelos deformables para caracterizar macromoléculas biológicas. Master’s thesis, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2004.
- [34] Claudia Magdalena Ramírez Trejo. Animación de modelos deformables. Master’s thesis, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2005.
- [35] Robert Resnick, David Halliday, and Kenneth Krane. *Física*. CECSA, 1998.
- [36] Stefan Schreir. *Compressible Flow*. Wiley-Interscience, 1982.
- [37] C.M. Ramírez Trejo and L.G. de la Fraga. Animation of deformable objects built with simplex meshes. *Second International Conference on Electrical and Electronics Engineering*, (36-39), 2005.
- [38] R. M. Valladares, P. Goldstein, C. Stern, and A. Calles. Simulation of the motion of a sphere through a viscous fluid. *Revista mexicana de física*, 49(2):166–174, 2003.